PGS.TS. NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

QUYỂN 3

HỆ PHI TUYẾN-HỆ NGẪU NHIÊN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

PGS.TS NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

Lý thuyết
ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

Quyển 3

HỆ PHI TUYẾN - HỆ NGẪU NHIÊN

(In lần thứ 3 có chỉnh sửa)

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2009

LỜI MỞ ĐẦU

Điều khiển tự động có lịch sử phát triển từ trước Công nguyên, bắt đầu từ đồng hồ nước có phao điều chỉnh của Ktesibios ở Hy Lạp. Hệ điều chỉnh nhiệt độ đầu tiên do Cornelis Drebbel (1572–1633) người Hà Lan sáng chế. Hệ điều chỉnh mức đầu tiên là của Polzumov người Nga (1765). Hệ điều chỉnh tốc độ được ứng dụng trong công nghiệp đầu tiên là Jame Watt (1769).

Thời kỳ trước năm 1868 là thời kỳ chế tạo những hệ tự động theo trực giác. Các công trình nghiên cứu lý thuyết bắt đầu từ Maxwell, đề cập đến ảnh hưởng của thông số đối với chất lượng của hệ, I. A. Vysnhegradskii với công trình toán học về các bộ điều chỉnh.

Thế chiến lần thứ Hai đòi hỏi sự phát triển về lý thuyết và ứng dụng để có những máy bay lái tự động, những hệ điều khiển vị trí của các loại pháo, điều khiển tự động các rađa v.v... Những năm 1950, các phương pháp toán học và phân tích đã phát triển và đưa vào ứng dụng nhanh chóng. Ở Mỹ thịnh hành hướng nghiên cứu trong miền tần số với các công trình ứng dụng của Bode, Nyquist và Black ở các trung tâm thử nghiệm điện tín. Trong khi ấy, ở Liên Xô (cũ) ngự trị lĩnh vực lý thuyết điều khiển và ứng dụng trong miền thời gian.

Từ những năm 1980, máy tính số bắt đầu được sử dụng rộng rãi, cho phép điều khiển với độ chính xác cao các đối tượng khác nhau.

Với sự ra đời của vệ tinh, thời đại vũ trụ bắt đầu, các hệ điều khiển ngày càng phức tạp hơn và đòi hỏi chất lượng cao hơn. Các phương pháp của Liapunov, Minorsky cũng như lý thuyết điều khiển tối ưu hiện đại của L.S. Pontryagin (Liên Xô cũ), của R.Belman (Mỹ) có ý nghĩa rất lớn. Các nguyên tắc điều khiển thích nghi, điều khiển bền vững, điều khiển mờ, các "hệ thông minh" v.v... ra đời và được áp dụng có hiệu quả vào thực tiễn.

Rõ ràng là trong việc phân tích và tổng hợp các hệ điều khiển hiện nay, việc sử dụng đồng thời miền tần số và miền thời gian là cần thiết [22].

Ở Việt Nam, từ những năm 1960, Đảng và Nhà nước ta đã quan tâm đến việc đào tạo cán bộ và nghiên cứu khoa học trong lĩnh vực này.

Hiện nay công nghệ tự động là một trong những hướng phát triển công nghệ mũi nhọn của đất nước trong thế kỷ 21. Nghị quyết 27 CP của Chính phủ về Chương trình Tự động hóa Quốc gia đã khẳng định vai trò quan trọng của ngành công nghệ này.

Những công trình công nghiệp lớn và trọng điểm hiện nay đều được tự động hóa ở mức độ tương đối cao và chủ yếu do nước ngoài đảm nhiệm. Để làm chủ được các công nghệ mới này, cán bộ kỹ thuật không những phải có khả năng sử dụng tốt mà phải có kiến thức cần thiết và chuyên tâm nghiên cứu, ứng dụng để có thể theo kịp nhịp điệu phát triển chung của thế giới.

Mạng Internet ngày càng được sử dụng rộng rãi cho việc phổ biến những kiến thức mới, cho việc học tập, nghiên cứu. Tuy nhiên không phải bất cứ ai, ở đâu cũng có thể sử dụng có hiệu quả, nhất là việc học tập, nghiên cứu những kiến thức cơ sở một cách có hệ thống.

*Công cụ để điều khiển tự động không ngừng đổi mới và hoàn thiện, nhưng nguyên lý cơ bản vẫn không thay đổi đáng kể. Tuy nhiên cho đến nay, các tài liệu về những vấn đề đã nêu vẫn còn ít, những điều trên đã thúc bách tác giả biên soạn bộ sách này. Bộ sách gồm bốn quyển : Quyển 1 – "**Lý thuyết điều khiển tự động – Hệ tuyến tính**" đã xuất bản năm 2001 ; Quyển 2 – "**Lý thuyết điều khiển tự động thông thường và hiện đại – Hệ xung số**" xuất bản 2003 ; Quyển 4 – "**Hệ tối ưu, Hệ thích nghi** – có tên là "**Lý thuyết điều khiển tự động hiện đại**" đã tái bản năm 2000. Đây là quyển 3 – "**Hệ phi tuyến, Hệ ngẫu nhiên**". Nội dung sách gồm hai phần :*

Phần A – Hệ phi tuyến : Nêu các đặc điểm của hệ phi tuyến, sử dụng các công cụ khảo sát và tổng hợp ở hệ tuyến tính nêu lên các phương pháp thích ứng với tính phức tạp của chúng. Các hệ xung phi tuyến, tổng hợp các hệ phi tuyến trong không gian trạng thái v.v... cũng được đề cập ở đây.

Phần B – Hệ ngẫu nhiên : Nêu một số đặc tính thường gặp ở tín hiệu ngẫu nhiên, đề cập đến việc phân tích và tổng hợp các hệ ngẫu nhiên tuyến tính và phi tuyến, hệ hở và hệ kín.

Trong mỗi phần của cuốn sách đều có hướng dẫn sử dụng máy tính để mô phỏng, đưa ra các ví dụ ứng dụng và nhiều bài tập có chỉ dẫn cần thiết để đi đến đáp án.

Sách đề cập nhiều vấn đề, nêu nhiều ví dụ thực tế, nhiều bài tập với đáp án đầy đủ và được dùng làm tài liệu học tập, tham khảo cho sinh viên, nghiên cứu sinh và cán bộ khoa học kỹ thuật. Sách mới in lần đầu chắc không tránh khỏi sai sót, mong bạn đọc góp ý kiến để lần tái bản sau được hoàn thiện hơn.

Tác giả chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp, các cán bộ thuộc Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật đã giúp đỡ thiết thực để hoàn thành được bộ sách này.

Tác giả.

MỤC LỤC

Phần A
HỆ PHI TUYẾN

Chương 1
KHÁI NIỆM CHUNG

1.1. ĐẶC ĐIỂM CỦA HỆ PHI TUYẾN

Các hệ tuyến tính đã được khảo sát tính chất và đặc điểm của chúng trước đây, nói một cách chính xác, là những mô hình lý tưởng của những hệ tự động trong thực tế. Hệ tuyến tính như "những hòn đảo nhỏ giữa đại dương không bờ bến" của các hệ phi tuyến.

Khi khảo sát các hệ tuyến tính, do đại đa số phần tử của nó là phần tử tuyến tính, cho nên việc phân tích và tổng hợp theo phương pháp tuyến tính chỉ đúng trong những điều kiện nhất định. Chỉ cần một phần tử trong cả hệ là phi tuyến thì hệ phải được xem là phi tuyến. Hệ phi tuyến tồn tại dưới hai hình thức. Một là các khâu phi tuyến có sẵn trong hệ điều khiển đã được xem là tuyến tính. Một khuếch đại điện tử hay bán dẫn được xem là phần tử tuyến tính vẫn có vùng kém nhạy và bão hòa cho nên xét cho cùng cũng là một phần tử phi tuyến. Hai là các khâu phi tuyến được người thiết kế đưa vào nhằm đạt được một chế độ hay chất lượng mong muốn.

Vì vậy cần thiết phải biết tính đến ảnh hưởng của những phần tử phi tuyến đối với hệ, biết đến đặc điểm, tính chất của hệ phi tuyến nói chung cũng như các phần tử của nó nói riêng để có được một hệ điều khiển mong muốn.

Đặc điểm quan trọng của hệ tuyến tính là *nguyên lý xếp chồng* (xếp chồng nguyên nhân và hậu quả). Ở hệ phi tuyến nguyên lý này không tồn tại : Khi có một tác động phức tạp đối với hệ, thì quá trình của hệ

không thể được xem như tổng hợp của những quá trình từ các thành phần riêng lẻ của tác động phức tạp ấy tạo nên. Điều này cũng hạn chế khả năng áp dụng những công cụ toán học quan trọng vào các hệ phi tuyến như biến đổi Laplace và Fourier.

Hệ phi tuyến đa dạng và phức tạp hơn nhiều so với hệ tuyến tính.

Nếu ở hệ tuyến tính, hệ không ổn định, có biên độ ngày càng tăng là không thể chấp nhận được thì ở hệ phi tuyến, vấn đề ổn định được đặt ra theo cách khác. Một số hệ phi tuyến mà chế độ tự dao động (dao động với biên độ không đổi) lại là chế độ bình thường của hệ.

Ở hệ tuyến tính, ổn định là trở về trạng thái cân bằng ban đầu khi mất tác động kích thích từ bên ngoài. Ổn định như thế là *ổn định tiệm cận* hay *ổn định tại một điểm*, có thể thích hợp đối với cả hệ phi tuyến. Ở hệ phi tuyến thường dùng khái niệm ổn định ở một vùng, đặc trưng cho sự trở về một vùng định trước nào đó của hệ, khi tác động từ ngoài vào giảm dần đến không.

Khi đánh giá về cả hai dạng ổn định nói trên, người ta dùng *ổn định trong phạm vi bé, phạm vi lớn* và *trong toàn bộ*. Những khái niệm về ổn định khác nhau ở hệ phi tuyến sẽ được lần lượt đề cập đến ở các chương sau.

Công cụ toán học để phân tích các hệ phi tuyến cũng mang tính chất cá biệt, vì những hệ phi tuyến khác nhau được mô tả bằng những phương trình dạng khác nhau. Do đó sự phức tạp trong việc đơn giản các phương trình vi phân phi tuyến là ở chỗ tìm ra những phương pháp gần đúng để đánh giá về tính chất của quá trình xảy ra trong hệ ; trong đó các đặc tính phi tuyến của các phần tử thực được thay thế bằng các đặc tính phi tuyến gần như lý tưởng, bởi tính chất của các phần tử phi tuyến cũng như bởi phương pháp phân tích hệ là phương pháp gần đúng.

Như vậy việc phân tích các quá trình ở hệ thực có hai bước xấp xỉ : bước một là lập các phương trình vi phân phi tuyến để mô tả gần đúng hệ và bước hai là giải gần đúng các phương trình ấy.

Nếu ở bước một tìm được nghiệm chính xác của các phương trình xấp xỉ thì được gọi là cách *giải chính xác bài toán*, còn nếu cả hai bước đều là gần đúng thì đó là cách *giải gần đúng bài toán*.

Để giải các phương trình phi tuyến, ngoài các phương pháp giải tích và đồ thị, ngày càng phổ biến phương pháp dùng máy tính số để mô hình hóa và tìm đáp số của bài toán dựa vào các phần mềm ngày càng hoàn thiện như MATLAB.

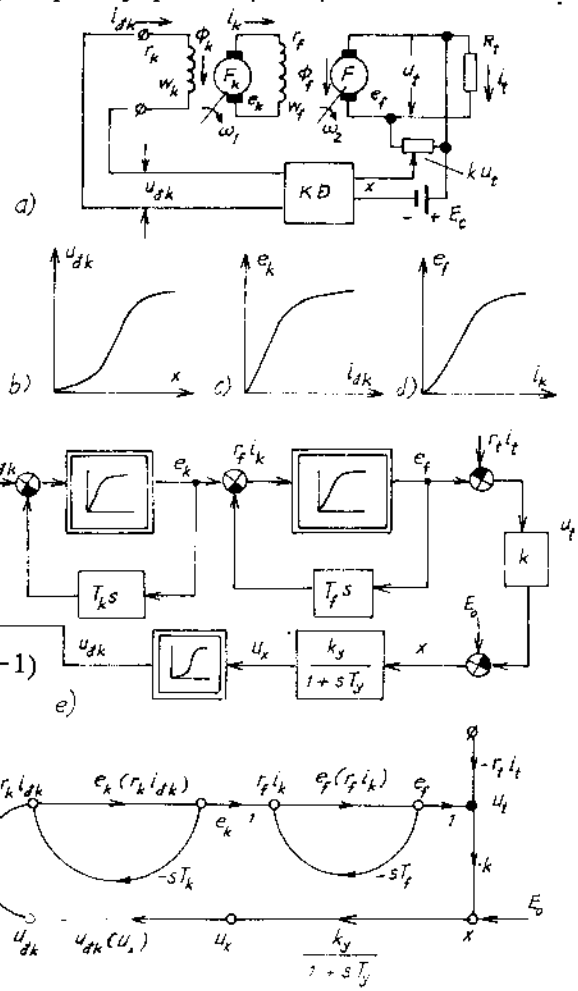
1.2. VÍ DỤ VỀ HỆ PHI TUYẾN

1.2.1 HỆ TỰ ĐỘNG ỔN ĐỊNH ĐIỆN ÁP MÁY PHÁT MỘT CHIỀU

Ở hệ tuyến tính [19], nhiều đối tượng điều chỉnh như máy phát, động cơ, các thiết bị bay v.v... đã được xem như một hệ tuyến tính nếu các hệ ấy làm việc ở lân cận chế độ định mức. Ở các hệ cơ học, các hiện tượng phi tuyến tính chủ yếu như ma sát, ảnh hưởng của các khe hở, độ nghẽn, gối tì trong chuyển động của hệ đều không tính đến. Nhưng nếu tác động của nhiễu là đáng kể hoặc khi cần nghiên cứu chi tiết các quá trình xảy ra trong hệ thì cần tính đến những đặc tính phi tuyến ấy. Ta hãy xét một hệ ổn định điện áp máy phát điện một chiều làm ví dụ.

Nếu tính đến tính chất phi tuyến của máy phát và khuếch đại (KĐ) thì phương trình của hệ tương ứng với hình 1.1a và quán tính của khuếch đại KĐ sẽ có dạng sau :

$$
\left.
\begin{aligned}
k_y x &= u_x + T_y \frac{du_x}{dt}; \\
u_{dk} &= u_{dk}(u_x); \\
u_{dk} &= r_k \cdot i_{dk} + w_k \frac{d\Phi_k}{dt} \\
&= r_k i_{dk} + T_k \frac{de_k}{dt}; \\
e_k &= a_k \Phi_k = e_k(r_k i_{fk}); \\
e_k &= r_f i_k + w_f \frac{d\Phi_f}{dt} \\
&= r_f i_k + T_f \frac{de_f}{dt}; \\
e_f &= a_f \Phi_f = e_f(r_f i_k); \\
u_t &= e_f - r_t i_t \\
x &= E_0 - k u_t
\end{aligned}
\right\} \quad (1-1)
$$



Hình 1.1

mà $T_k = w_k/a_k$, $T_f = w_f/a_f$. Các ký hiệu i- dòng điện, u- điện áp, x- chênh lệch điện áp, e- sức điện động, Φ- từ thông, r- điện trở, T- hằng số thời gian, w- số vòng dây ; a, k- hệ số tỷ lệ ; các ký tự k, f, y, t tương ứng với các đại lượng về kích từ, máy phát, khuếch đại, tải. Ở hệ phương trình này, các mối quan hệ phi tuyến $u_{dk}(u_x)$, $e_k(r_k i_{dk})$, $e_f(r_f i_k)$ được mô tả bằng đồ thị (hình 1.1b, c, d). Ở đây từ dư của máy phát cũng không tính đến nên các đặc tính phi tuyến đều đơn trị. Sơ đồ cấu trúc như ở hình 1.1e và sơ đồ graph như ở hình 1.1f.

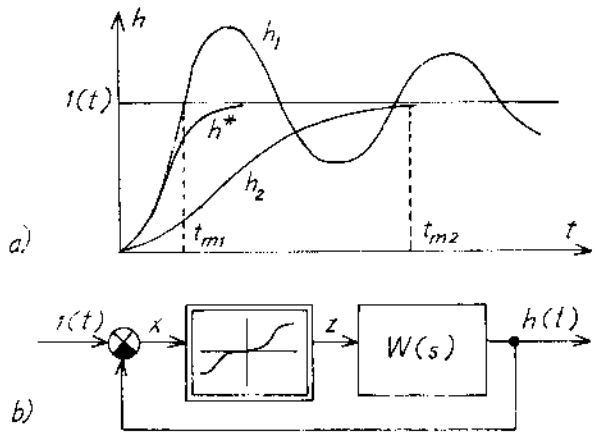
Toán tử biến đổi các quan hệ tuyến tính thể hiện dưới dạng hàm truyền đạt, còn các quan hệ phi tuyến tính – bằng một hàm như ở hình 1.1f. Để mô tả các quá trình trong hệ, người ta dùng các sơ đồ khối cũng như sơ đồ graph tín hiệu.

1.2.2 HIỆU CHỈNH PHI TUYẾN CÁC HỆ LIÊN TỤC

Như đã nêu, việc dùng các phần tử phi tuyến trong các hệ điều khiển cho phép nâng cao chất lượng của hệ. Ví dụ ở các khâu kiểu rơle, các bộ biến đổi chức năng nhiều đầu vào, ở máy tính với các bộ biến đổi tương tự–số, số–tương tự v.v... Ta hãy khảo sát tác dụng của khâu phi tuyến làm chức năng hiệu chỉnh đối với hệ liên tục thông qua việc đánh giá hàm quá độ đối với hai hệ số khuếch đại khác nhau.

Khi hệ số khuếch đại (K) lớn, quá trình mang tính chất dao động, lượng quá điều chỉnh lớn nhưng thời gian đáp ứng t_m bé (đường h_1 ở hình 1.2a). Ngược lại, khi (K) bé, quá trình mang tính chất phi chu kỳ, lượng quá điều chỉnh bằng không nhưng thời gian đáp ứng lớn (đường h_2).

Khi sai lệch lớn, dùng hệ số khuếch đại lớn sau đó giảm dần



Hình 1.2.

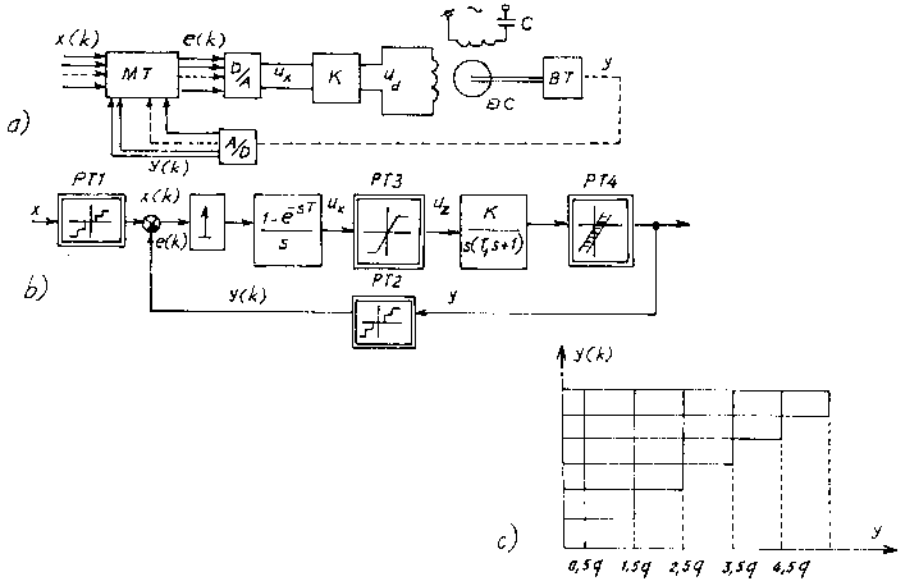
khi giảm sai lệch x = 1(t) − h(t), hàm quá độ như đường h*. Như vậy dùng khâu khuếch đại có hệ số khuếch đại thay đổi như ở hình 1.2b sẽ có chất lượng tốt hơn.

1.2.3 HỆ TÙY ĐỘNG DÙNG MÁY TÍNH ĐIỀU KHIỂN

Sơ đồ chức năng của hệ tùy động dùng máy tính để điều khiển như ở hình 1.3a mà nguyên tắc hoạt động đã nêu ở §II-2 [20].

Sơ đồ khối tương đương như ở hình 1.3b mà ở hình 1.3a là sơ đồ chức năng. Máy tính ở đây làm nhiệm vụ so sánh tín hiệu vào x và hồi tiếp y. D/A và A/D là các bộ biến đổi số-tương tự và tương tự-số. Cơ cấu biến đổi tương tự-số biến đổi tín hiệu vào x thành số x(k) cho nên PT_1 xuất hiện ở đầu vào của sơ đồ khối ở hình 1.3b, K- khuếch đại, ĐC- động cơ chấp hành, BT- biến tốc.

Khi nói về hệ xung, tín hiệu gián đoạn y(k) và e(k) đã được lượng tử hóa theo thời gian và hệ vẫn là tuyến tính, nhưng nếu đề cập đến lượng tử hóa theo mức để có những đại lượng rời rạc mà bộ biến đổi A/D thực hiện thì đó là hệ phi tuyến. Đặc tính tĩnh của phần tử này có dạng bậc thang như ở hình 1.3c trong đó q tương ứng với một lượng tử của tín hiệu ra y của hệ. Tín hiệu đưa vào máy tính x(k) có thể xem là kết quả của sự biến đổi tín hiệu vào liên tục x(t) qua phần tử biến



Hình 1.3.

đổi A/D có dạng bậc thang, nên ở sơ đồ tương đương của hệ tùy động dùng máy tính điều khiển có hai khâu phi tuyến : PT_1 và PT_2. Phần tuyến tính của hệ, ngoài động cơ còn phải tính đến cơ cấu định hình và phần tử xung. Trong hệ thực, khuếch đại KĐ còn có chức năng hạn chế, còn bộ biến tốc có độ "rơ" nhất định do khe hở tạo nên. Ở hình 1.3b còn có hai khâu phi tuyến PT_3 và PT_4, do đó hệ tùy động dùng máy tính điều khiển là một ví dụ về *hệ xung phi tuyến*.

Các ví dụ trên cho thấy hệ phi tuyến tồn tại dưới hai hình thức : tính phi tuyến có sẵn ở một số phần tử của "hệ tuyến tính" hoặc do người thiết kế đưa vào để nâng cao chất lượng điều khiển. Ở các hệ tối ưu và thích nghi [18] thường không thể thiếu các phần tử phi tuyến.

1.3. CÁC KHÂU PHI TUYẾN ĐIỂN HÌNH

Các khâu phi tuyến thường gặp rất đa dạng. Dùng hàm z = z(x) để mô tả mối quan hệ biến đầu ra z là hàm của một biến đầu vào x, có đặc tính phi tuyến mà biến đầu ra z phụ thuộc nhiều biến đầu vào x. Trong trường hợp này dùng phương pháp biến đổi sơ đồ khối để đưa về dạng thông thường : một vào một ra.

Khâu phi tuyến có thể phân loại theo :

1. Tính đối xứng

Đặc tính phi tuyến là đối xứng nếu :

$$z(x) = z(-x) \qquad (1\text{-}2)$$

Đặc tính phi tuyến là không đối xứng nếu :

$$z(x) = -z(-x) \qquad (1\text{-}3)$$

2. Tính trơn

Bất cứ điểm nào của đặc tính z(x) cũng tương ứng với một đạo hàm dz/dx thì đặc tính được gọi là trơn. Ngược lại nếu có điểm gãy khúc, đạo hàm dz/dx sẽ gián đoạn và đặc tính ấy không trơn. Trong thực tế thường gặp những đặc tính tuyến tính từng đoạn, hoặc đặc tính phi tuyến trơn nhưng được tuyến tính hóa từng đoạn để đơn giản khi khảo sát.

3. Tính đơn trị

Nếu một đại lượng của x ứng với một đại lượng của z, đặc tính là

đơn trị ngược lại một đại lượng của x ứng với hai hoặc nhiều hơn đại lượng của z, đặc tính ấy là đa trị.

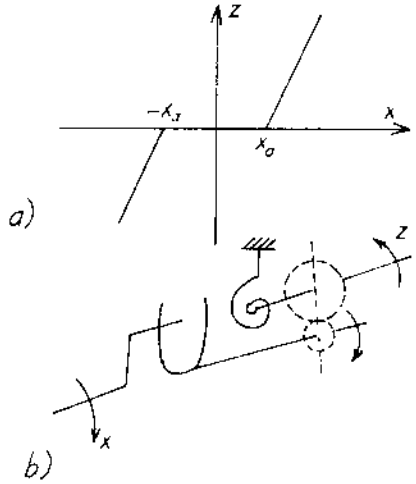
Hãy xét một số khâu điển hình thường gặp.

1.3.1. NHỮNG KHÂU CÓ ĐẶC TÍNH ĐƠN TRỊ VÀ LIÊN TỤC

1.3.1.1. Khâu có vùng kém nhạy

Các mạch khuếch đại điện tử, từ, thủy lực khi tín hiệu vào nhỏ sẽ có vùng kém nhạy nhất định.

Mô hình cơ học giản đơn của khâu kém nhạy như ở hình 1.4b. Hai trục nối nhau có lò xo trả trục bị dẫn về vị trí trung tính với truyền động có khe hở có độ rộng $2x_a$.



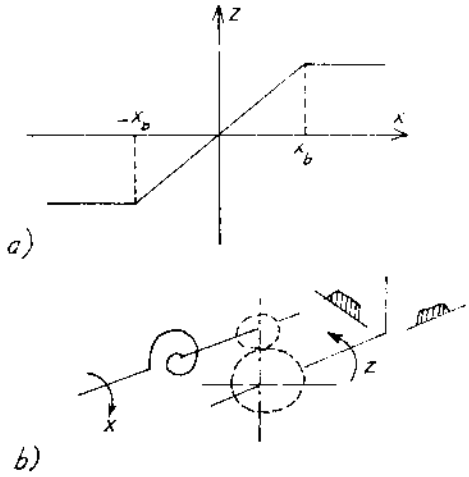
Hình 1.4.

Đặc tính tĩnh của khâu được mô tả bằng phương trình sau :

$$z = \begin{cases} 0, & |x| \leq x_a \; ; \\ k(x - x_a), & x > x_a \; ; \\ k(x + x_a), & x < x_a. \end{cases} \quad (1\text{-}4)$$

1.3.1.2. Khâu hạn chế (bão hòa)

Đặc tính khâu hạn chế như ở hình 1.5a. Hầu hết các khâu khuếch đại điện tử, điện từ, thủy lực, khí nén đều có hạn chế về mặt công suất khi tín hiệu vào lớn.



Hình 1.5.

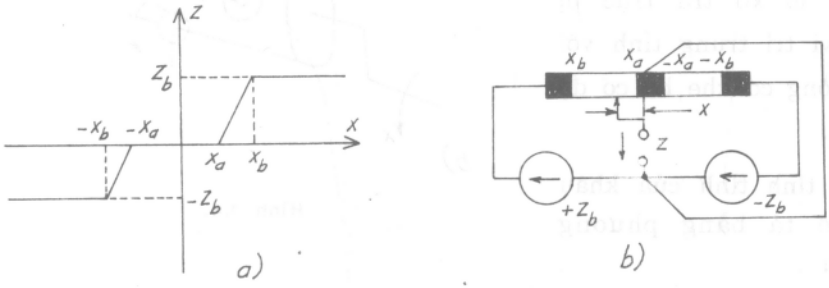
Mô hình cơ học của khâu hạn chế như ở hình 1.5b, là mối liên hệ hai trục bằng lò xo ở đầu vào và vùng hạn chế hay điểm tựa ở van bị dẫn. Đặc tính của khâu được mô tả bằng phương trình sau :

$$z = \begin{cases} k_x, & |x| \leqslant x_b ; \\ z_b \text{sing}x, & |x| > x_b. \end{cases} \qquad (1\text{-}5)$$

1.3.1.3. Khâu hạn chế có vùng kém nhạy

Khâu này là kết hợp của hai dạng phi tuyến nói trên như ở hình 1.6a. Mô hình của phần tử này là biến áp như ở hình 1.6b. Đặc tính của khâu hạn chế có vùng kém nhạy như sau :

$$z = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant x_a ; \\ k(x - x_a), & x_b > x > x_a ; \\ k(x + x_b), & -x_b < x < -x_a ; \\ z_b \text{sign}x, & |x| > x_b \end{cases} \qquad (1\text{-}6)$$



Hình 1.6

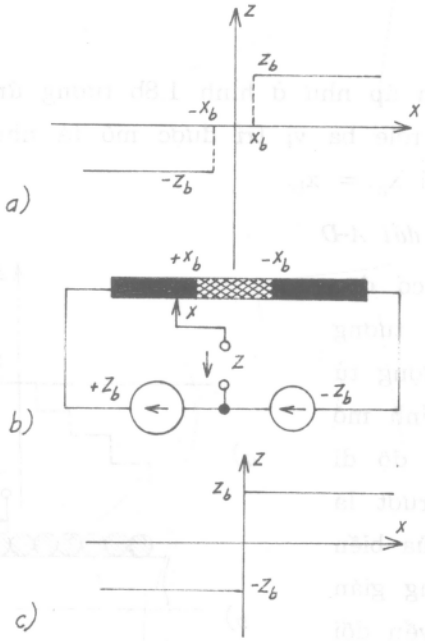
1.3.2. NHỮNG KHÂU CÓ ĐẶC TÍNH ĐƠN TRỊ VÀ GIÁN ĐOẠN

1.3.2.1. Khâu kiểu rơle hai vị trí

Khi môđun của tín hiệu vào $|x| < x_b$, rơle hở mạch (như ở hình 1.7a) nên không thể nói gì về điện áp ở đầu ra z và không có mối liên hệ gì giữa đầu ra và đầu vào. Khi $|x| \geqslant x_b$, đại lượng z sẽ có trị số $+z_b$ hay $-z_b$ tùy thuộc vào dấu của x. Do đó :

$$z = \begin{cases} z_b \text{sign}x, & |x| \geqslant x_b ; \\ \text{Không tồn tại khi } |x| < x_b \end{cases} \qquad (1\text{-}7)$$

Nhiều khi rơle hai vị trí được xem như rơ le lý tưởng với điều kiện $x_b \to 0$ như ở hình 1.7c.

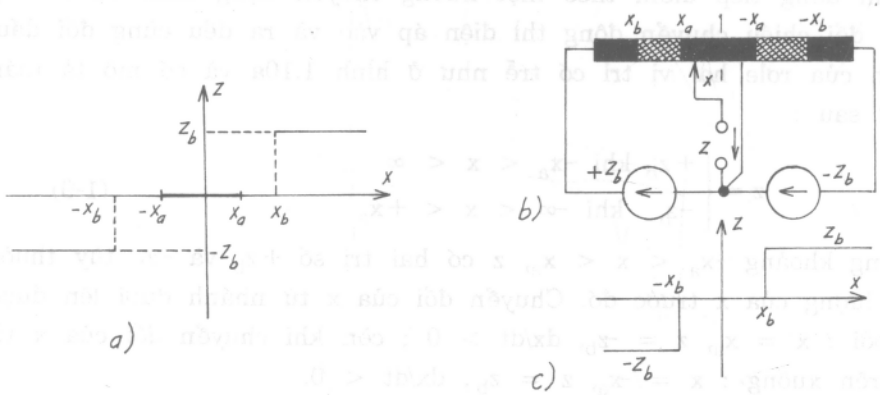


Hình 1.7

1.3.2.2. Khâu kiểu rơle ba vị trí

Đặc tính rơle ba vị trí không kể đến từ dư của nó như ở hình 1.8a. Đặc tính được mô tả bởi :

$$z = \begin{cases} z_b \text{signx}, & |x| \geqslant x_b \; ; \\ 0 \;, & |x| \leqslant x_a \; ; \\ \text{Không tồn tại}, & x_a < |x| < x_b. \end{cases} \qquad (1\text{–}8)$$

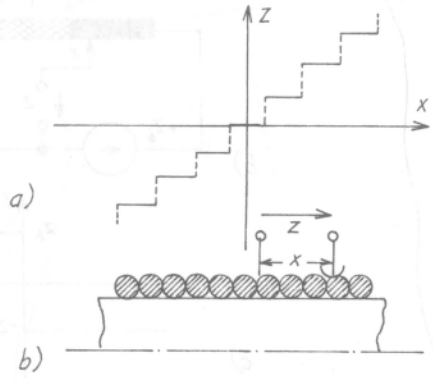


Hình 1.8

Mô hình của biến áp như ở hình 1.8b tương ứng với đặc tính trên. Trong khi khảo sát, rơle ba vị trí được mô tả như ở hình 1.8c tương ứng với hình 1.8a với $x_a = x_b$.

1.3.2.3. Khâu biến đổi A-D

Thuộc loại này có đặc tính của bộ biến đổi tương tự-số của phần tử lượng tử hóa theo mức. Đặc tính mô tả ở hình 1.9a. Khi độ di chuyển x của con trượt là liên tục thì đầu ra của biến áp là những đại lượng gián đoạn ứng với sự chuyển đổi điện áp mỗi vòng dây như ở hình 1.9b.



Hình 1.9

1.3.3. CÁC KHÂU CÓ ĐẶC TÍNH LƯỠNG TRỊ

1.3.3.1. Khâu kiểu rơ le hai vị trí có trễ

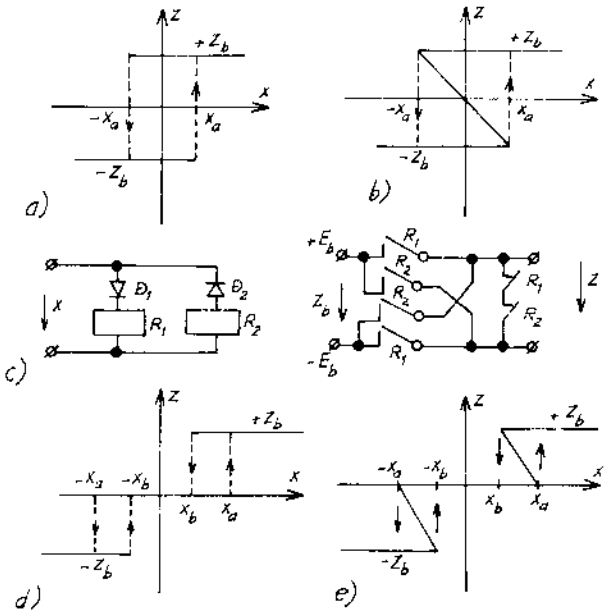
Trong thực tế, thường thì đại lượng điện áp vào làm cho điện áp ra của rơle đổi dấu là khác nhau. Đối với rơle hai vị trí, điều chỉnh đối xứng, khi đóng tiếp điểm theo một hướng chuyển động nhất định cũng như khi đổi chiều chuyển động thì điện áp vào và ra đều cùng đổi dấu. Đặc tính của rơle hai vị trí có trễ như ở hình 1.10a và có mô tả toán học như sau :

$$z = \begin{cases} +z_b & \text{khi } -x_a < x < \infty \\ -z_b & \text{khi } -\infty < x < +x_a \end{cases} \qquad (1\text{-}9)$$

Trong khoảng $-x_a < x < x_a$, z có hai trị số $+z_b$ và $-z_b$ tùy thuộc vào đại lượng của x trước đó. Chuyển đổi của x từ nhánh dưới lên được mô tả bởi : $x = x_a$, $z = -z_b$, $dx/dt > 0$; còn khi chuyển đổi của x từ nhánh trên xuống : $x = -x_a$, $z = z_b$, $dx/dt < 0$.

Rơle hai vị trí có hồi tiếp dương được thực hiện bằng khuếch đại có hạn chế như ở hình 1.10b. Trong khoảng $-x_a < x < x_a$ đường chuyển đổi $-z_b < z < z_b$ có độ nghiêng và thường không ổn định. Do đó mặc

dù khi $-x_a < x < x_a$, mỗi trị số của x tương ứng với ba trị số của z nhưng chỉ có hai trị số $+z_b$ và $-z_b$ tương ứng với trạng thái ổn định nên đặc tính ở hình 1.10b cũng được xem như ở hình 1.10a. Sự tương đương ấy được sử dụng để phân tích các hệ rơle.



Hình 1.10

1.3.3.2. Khâu rơle ba vị trí có trễ

Khi tính đến sự khác nhau của điện áp vào, đặc tính của rơle ba vị trí có tính chất khác nhau. Ví dụ nếu chuyển đổi từ z = 0 đến $z = z_b$ xảy ra khi $x = x_a$ thì khi trở về lại xảy ra khi $x = x_b$ như ở hình 1.10d.

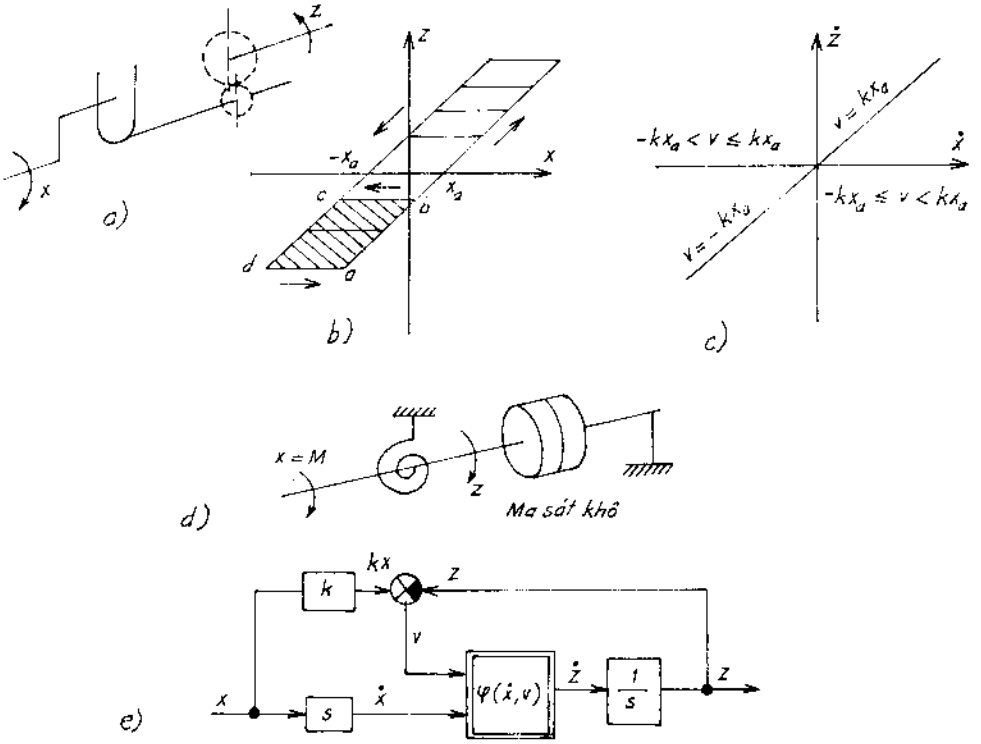
$$z = \begin{cases} z_b \text{signx} & \text{khi } |x| > x_b \\ 0 & \text{khi } |x| < x_a \end{cases} \qquad (1\text{-}10)$$

ở khoảng $x_b < |x| < x_a$, z có hai trị số. Nếu rơle được mắc hồi tiếp bởi khuếch đại có vùng kém nhạy và bão-hòa (như ở hình 1.6a, thì đặc tính như ở hình 1.10e. Để có đặc tính như ở hình 1.10d có thể dùng sơ đồ điện như ở hình 1.10c gồm hai rơle điện từ R_1 và R_2 đấu qua hai chỉnh lưu $Đ_1$ và $Đ_2$. Các tiếp điểm của rơle và R_1 và R_2 đóng mạch giữa nguồn điện áp E_b sao cho điện áp z có trị số $-z_b$ ($-E_b$) bằng không hay $+z_b$ ($+E_b$) tùy thuộc vào trị số của x như ở hình 1.10d.

1.3.4. CÁC KHÂU CÓ ĐẶC TÍNH ĐA TRỊ

1.3.4.1. Khâu kiểu khe hở

Dạng phi tuyến thường gặp ở các hệ truyền động cơ khí là khe hở. Ở hình 1.4 với khâu có vùng kém nhạy nếu không có lò xo để trả về vị trí không sẽ chỉ còn đơn thuần là khâu kiểu khe hở như ở hình 1.11.



Hình 1.11

Mối liên hệ giữa vị trí trục dẫn x và trục bị dẫn z không đơn trị. Mỗi vị trí của x tương ứng với nhiều vị trí của z nằm trong giới hạn $k(x - x_a) \leq z \leq k(x + x_a)$ tùy thuộc vào vị trí cực đại hay cực tiểu của z trước đó.

Đặc tính khâu khe hở được mô tả như sau :

$$z = \begin{cases} k\dot{x} \begin{cases} \text{khi } \dot{x} > 0 \text{ và } v = kx_a \ ; \\ \text{khi } \dot{x} < 0 \text{ và } v = -kx_a \ ; \end{cases} \\ 0 \begin{cases} \text{khi } \dot{x} > 0 \text{ và } -kx_a \leq v < kx_a \ ; \\ \text{khi } \dot{x} < 0 \text{ và } -kx_a < v \leq kx_a. \end{cases} \end{cases} \qquad (1\text{-}11)$$

Các hệ cơ khí có ma sát khô cũng có dạng đặc tính kiểu khe hở như ở hình 1.11d.

Mômen M được cân bằng bởi mô men của lò xo αz (α– hệ số tỷ lệ) và mômen ma sát khô $\pm x_a$ mà dấu tùy thuộc vào $\dot{z}$. Ở hệ này lượng vào là mômen quay x = M và lượng ra z là góc quay của trục :

$$x = M = \alpha z \pm x_a$$

với $k = 1/\alpha$:

$$z = k(x \pm x_a) \qquad (1\text{–}12)$$

tương ứng với hình 1.11b và hệ phương trình (1.11). Ở đây :

$$dz/dx = 0 \text{ khi } |x - \alpha z| < x_a \qquad (1\text{–}13)$$

Nếu dùng khâu phi tuyến $\varphi(x, v)$ để biến đổi tín hiệu x và v thành $\dot{z}$ thì khâu kiểu khe hở có sơ đồ khối như ở hình 1.11e.

1.3.4.2. Khâu kiểu gối tì

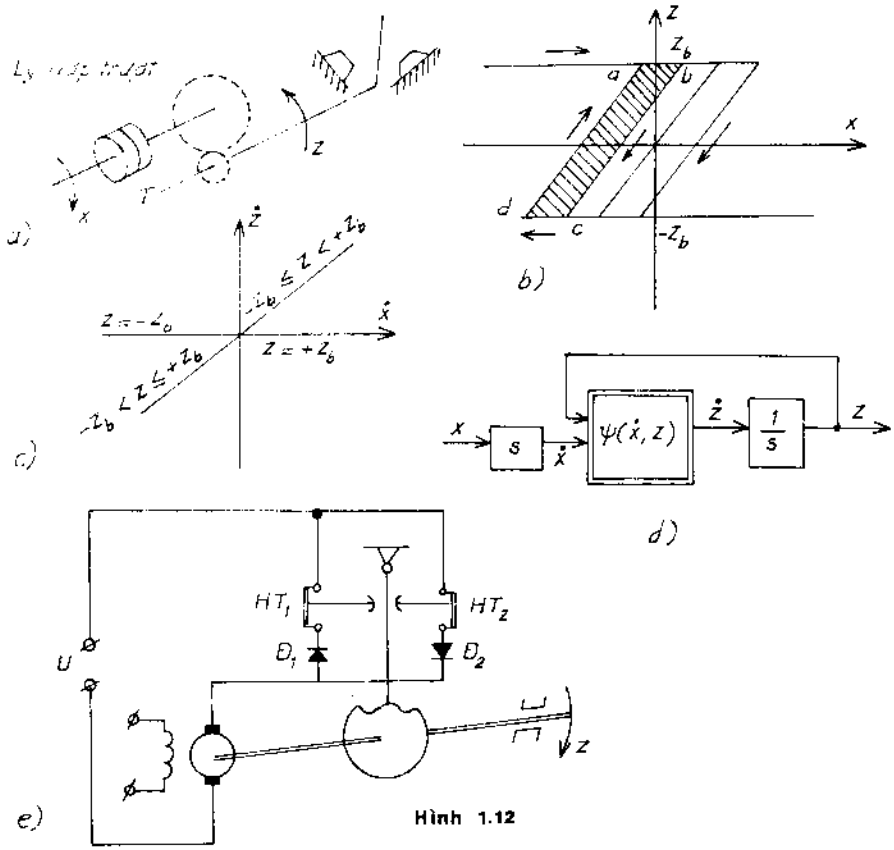
Nếu thay lò xo ở khâu hạn chế (hình 1.5b) bằng bộ ly hợp ma sát trượt (hình 1.12a) thì có khâu kiểu gối tì. Trong hệ cơ khí thường có những bộ phận mà chuyển động bị giới hạn cả hai hướng khi bộ phận dẫn động chuyển động không giới hạn. Ở hình 1.12a khi bị giới hạn bởi gối tì thì chuyển động của x vẫn tiếp tục do chế độ trượt ở bộ ly hợp T khi mômen vượt quá giới hạn ma sát. Nếu thay đổi hướng chuyển động của trục chủ đạo, bộ ly hợp T lại làm việc và hai trục liên kết cơ học với nhau.

Mỗi vị trí của trục dẫn x tương ứng với nhiều vị trí của trục bị dẫn trong giới hạn $-z_b \leqslant z \leqslant z_b$ và đặc tính của khâu kiểu gối tì có dạng :

$$\dot{z} = \begin{cases} k\dot{x} & \begin{cases} \text{khi } \dot{x} > 0 \text{ và } -zb \leqslant z < zb\ ; \\ \text{khi } \dot{x} < 0 \text{ và } -zb < z \leqslant zb\ ; \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} \text{khi } \dot{x} > 0 \text{ và } z = zb\ ; \\ \text{khi } \dot{x} < 0 \text{ và } z = -zb. \end{cases} \end{cases} \qquad (1\text{–}14)$$

Mối liên hệ $\dot{z}$ và $\dot{x}$ theo (1–14) như ở hình 1.12c. Sơ đồ cấu trúc như ở hình 1.12d.

Có thể xem mô hình của động cơ lái có tiếp điểm hành trình ở mạch phản ứng như ở hình 1.12e là mô hình của khâu kiểu gối tì. Khi



Hình 1.12

đóng mạch phần ứng của động cơ bởi công tắc hành trình HT_1 và điốt $Đ_1$, tốc độ động cơ $\dot{z}$ tỷ lệ với điện áp u, nghĩa là $\dot{z} = ku$. Khi trục động cơ quay đến điểm tỳ, tiếp điểm HT_2 mở và $z = 0$. Nếu động cơ dừng chính xác thì các mối quan hệ $\dot{u} = \dot{x}$ và $\dot{z}$ (hình 1.2c) và hệ ở (hình 1.2e) mô tả khâu phi tuyến kiểu gối tì.

So sánh đặc tuyến các khâu kiểu khe hở và gối tì ta đều thấy rằng khi thay đổi có chu kỳ biến đổi x sẽ dẫn đến biến đổi có chu kỳ của z và trên đặc tính z(x), mối quan hệ ấy là đường khép kín. Có điều là đặc tính kiểu khe hở (hình 1.11b) cũng như đặc tính rơle có trễ (hình 1.10a) thì đường cong ngược chiều kim đồng hồ, ứng với :

$$\oint z dx < 0 . \qquad (1\text{-}15)$$

còn đặc tính kiểu gối tì (hình 1.12b) cùng chiều kim đồng hồ, ứng với

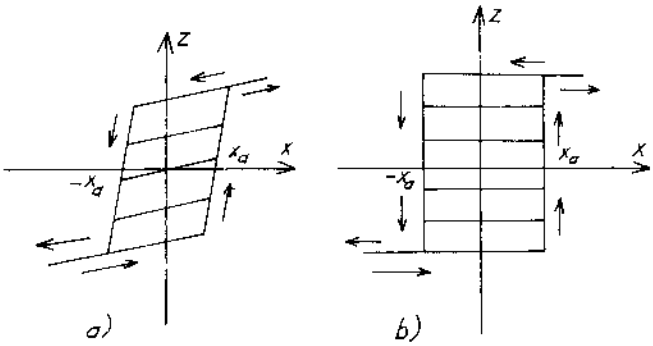
$$\oint z dx > 0 . \qquad (1\text{-}16)$$

Với cả hai dạng đặc tính này, khi hệ số khuếch đại lớn thì đặc tính càng gần với dạng hình chữ nhật.

1.3.4.3. Khâu kiểu từ trễ

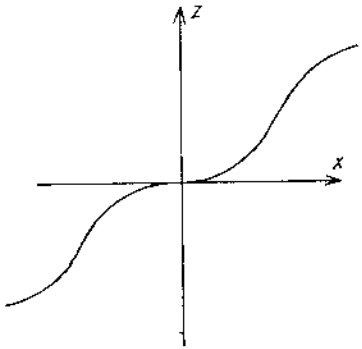
Khi khảo sát các bộ nhớ từ tính, ta thấy lá trễ có dạng những đường cong tuyến tính từng đoạn và khép kín như ở hình 1.13a. Đặc tính có thể được mô tả bởi hệ phương trình :

$$\left.\begin{aligned} z &= \mu_1(x \pm x_a) \; ; \\ z &= \mu_2 x + c \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}17)$$

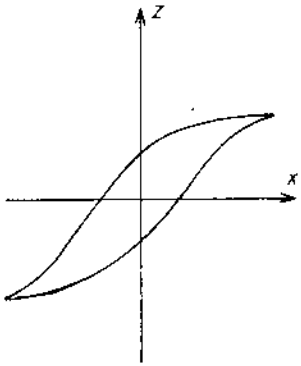


Hình 1.13

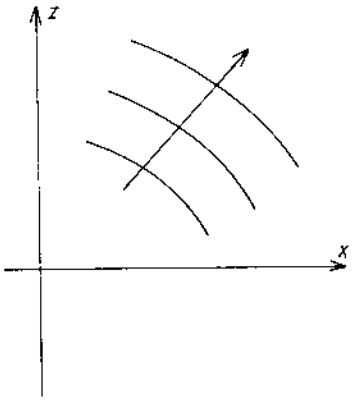
mà $-z_b < c < z_b$ còn μ_1, μ_2 là các hệ số hằng. Bên trong lá trễ, tùy thuộc điều kiện đầu, z có thể có nhiều trị số khác nhau trong miền từ $z = \mu_2 x - z_b$ đến $z = \mu_2 x + z_b$. Khi $\mu_1 \to \infty$ và $\mu_2 \to 0$ lá trễ có dạng



Hình 1.14



Hình 1.15



Hình 1.16

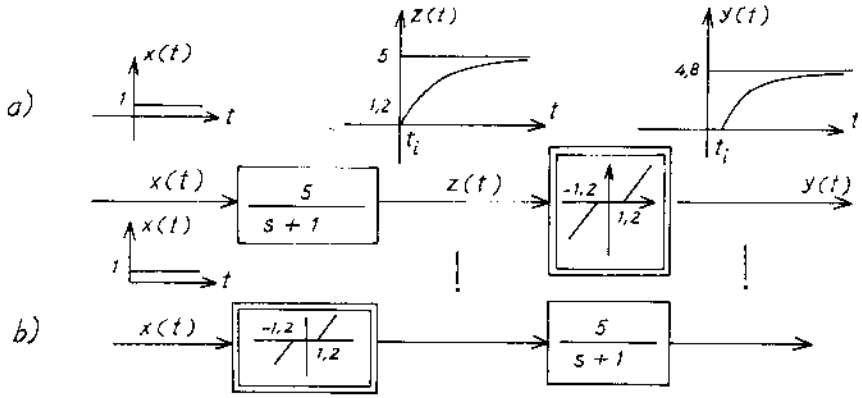
chữ nhật như ở hình 1.13b. Đặc tính này khác với đặc tính kiểu khe hở khi $k \to \infty$ là giới hạn của z từ $-z_b$ đến $+z_b$.

Trên đây chỉ là những khâu điển hình với đặc tính phi tuyến dạng tuyến tính hay được tuyến tính hóa từng đoạn thuận tiện cho việc khảo sát. Trong thực tế thường gặp những khâu như khuếch đại phi tuyến (hình 1.14), khâu lá trễ (hình 1.15), hay dạng bất kỳ (như đặc tính cơ của động cơ xoay chiều ở hình 1.16) và những dạng phi tuyến khác.

1.4. BIẾN ĐỔI SƠ ĐỒ CẤU TRÚC HỆ PHI TUYẾN

Trước tiên ta hãy xét tính chất không tuân theo nguyên lý xếp chồng ở hệ phi tuyến bằng ví dụ sau : Khâu phi tuyến có vùng kém nhạy $x_a = \pm 1{,}2$ V và hệ số khuếch đại $k = 1$. Khâu tuyến tính có hàm truyền đạt $W(s) = \dfrac{5}{s+1}$.

Khi đặt khâu tuyến tính trước khâu phi tuyến, ta có đáp ứng đối với tín hiệu vào bậc thang đơn vị 1 V như ở hình 1.17a. Ngược lại nếu đặt khâu phi tuyến trước khâu tuyến tính, biên độ tín hiệu vào 1 V là quá bé chưa vượt được ngưỡng của khâu phi tuyến $x_a = \pm 1{,}2$ V để có tín hiệu ra nên cả hai khâu đều không cho đáp ứng. Như vậy ở hệ phi tuyến không thể hoán vị khâu phi tuyến tính với khâu tuyến tính động học. Ngoại lệ là trường hợp khâu tuyến tính là khâu trễ.



Hình 1.17

Tuy nhiên để đơn giản khi khảo sát, phân tích, vẫn tồn tại những quy tắc nhất định.

Khi khảo sát tĩnh các hệ phi tuyến, các tín hiệu x, z không phụ thuộc thời gian còn khâu tuyến tính được xem như khâu tỷ lệ W(0). Khi khảo sát, các khâu đều được định hướng và việc nối chúng với nhau không làm thay đổi tính chất của chúng.

1.4.1. NỐI TIẾP CÁC KHÂU PHI TUYẾN

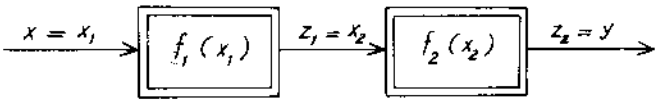
Cũng như các khâu tuyến tính, khi nối tiếp, đầu ra của khâu này là đầu vào của khâu sau (hình 1.18) :

$$x_{i+1} = z_i \qquad (1\text{-}18)$$

Vì $z_i = f_i(x_i)$ nên :

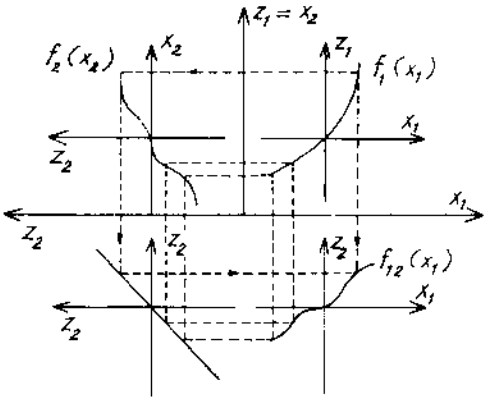
$$x_{i+1} = f_i(x_i) \qquad (1\text{-}19)$$

Như vậy giải n phương trình dạng (1-19) ta có hàm phi tuyến $z(x) = z_n(x_1)$ của n khâu nối tiếp.



Hình 1.18

Xây dựng đồ thị $f_{12}(x_1)$ của hai khâu phi tuyến $f_1(x_1)$ và $f_2(x_2)$ như ở hình 1.19. Khi xây dựng, dùng phần tử thứ ba làm trung gian bằng đường thẳng $z_2(z_2)$, sẽ đơn giản hóa việc chuyển từ trục z_2 ở đặc tính $z_2(x_2)$ sang đặc tính $z_2(x_1)$. Bằng cách đó, sau n lần ta có đặc tính $z_n(x_1) = f_{1n}(x_1)$. Trong thực tế người ta đi đến



Hình 1.19

kết luận là trong nhiều trường hợp đặc tính cuối cùng sẽ thay đổi nhiều và có khi trở nên đơn giản : Hai khâu nghịch đảo nhau nối tiếp nhau sẽ tương đương với một khâu tuyến tính có hệ số khuếch đại bằng 1 :

$$f^{-1}[f(x_1)] = x_1 \qquad (1\text{-}20)$$

Trường hợp này có thể hoán vị chúng với nhau và chỉ đúng khi đặc tính phi tuyến của mỗi khâu là đơn điệu và không có đoạn thẳng nằm ngang hay thẳng đứng.

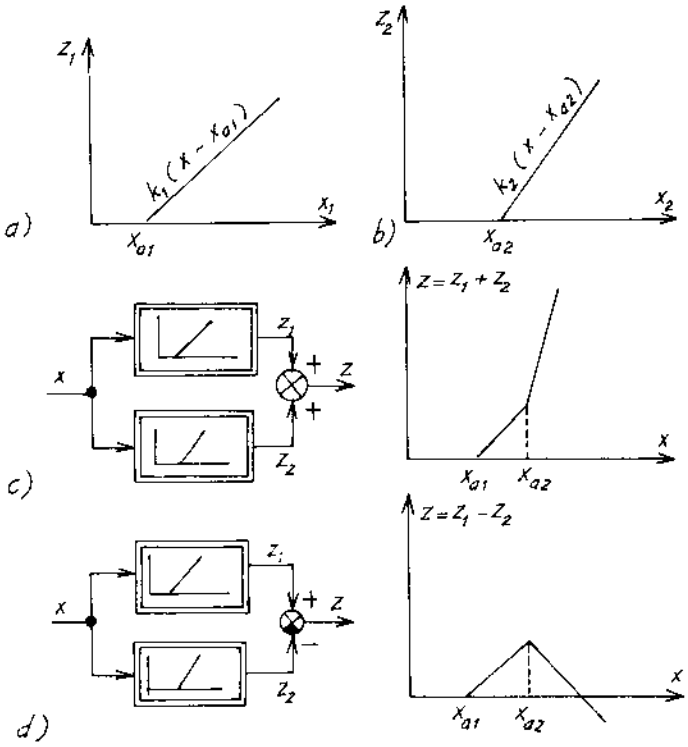
1.4.2. NỐI SONG SONG CÁC KHÂU PHI TUYẾN

Nếu nối song song n khâu với nhau thì tín hiệu vào :

$$x = x_1 = x_2 = \dots = x_n \qquad (1\text{-}21)$$

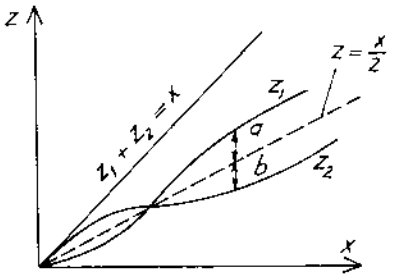
còn tín hiệu ra :

$$z = f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \qquad (1\text{-}22)$$



Hình 1.20

Như vậy đặc tính của n khâu phi tuyến nối song song có được bằng cách cong tọa độ các đặc tính phi tuyến thành phần. Ở hình 1.20,a, b là đặc tính phi tuyến của hai khâu $z_1(x_1)$ và $z_2(x_2)$ còn hình 1.20,c, d là sơ đồ khối và đặc tính tương ứng. Khi nối song song hai khâu phi tuyến, có thể có kết quả là một khâu tuyến tính với hệ số khuếch đại bằng 1 gọi là *khâu bổ sung cho nhau* :



Hình 1.21

$$f_1(x) + f_2(x) = x \qquad (1\text{–}23)$$

hay
$$f_1(x) - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - f_2(x) \qquad (1\text{–}24)$$

Ở hình 1.21, điều kiện (1–24) có được nếu a = b. Đó là điều kiện *đẳng cách* theo trục z đối với đường thẳng z = x/2.

1.4.3. MẮC NGƯỢC CÁC KHÂU PHI TUYẾN

Ttrường hợp hai khâu phi tuyến mắc ngược nhau như ở hình 1.22, phương trình đóng mạch có dạng :

$$x_1 = x \ (\pm)\ z_2 \qquad (1\text{–}25)$$

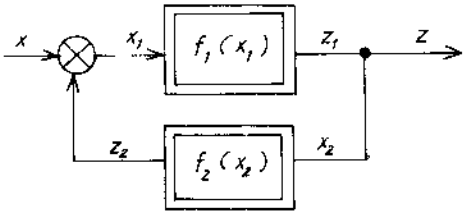
dấu (–) ứng với hồi tiếp âm. Vì :

$$z = z_1 = x_2 \qquad (1\text{–}26)$$

nên từ hai phương trình trên :

$$x = f_1^{-1}(z)\ (\pm)\ f_2(z) \qquad (1\text{–}27)$$

Ở biểu thức (1–27) dấu (+) ứng với hồi tiếp âm.

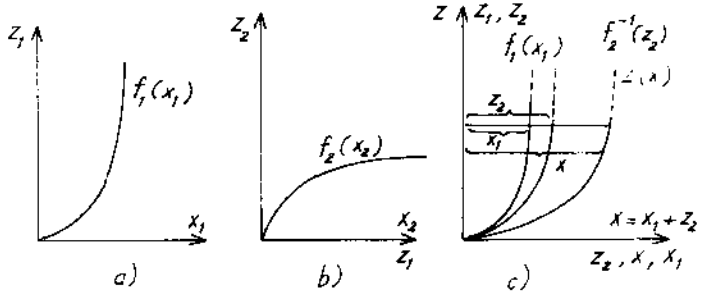


Hình 1.22

Nếu đặc tính $f_1(x_1)$ và $f_2(x_2)$ như ở hình 1.23,a, b, để có $z(\alpha)$ cần xây dựng $f_1(x_1 = z(x_1)$, $f_2^{-1}(z_2) = z(z_2)$, sau đó cộng đại số theo hoành các đại lượng ấy với nhau như ở hình 1.23c.

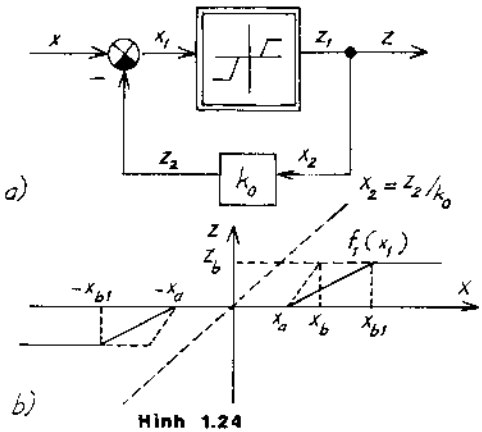
Ví dụ 1–1.

Đặc tính phi tuyến $z_1 = f_1(x_1)$ có dạng là một khâu hạn chế có vùng kém nhạy với hồi tiếp âm (hình 1.24a) và dương (hình 1.25a) bằng hệ số khuếch đại k_0. Hãy vẽ đặc tính của hệ cho hai trường hợp trên.

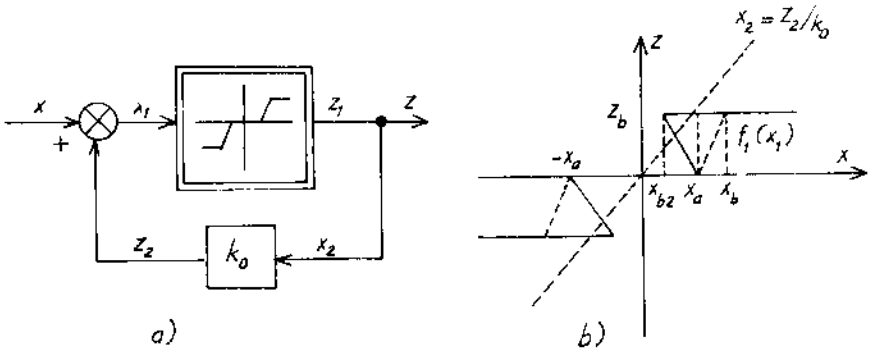


Hình 1.23

Đặc tính hồi tiếp là tuyến tính $z_2 = k_0x_2$ hay $x_2 = z^2/k_0$. Trong trường hợp hồi tiếp âm, đặc tính phi tuyến chung là đơn trị, có hạn chế và vùng kém nhạy, phạm vi tuyến tính được mở rộng từ $x_b - x_a$ đến $x_{b1} - x_a$ với $x_{b1} = x_b + z_bk_0$. Trường hợp thứ hai (hình 1.25a), đặc tính chung với $k_0z_b > x_b - x_a$ sẽ đa trị và giống với đặc tính của rơle ba vị trí có trễ (hình 1.10e). Độ rộng của lá trễ là $x_a - x_{b2} = x_a + k_0z_b - x_b$.



Hình 1.24



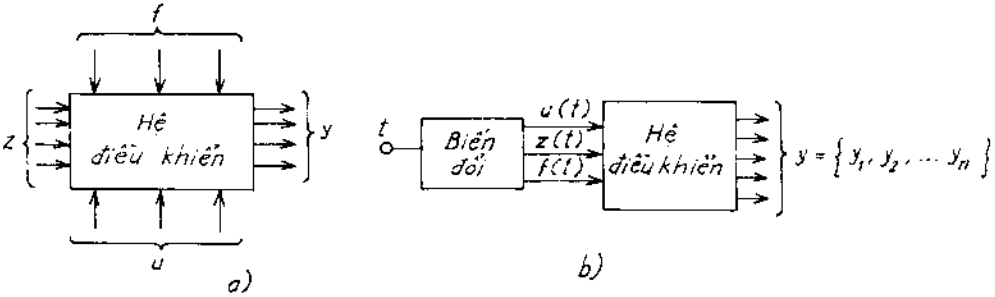
Hình 1.25

Chương 2
TUYẾN TÍNH HÓA

2.1. PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHI TUYẾN

Hệ động học là những hệ vật lý mà hành vi của chúng theo thời gian được mô tả bằng các phương trình vi phân :

$$\varphi_1(y_1\ ;\ dy_1/dt\ ;\ldots;\ d^r y_1/dt^r\ ;\ y_2\ ;\ dy_2/dt\ ;\ldots;\ d^s y_2/dt^s\ ;\ \ldots\ ;\ y_n\ ;\ dy_n/dt\ ;\ldots\ ;\ d^p y_n/dt^p\ ;\ t) = 0 \qquad (2\text{-}1)$$



Hình 2.1

Hệ điều khiển tự động có thể xem như đối tượng (hình 2.1a) mà biến được điều khiển y_1, y_2, ..., y_n liên hệ với tác động từ ngoài – các tín hiệu điều khiển $\mathbf{u} = (u_1\ ...,\ u_n)$ và nhiễu kiểm soát được (tải) $\mathbf{z}$ $(z_1,\ ...,\ z_m)$ và không kiểm soát được $\mathbf{f} = (f_1,\ ...,\ f_k)$ bởi hệ phương trình vi phân bậc n. Vì tác động từ ngoài $\mathbf{u}$, $\mathbf{z}$ và $\mathbf{f}$ là xác định trong những trường hợp cụ thể, hệ điều khiển thỏa mãn hệ phương trình (2–1). Nói chung hệ có thông số rải cũng có thể đưa về dạng trên nên (2–1) là hệ phương trình tổng quát.

Hệ phương trình (2–1) có thể đưa về dạng vi phân bậc một tương đương :

$$\varphi_j(dy_j/dt\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ldots;\ y_n\ ;\ t) = 0\ ;\ j = 1,\ 2,\ldots,n \qquad (2\text{-}2)$$

mà số phương trình $n = r + s + \ldots + p$ bằng tổng của bậc các phương trình n biến được điều khiển. Khái niệm này được thể hiện tương ứng

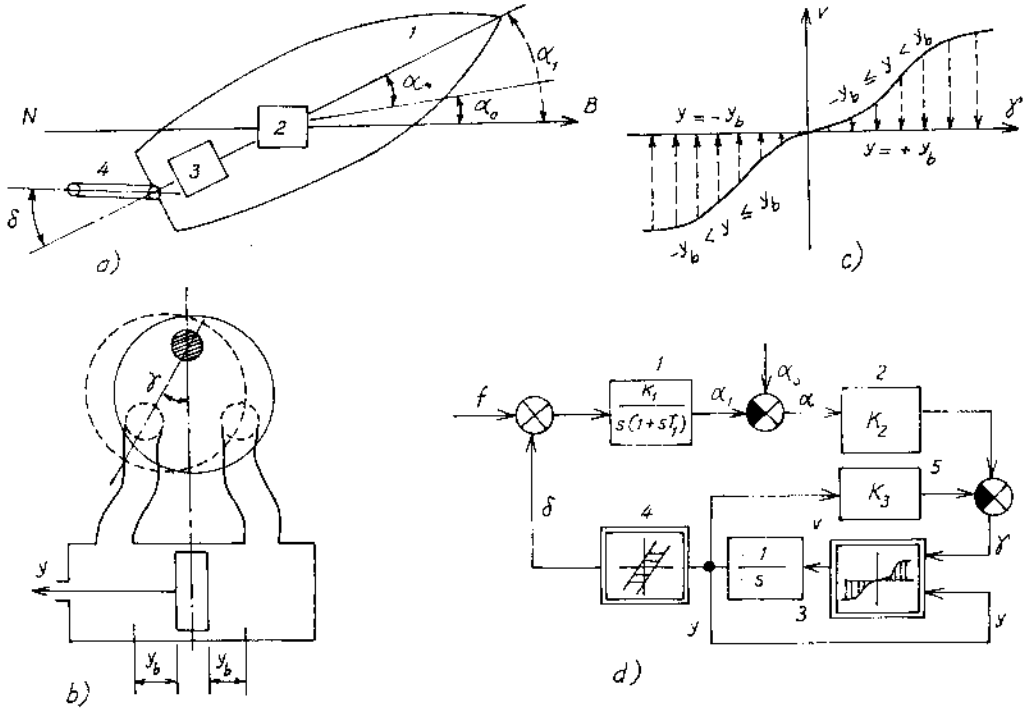
với hình 2.1b. Hệ phương trình (2-2) có thể có được từ mô tả toán học các phần tử trong hệ tương ứng với sơ đồ cấu trúc.

Hệ phương trình (2-2) thường đưa về dạng Cauchy :

$$\dot{y}_j = dy_j/dt = f_j(y_1 ; y_2 ;...; y_j ;... y_n ; t). \qquad (2\text{-}3)$$

Ví dụ 2-1.

Để ổn định hướng lái tàu thủy, ngư lôi hay thiết bị bay người ta dùng hệ điều khiển tự động lái giữ cho hướng không thay đổi. Sơ đồ giản đơn như ở hình 2.2a. Đối tượng là tàu thủy *1* có trục tạo thành góc α so với hướng α_0 do con quay *2* xác định chênh lệch về hướng $\alpha_0 - \alpha_1$ tác động vào khuếch đại của la bàn con quay đến thiết bị điều khiển lái *3* để quay lái *4* một góc δ.



Hình 2.2

Ở hình 2.2b có sơ đồ truyền động thiết bị khí nén điều khiển lưu lượng không khí vào xilanh bằng cách quay nắp một góc γ tạo nên sự sụt áp và chuyển động y của pittông ; chuyển động của pittông được giới hạn bởi ụ hạn chế vị trí $-y_b \leqslant y \leqslant y_b$. Tốc độ chuyển động của pittông $v = dy/dt$ và vị trí của nắp đậy γ có quan hệ như ở hình 2.2c. Đặc tính phi tuyến là khâu có vùng kém nhạy và bão hòa (dạng hình 1.6a), tuy

nhiên khi chạm vào ụ hạn chế, pittông dừng, dù γ có tiếp tục tăng thì tốc độ cũng sẽ bằng không. Như vậy, tốc độ chuyển động của pittông là hàm hai biến $v(\gamma, y)$ và mô tả bởi :

$$v = \begin{cases} \varphi(\gamma) \begin{cases} \text{khi } -y_b \leq y < y_b, & \text{với } \gamma > 0; \\ \text{khi } -y_b < y \leq y_b, & \text{với } \gamma < 0; \end{cases} \\ 0 \begin{cases} \text{khi } y = +y_b, & \text{với } \gamma > 0; \\ \text{khi } y = -y_b, & \text{với } \gamma < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2\text{-}4)$$

Chuyển đổi từ đường cong $\varphi(\gamma)$ sang đường thẳng $v = 0$ xảy ra ngay tức khắc khi $y = \pm y_b$ ứng với đường nét đứt ở hình 2.2c. Trên hình 2.2d còn có đặc tính phi tuyến kiểu khe hở với bánh lái. Đối tượng là một khâu có quán tính và tích phân còn khuếch đại con quay *2* và hồi tiếp vị trí *5* là hai khâu khuếch đại k_2 và k_3. Hai khâu phi tuyến trong hệ là *4* và *3*. Nhiễu ngẫu nhiên quy về góc quay của bánh lái ký hiệu là f(t). Từ phương trình vi phân của các phần tử tuyến tính và phi tuyến ta có hệ phương trình :

Đặt $y_1 = \alpha_1$; $y_2 = \dot{\alpha}_1 = \dfrac{d\alpha_1}{dt}$; $y_3 = y$. Phương trình của đối tượng :

$$T_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \frac{d\alpha_1}{dt} = k_1\left[f(t) + \delta(y)\right].$$

Xuất phát từ sơ đồ khối ở hình 2.2d, ta có :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_2); \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_2, y_3, t); \\ \frac{dy_3}{dt} &= f_3(y_1, y_3, t). \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}5)$$

mà $$f_1(y_2) = y_2 \; ; \; f_2(y_2, y_3, t) = \frac{1}{T_1}\left\{-y_2 + k_1\left[f(t) + \delta(y_3)\right]\right\};$$

$$f_3(y_1, y_3, t) = v\left\{-k_2\left[y_1 - \alpha_o(t)\right] - k_3 y_3, y_3\right\} \; ; \; n = 3.$$

Ví dụ 2-2.

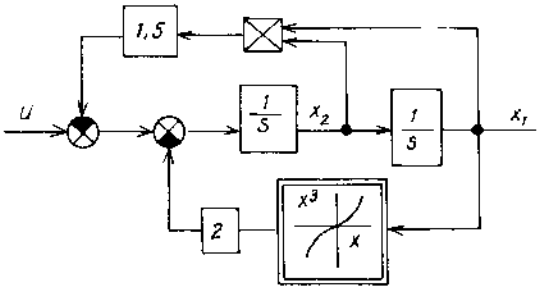
Thay vì dùng y, dùng biến trạng thái x và biến điều khiển u đối với hai phương trình sau :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \; ; \\ \dot{x}_2 &= -2x_1^3 - 1{,}5\,x_1x_2 + u \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}6)$$

Đưa về dạng tổng quát :

$$\dot{x} = Ax = bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x_1^2 - 1{,}5x_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \; . \qquad (2\text{-}7)$$

Các hệ phương trình tương ứng với sơ đồ khối như ở hình 2.3. Như ở phương trình (2-7), ở dạng phương trình trạng thái, nếu một vài (hay tất cả) các ma trận A, B, C, D có chứa hàm của trạng thái theo thời gian của tín hiệu ra và/hay của tín hiệu vào, hệ trở nên phi tuyến.



Hình 2.3

2.2. TUYẾN TÍNH HÓA

Tuyến tính hóa là phương pháp xấp xỉ những phương trình vi phân không tuyến tính bằng những phương trình tuyến tính. Vì các phương pháp tổng hợp và phân tích các hệ tuyến tính rất phong phú nên biện pháp đầu tiên để tổng hợp và phân tích hệ phi tuyến là biến nó thành tuyến tính. Như người ta thường nói : "Nếu chỉ có một công cụ duy nhất là cái búa, hãy làm cho mọi bài toán giống như những cái đinh".

Điều kiện đặt ra khi tuyến tính hóa là mô hình tuyến tính ấy làm việc ở lân cận "điểm làm việc" hay "trạng thái cân bằng". Mức độ thay đổi quanh điểm làm việc của các biến tùy thuộc vào hai yếu tố : một là bản chất của tính phi tuyến (mức độ chênh lệch so với đặc tính tuyến tính) và hai là độ chính xác tương đối mà ta mong muốn đối với mô hình với đối tượng thật.

Tuy nhiên việc dùng mô hình tuyến tính chính xác trong phạm vi thay đổi nhỏ của các biến có ý nghĩa thực tế. Nguyên nhân là nhiều hệ điều khiển tự động thực tế được thiết kế để duy trì một trạng thái cân bằng mong muốn. Lý do khác là ngay ở các hệ phi tuyến rõ rệt, những nhiễu loạn bé làm chệch khỏi nghiệm của phương trình phi tuyến thường có thể được mô tả bằng mô hình tuyến tính.

Chuỗi Taylor được viết dưới dạng chênh lệch quanh điểm làm việc và gồm có một chuỗi vô tận những thành phần tuyến tính, bậc hai, bậc ba v.v... Để thực hiện tuyến tính hóa, các thành phần từ bậc hai trở lên được xem như không đáng kể. Vậy, nếu f (x, y) là hàm của hai biến thì chuỗi Taylor sẽ gồm các thành phần là đạo hàm riêng của f theo x và y :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0,y_0}\frac{(x - x_0)^2}{2!} +$$

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{x_0,y_0}\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \ldots + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0,y_0}\frac{(y - y_0)}{2!} +$$

$$+ \left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{x_0,y_0}\frac{(y - y_0)^3}{3!} + \ldots \qquad (2\text{-}8)$$

Trạng thái cân bằng của hệ được xác định bởi các biến x_0, y_0.

Thành phần thứ nhất của vế phải là đại lượng của f tại điểm làm việc (x_0, y_0) nên là đại lượng hằng ; còn các đạo hàm riêng ứng với tang của f tại điểm x_0.

Nếu chỉ tính đến thành phần bậc một thì :

$$\left[f(x, y) - f(x_0, y_0)\right] \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}(y - y_0) \quad . \qquad (2\text{-}9)$$

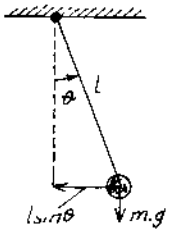
Ví dụ 2 –3.

Một quả lắc như ở hình 2.4, có thể chịu ảnh hưởng của hai loại nhiễu tác động – độ lắc do góc lệch ban đầu của dây treo l và tốc độ góc ban đầu q, với g = 9,81 $m.s^{-2}$ là tốc độ trọng trường, m là trọng khối. Định luật Newton thứ hai được mô tả bằng phương trình :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m.g.l\sin\theta \qquad (2\text{-}10)$$

Ở đây $J = m.l^2$ là mômen quán tính. Do đó :

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m.g}{l}\sin\theta = 0 . \qquad (2\text{-}11)$$



Hình 2.4

Thành phần $\sin\theta$ là phi tuyến, được tuyến tính hóa với giả thiết là chênh lệch quanh điểm làm việc bé. Nếu chọn điểm cân bằng là $\theta = 0$ rad thì chuỗi Taylor có dạng :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^2}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} . \qquad (2\text{-}12)$$

Với chênh lệch bé, $\sin\theta = \theta$, có nghĩa là với góc θ bé được đo bằng radian, thì sin của chính nó cũng bằng nó ; điều đó có thể kiểm tra bằng cách đo chính xác. Mô hình này cho sai số khoảng 10% tính về thời gian mà góc θ đạt trị số $\pm\ \pi$.

Như vậy, mô hình hệ (2-11) được tuyến tính hóa là :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta \approx 0 . \qquad (2\text{-}13)$$

Trong trường hợp hệ được mô tả bằng phương trình trạng thái và hai biến là x và u như ở ví dụ 2-2 :

$$\dot{x} = f(x, u). \qquad (2\text{-}14)$$

Điểm làm việc được xác định bởi vectơ trạng thái x_o và vectơ đầu vào u_o. Chú ý rằng điểm làm việc có thể là một điểm trong không gian trạng thái, còn u_o là không đổi ở các hệ điều chỉnh, hay đôi khi là quỹ đạo chuẩn $x_o(t)$ và $u_o(t)$ biến đổi theo t ở các hệ tùy động.

Trong trường hợp hệ (2-14) có n biến trạng thái và r biến đầu vào, mô hình của hệ sẽ là :

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 - \dot{x}_{10} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_0,u_0}(x_1 - x_{10}) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\bigg|_{x_0,u_0}(x_n - x_{n0}) + \\
&\quad + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\bigg|_{x_0,u_0}(u_1 - u_{10}) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial u_r}\bigg|_{x_0,u_0}(u_r - u_{r0}) ; \\
\dot{x}_2 - \dot{x}_{20} &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\bigg|_{x_0,u_0}(x_1 - x_{10}) + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\bigg|_{x_0,u_0}(x_n - x_{n0}) + \\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\bigg|_{x_0,u_0}(u_1 - u_{10}) + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial u_r}\bigg|_{x_0,u_0}(u_r - u_{r0}) ;
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}15)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\dot{x}_n - \dot{x}_{n0} = \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\bigg|_{x_0,u_0}(x_1 - x_{10}) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\bigg|_{x_0,u_0}(x_n - x_{n0}) + \\
&+ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\bigg|_{x_0,u_0}(u_1 - u_{10}) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial u_r}\bigg|_{x_0,u_0}(u_r - u_{r0})\ ;
\end{aligned}\right\} \quad (2-15)$$

Dùng dấu "*" để chỉ chênh lệch quanh trị số định mức (điểm làm việc) :

$$\dot{x}_i^* = \dot{x}_i - \dot{x}_{i0}\ ;\ x_i^* = x_i - x_{i0}\ ;\ u_i^* = u_i - u_{i0} \quad (2-16)$$

còn đạo hàm riêng quanh trị số định mức là :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\text{o} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\bigg|_{x_0,u_0} \quad \text{v.v} \ldots \quad (2-17)$$

Thay thế (2-16) và (2- 17) vào (2- 15) ta có :

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1^* &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\text{o}\, x_1^* + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\text{o}\, x_n^* + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\text{o}\, u_1^* + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial u_r}\text{o}\, u_r^*\ ;\\
\dot{x}_2^* &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\text{o}\, x_1^* + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\text{o}\, x_n^* + \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\text{o}\, u_1^* + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial u_r}\text{o}\, u_r^*\ ;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dot{x}_n^* &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\text{o}\, x_1^* + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\text{o}\, x_n^* + \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\text{o}\, u_1^* + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial u_r}\text{o}\, u_r^*\ .
\end{aligned}\right\} \quad (2-18)$$

Như vậy, có thể dùng ma trận Jacobian J_x và J_u mà các phần tử của chúng là hằng :

$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\text{o} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\text{o} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\text{o} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\text{o} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\text{o} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\text{o} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\text{o} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\text{o} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\text{o} \end{bmatrix}\ ;\ J_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\text{o} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\text{o} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r}\text{o} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}\text{o} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\text{o} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r}\text{o} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\text{o} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\text{o} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r}\text{o} \end{bmatrix}\ ; \quad (2-19)$$

Cuối cùng (2-18) có dạng :

$$\dot{x}^* = J_x x^* + J_u u^* \quad (2-20)$$

Phương trình (2–20) là mô hình trạng thái tuyến tính của hệ phi tuyến (2–14) : $\dot{x} = f(x, u)$ với chênh lệch bé (x^* và u^*) quanh điểm làm việc (x_0, u_0).

Phương trình đầu ra $y = Cx + Du$ nếu là tuyến tính (khi mỗi tín hiệu ra đơn giản là biến trạng thái của hệ) thì có thể dùng trực tiếp, còn nếu là phi tuyến thì tuyến tính hóa như phương pháp đã nói trên.

Ví dụ 2–4

Tuyến tính hóa phương trình (2–7) ở ví dụ 2–2 :

$$x_1 = f_1(x_1, x_2, u) = x_2 ;$$

$$x_2 = f_2(x_1, x_2, u) = -2x_1^3 - 1{,}5x_1x_2 + u.$$

Dùng ma trận Jacobian (2–19) ta có :

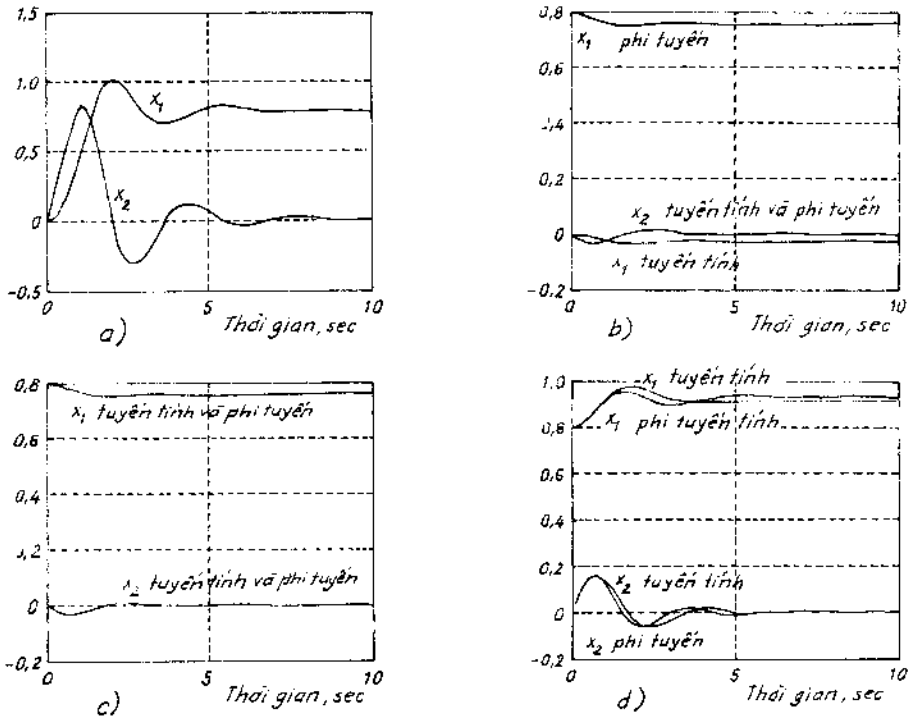
$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_o & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_o \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_o & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6x_{10}^2 - 1{,}5x_{20} & -1{,}5x_{10} \end{bmatrix} ; \qquad (2\text{–}21)$$

$$J_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}\Big|_o \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nếu đưa điều kiện đầu (x_0, u_0) vào (2–21) thì các ma trận trên sẽ là mô hình tuyến tính của hệ như (2–20) với điều kiện là chênh lệch khỏi điểm làm việc bé. Nếu mô hình hóa theo sơ đồ khối ở hình 2.2 theo một phương pháp nào đó (dùng SIMULINK kèm theo MATLAB, TUTSIM hay WINFACT) ta có được mô hình phi tuyến tính. Ở mục 3–6 sẽ đề cập đến vấn đề này.

Bây giờ cần xác định điểm làm việc của hệ phi tuyến trên. Ở mạch thuận của hình 2.3 có hai khâu tích phân. Ở điểm làm việc của trạng thái xác lập, đầu vào của các khâu tích phân bằng không. Với điều kiện ấy, mạch hồi tiếp ($1{,}5x_1x_2$) bằng không (vì x_2 phải bằng không). Với $u = 1$, trạng thái xác lập ở đầu ra tương ứng với điểm làm việc là $x_1 = 0{,}7937$ để đầu vào của khâu tích phân thứ nhất bằng không.

Như vậy $x_0 = [0{,}7937\ 0]^T$ và $u_0 = [0\ 1]$. Ứng với (2–20) và (2–21) ta có mô hình tuyến tính như sau :



Hình 2.5

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3,78 & -1,19 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^* \qquad (2\text{-}22)$$

Ở hình 2.5a là đáp ứng của hệ mô phỏng theo hình 2.3 với điều kiện đầu bằng không và u = 1. Trị số xác lập của hệ phi tuyến như đã xét trên.

Ở hình 2.4,b có trường hợp bậc thang bằng −0,1 cho mô hình tuyến tính hóa (2–20) với J_x và J_u tương ứng, so sánh với mô hình phi tuyến có bậc thang cũng bằng −0,1 và điều kiện đầu $[0,7937\ 0]^T$. Đáp ứng x_2 giống nhau còn x_1 có điều kiện làm việc khác nhau.

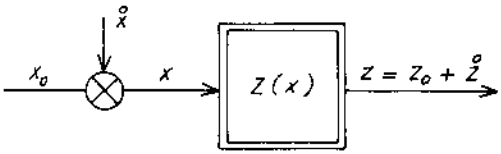
Để so sánh trực tiếp, điểm làm việc phải được cộng vào đáp ứng của mô hình tuyến tính như ở hình 2.5c. Hai đáp ứng x_1 và x_2 hầu như xấp xỉ nhau (mặc dù nếu dùng thang đo rộng hơn, sẽ có sự sai khác).

Việc chọn điểm làm việc càng sai khác trước, độ chính xác của mô hình tuyến tính càng giảm. Ví dụ, ở hình 2.5d dùng bậc thang +0,5 thì

các đặc tính x_1 và x_2 ở hai mô hình đều khác nhau. Việc sử dụng MATLAB để mô hình hóa rất tiện lợi. Ví dụ nếu dùng bậc thang âm càng xa điểm làm việc thì chất lượng mô hình tuyến tính càng kém bậc thang dương, còn nếu bỏ hồi tiếp x_1x_2 thì hệ mất ổn định và mang nhiều tính đặc trưng của hệ phi tuyến.

2.3. TUYẾN TÍNH HÓA RUNG

Một trong những phương pháp giản đơn để truyền tính hóa một số khâu phi tuyến như vùng kém nhạy, có khe hở là đưa vào đầu vào khâu phi tuyến tín hiệu nhiễu có chu kỳ và lọc nhiễu này ở đầu ra như ở hình 2.6.



Hình 2.6

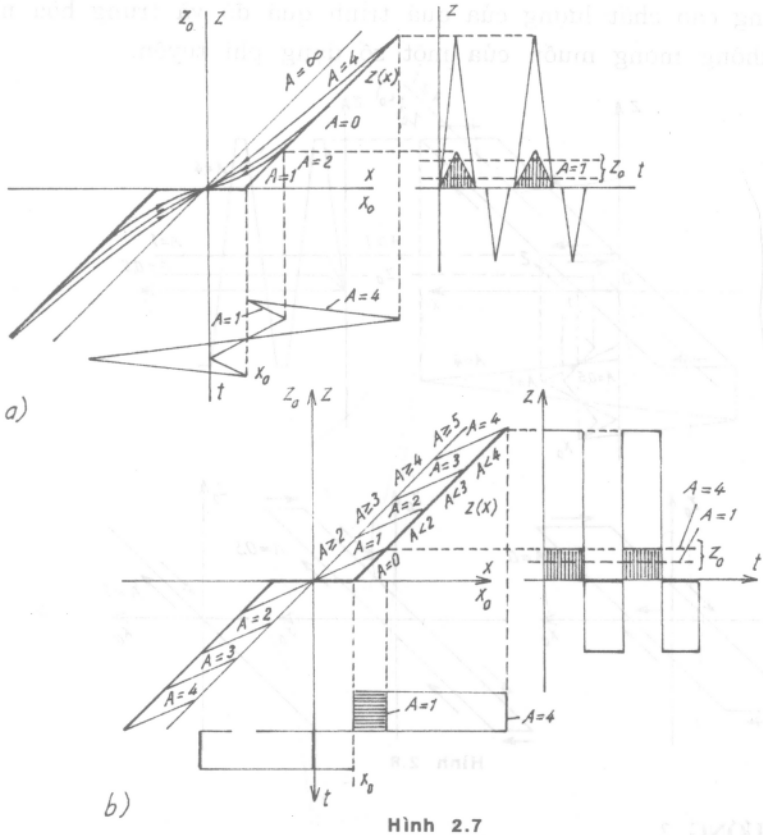
Ví dụ ở đầu vào x, ngoài thành phần biến đổi chậm x_0, thành phần biến đổi nhanh $\overset{o}{x}$ có chu kỳ sẽ tạo ở đầu ra khâu phi tuyến thành phần biến đổi chậm Z_0 và thành phần biến đổi nhanh $\overset{o}{Z}$. Vì nguyên tắc xếp chồng không tồn tại ở khâu phi tuyến cho nên $\overset{o}{x}$ ảnh hưởng đến quan hệ giữa x_0 và Z_0. Tác động của tín hiệu có chu kỳ tùy thuộc vào hình dạng của nó.

2.3.1. TRƯỜNG HỢP KHÂU PHI TUYẾN CÓ VÙNG KÉM NHẠY

Ở hình 2.7a có đặc tính phi tuyến Z(x), trùng với $Z_0(x_0)$ khi $\overset{o}{x} = 0$.

Khi tăng $\overset{o}{x}$, $Z_0(x_0)$ thay đổi và biên độ A càng lớn thì $Z_0(x_0)$ càng gần với đường thẳng. Khi $A \rightarrow \infty$, $Z_0(x_0)$ tiến đến đường thẳng qua gốc tọa độ.

Với thành phần biến đổi có dạng chữ nhật như ở hình 2.7b, khi biên độ n lần lớn hơn nửa vùng kém nhạy thì thành phần một chiều ở đầu ra sẽ tuyến tính với độ rộng bằng n – vùng kém nhạy.



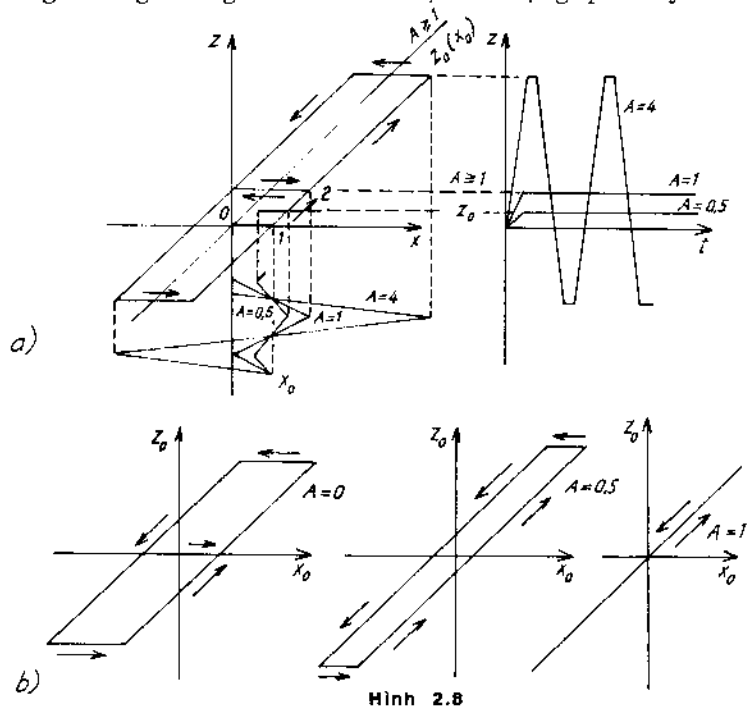
Hình 2.7

2.3.2. TRƯỜNG HỢP KHÂU PHI TUYẾN DẠNG KHE HỞ

Đối với khâu phi tuyến dạng khe hở, nếu dùng tín hiệu dạng răng cưa (hay chữ nhật) khi biên độ của chúng lớn hơn nửa khe hở thì tuyến tính hóa được bảo đảm.

Ở hình 2.8a có giải thích ảnh hưởng của biên độ dao động dạng răng cưa đối với đặc tính phi tuyến có khe hở và hình 2.8b là đặc tính $Z_0(x_0)$ với các biên độ khác nhau. Từ phân tích trên ta thấy thành phần biến đổi của tín hiệu vào làm giảm ảnh hưởng của tính phi tuyến ở khâu có vùng kém nhạy và dạng khe hở, còn với biên độ vào tương đối lớn có thể biến thành khâu tuyến tính – phương pháp này gọi là *tuyến tính hóa rung*. Đối với khâu phi tuyến dạng bão hòa và gối tì, phương pháp tuyến tính hóa rung làm tăng phạm vi tuyến tính đồng thời làm giảm hệ số khuếch đại trong vùng ấy. Phương pháp này có ứng dụng tốt ở các hệ có tự dao động bé. Dao động ổn định với biên độ bé trong hệ

phi tuyến nâng cao chất lượng của quá trình quá độ và trung hòa những ảnh hưởng không mong muốn của một số dạng phi tuyến.



Hình 2.8

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài tập 2–1. Theo định luật Bernoulli (Bécnuli) lưu lượng qua van q (m^3sec^{-1}) liên hệ với áp suất h (m) bởi phương trình :

$$q = C_d\sqrt{(2gh)}$$

mà g là gia tốc trọng trường, C_d (m^2) là hệ số xả. Xác định quan hệ tuyến tính hóa giữa q và h.

Đáp án : Đối với q, chuỗi Taylor quanh điểm làm việc h_0 là :

$$q\,|_h \approx q\,|_{h_0} + \frac{\partial q}{\partial h}\,|_{h_0}(h - h_0) = q\,|_{h_0} + \left(C_d\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\right)(h - h_0)$$

Vậy : $$q = \left(C_d\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\right)h \quad (\Delta h = 0,\ \Delta q = 0),$$

Bài tập 2–2 Tuyến tính hóa một tích có hai biến :

$$f(x, y) = xy.$$

Đáp án : $xy \approx x_0y_0 + y_0(x - x_0) + x_0(y - x_0)$.

Bài tập 2–3 Hệ điều khiển phi tuyến có sơ đồ khối như ở hình 2.9 có mối liên hệ vào ra của khâu phi tuyến bão hòa là :

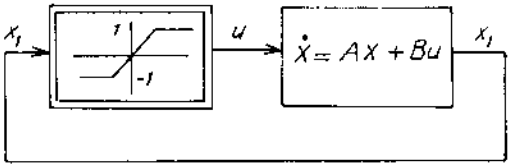
$$u(t) = (1 - e^{-K|x_1(t)|})\,\mathrm{sign}x_1(t)$$

với $$\mathrm{sign}x_1(t) = \begin{cases} +1 & x_1(t) > 0 \\ -1 & x_1(t) < 0 \end{cases}$$

và phương trình trạng thái :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)\ ; \qquad (2\text{–}23)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t). \qquad (2\text{–}24)$$



Hình 2.9

Đáp án :

$$\dot{x}_1^* = x_1^* - x_{10}^* = \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_2(t)}(x_2^* - x_{20}^*) = x_2^*\ ;$$

$$\dot{x}_2^* = x_2^* - x_{20}^* = \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_1(t)}(x_1^* - x_{10}^*) = Ke^{-K|x_{01}|}x_1^*\ ;$$

vậy $$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Ke^{-K|x_{01}|} & 0 \end{bmatrix} x^*.$$

Khi $x_{01} = 0$: $a = Ke^{-K|x_{01}|} = K$ và $\dot{x}_2^* = K\dot{x}_1$.

Nếu x_{01} lớn, điểm làm việc nằm trên vùng bão hòa.

Bài tập 2–4 Với bài tập 2–3 nhưng hệ phương trình (2–23) và (2–24) có dạng sau :

$$\dot{x}_1(t) = \frac{-1}{x_2^2(t)}\ ; \qquad (2\text{–}25)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)\,x_1(t). \qquad (2\text{–}26)$$

Hãy tuyến tính hóa quanh quỹ đạo định mức $[x_{01}(t), x_{02}(t)]$ với điều kiện đầu $x_1(0) = x_2(0) = 1$ và $u(t) = 0$.

Đáp án :

Lấy tích phân theo t phương trình (2–25) và (2–26) theo điều kiện đầu đã cho, có :

$$x_2(t) = x_2(0) = 1 \;;$$
$$x_1(t) = -t + 1.$$

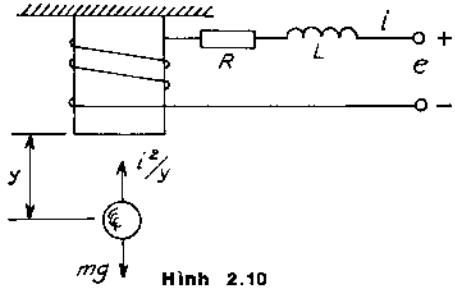
Vậy quỹ đạo định mức ứng với (2–25) và (2–26) là :

$$x_{01}(t) = -t + 1 \;;$$
$$x_{02}(t) = 1.$$

$$\frac{\partial f_1(t)}{\partial x_1(t)} = 0 \;;\; \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{2}{x_2^3} \;;\; \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_1(t)} = u(t) \;;\; \frac{\partial f_2(t)}{\partial u_1(t)} = x_1(t) \;.$$

Và
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1-t \end{bmatrix} u^*(t) \;. \qquad (2\text{–}27)$$

Như vậy tuyến tính hóa hệ phi tuyến có thể dẫn đến hệ tuyến tính có hệ số biến đổi theo thời gian.



Hình 2.10

Bài tập 2–5. Hệ điều khiển vị trí của viên bi sắt dùng nam châm như ở hình 2.10.

Hệ phương trình vi phân có dạng :

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = mg - \frac{i^2(t)}{y(t)} \;; \qquad (2\text{–}28)$$

$$e(t) = Ri(t) + \mathcal{L}\frac{di(t)}{dt} \;. \qquad (2\text{–}30)$$

với y (t) là vị trí viên bi, i là dòng điện qua cuộn dây. Hãy tuyến tính hóa hệ trên.

Đáp án :

Dùng biến trạng thái

$$x_1(t) = y(t) \;;\; x_2(t) = dy/dt \;;\; x_3(t) = i(t).$$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \;; \qquad (2\text{–}31)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{1}{m}\frac{x_3^2(t)}{x_1(t)} \;; \qquad (2\text{–}32)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{\mathcal{L}}x_3(t) + \frac{1}{\mathcal{L}}e(t) \;; \qquad (2\text{–}33)$$

Chọn điểm làm việc $y_0(t) = x_{01} = \text{const}$

$$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0 \; ; \tag{2-34}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0 \; . \tag{2-35}$$

Trị số định mức của i(t) có được bằng cách thay (2–35) vào (2–28):

$$i_0(t) = x_{03}(t) = \sqrt{mgx_{01}} \; .$$

Vậy, ứng với (2–20) có :

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{x_{03}^2}{mx_{01}^2} & 0 & \dfrac{-2x_{03}}{mx_{01}} \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{g}{x_{01}} & 0 & -2\left(\dfrac{g}{mx_{01}}\right)^{1/2} \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix} \tag{2-36}$$

$$J_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix} .$$

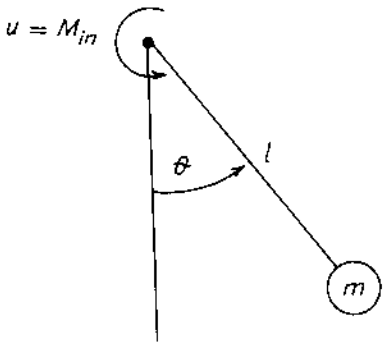
Bài tập 2–6. Hệ quả lắc như ở hình 2.11 nhưng tín hiệu vào là mômen Min. Hệ được mô tả bởi :

$$\dot{\omega} = f_1(\theta, \omega, M_{in}) = -b\omega - \Omega^2 \sin\theta + \frac{1}{ml^2} M_{in} \; ;$$

$$\dot{\theta} = f_2(\theta, \omega, M_{in}) = \omega. \tag{2-37}$$

với b là hệ số ma sát ; $\Omega = \sqrt{g/l}$ tần số dao động với điều kiện đầu $\theta \approx 0$.

Hãy tuyến tính hóa hệ trên với giả thiết rằng góc θ là đo được, mục tiêu là giữ cho con lắc thẳng đứng trong khi điểm quay phụ thuộc vào gia tốc ngang do mômen M_{in} tạo nên. Trạng thái làm việc định mức gần với góc quay và tốc độ góc bằng không.



Hình 2.11

Đáp án :

Chọn trạng thái :

$$x \equiv \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}$$

Ở lân cận điểm làm việc (ω_0, θ_0) ta có :

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega} = -b \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial \omega} = 1 \; ;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -\Omega^2 \cos\Omega_0 \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0 \; ;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial M_{in}} = \frac{1}{ml^2} \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial M_{in}} = 0 \; ;$$

Vậy : $$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} -b & -\Omega^2\cos\theta_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} \frac{1}{ml^2} \\ 0 \end{bmatrix} M_{in} \; ; \qquad (2\text{-}38)$$

$$y = [0 \;\; 1] \; x \, .$$

Với các thông số $ml^2 = 1$, $b = 0{,}25$, $\Omega^2 = 100$, $\omega_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ và chọn thời gian lấy mẫu T = 100 msec, ta có phương trình gián đoạn dạng :

$$x^*_{k+1} = \begin{bmatrix} 0{,}9925 & -0{,}9971 \\ 0{,}0100 & 0{,}9950 \end{bmatrix} x^*_k + \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} M^*_{in} \; ;$$

$$y = [0 \quad 1] \; x \; .$$

Bài tập 2-7. Hệ điều khiển ổ đĩa lazer như ở hình 2.11. Mômen tổng đối với tải có quán tính là :

$$M_n = M_{in} - M_d$$

với :

$$M_d(\omega) = k_{vf}\omega + k_{cf}\text{sign}\omega + k_{sf}\text{sign}\omega p(\omega) \qquad (2\text{-}39)$$

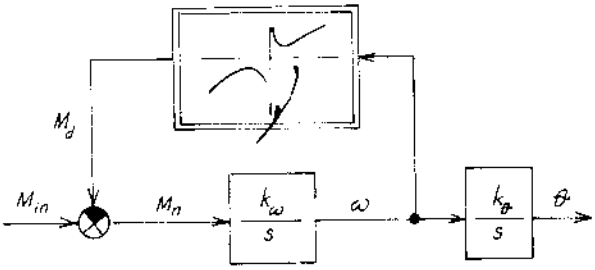
với M_{in} là mômen đặt vào (N.m) ; M_d là mômen ma sát (N.m) ; M_n là mômen tạo gia tốc (N.m) ; k_ω là hệ số tương hỗ của phụ tải quán tính (sec^{-2}/N.m), k_θ là hệ số dụng cụ đo, k_{vf} là hệ số ma sát (N.m.sec.rad^{-1}), k_{cf} là mômen ma sát Coulomb (N.m), k_{sf} là mômen ma sát tĩnh (rad.sec^{-1}), $p(\omega) = e^{-j|\omega/\sigma|}$.

Hàm sign được xác định bởi :

$$\text{sign}\sigma = \begin{cases} +1, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma = 0 \\ -1, & \sigma < 1 \end{cases}$$

Hãy tuyến tính hóa hệ điều khiển tốc độ nói trên ở điểm làm việc

$$0 < \omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max} \qquad (2\text{-}40)$$



Hình 2.12

Đáp án :

Điểm làm việc không thể tại $\omega = 0$ vì đạo hàm riêng của hàm sign tại điểm không sẽ không tồn tại.

Theo điều kiện đã cho :

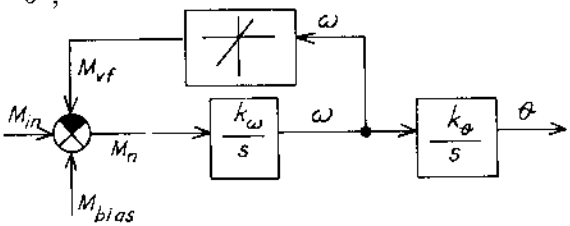
$$\dot{\omega} = f_1(\theta, \omega, M_{in}) = k_\omega(-M_d(\omega) + M_{in}) \;;$$

$$\dot{\theta} = f_2(\theta, \omega, M_{in}) = k_\theta.\omega$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \omega} = -k_\omega \frac{\partial M_d(\omega)}{\partial \omega} + 0 = -k_\omega k_{vf} \;;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \omega} = k_\theta \;;\; \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0 \;;\; \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0 \;;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial M_{in}} = k_\omega \;;\; \frac{\partial f_2}{\partial M_{in}} = 0 \;.$$



Hình 2.13

Ở đây không có mối liên hệ với điểm làm việc. Mô hình trạng thái sẽ là :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\omega k_{vf} & 0 \\ k_\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_\omega \\ 0 \end{bmatrix} M_{in} + \begin{bmatrix} k_\omega \\ 0 \end{bmatrix} M_{bias} \qquad (2\text{-}41)$$

$M_{bias} = -k_{cf}\text{sign}\omega.$

Sơ đồ khối hệ tuyến tính như ở hình 2.13. Nếu (2-41) được dùng để mô hình hóa thì mômen chệch sẽ bằng không khi $\omega = 0$. Nói chung nên dùng mô hình phi tuyến, lợi ích của việc tuyến tính hóa trong trường hợp này chủ yếu là để phân tích và tổng hợp.

Bài tập 2-8. Tuyến tính hóa $f(x) = 5\cos x$ ở lân cận $x = \frac{\pi}{2}$

Đáp án :

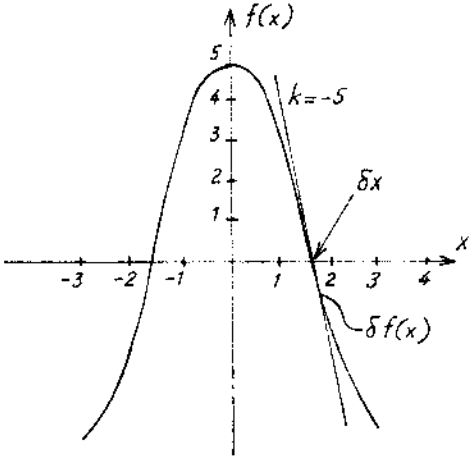
Ứng với (2-9) :

$$f(x) - f(x_0) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0}(x - x_0) \;;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -5\sin x \;;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0=\frac{\pi}{2}} = -5 \;;$$

Vậy $\delta f(x) = -5\delta(x)$ như ở hình 2.14.



Hình 2.14

Bài tập 2-9. Tuyến tính hóa :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \cos x = 0$$

ở $x = \pi/4$.

Đáp án :

$$\frac{d^2(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt^2} = \frac{d^2\delta x}{dt^2} \;;\; \frac{d(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} \;.$$

Tuyến tính hóa $\cos x$ ở lân cận $x = \frac{\pi}{4}$ theo (2-9) :

$$\cos(\delta x + \frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4}) = \left.\frac{d\cos x}{dx}\right|_{x_0=\frac{\pi}{4}} \delta x = -\sin(\frac{\pi}{4})\,\delta x \;;$$

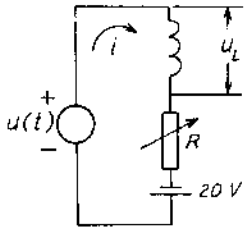
$$\cos(\delta x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4})\,\delta x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x \;;$$

Vậy : $$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + 2\frac{d\delta x}{dt} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;.$$

Bài tập 2-10. Xác định hàm truyền $U_L(s)/U(s)$ cho mạch điện ở hình 2.15, điện trở R là phi tuyến với :

$$i_r = 2e^{0.1u_r}$$

và $u_r(t)$ là nguồn điện áp bé.



Hình 2.15

Đáp án : $u_r = 10\ln\frac{1}{2}i_r$.

Theo Kirchhoff :

$$\frac{di}{dt} + 10\ln\frac{1}{2}i - 20 = u(t) .$$

Xác định điểm làm việc :

$$u(t) = 0 \ ; \ u_L(t) = L.\,di/dt = 0 \ ; \ u_r = 20 \text{ vôn} \ ;$$

$$i_r = i = 14{,}78 \text{ ampe.}$$

$$L\frac{d(i_0 + \delta i)}{dt} + 10\ln\frac{1}{2}(i_0 + \delta i) - 20 = u(t) \ ;$$

Tuyến tính hóa $\ln\frac{1}{2}(i_0 + \delta i)$ theo (2-9) :

$$\ln\frac{1}{2}(i_0 + \delta i) - \ln\frac{1}{2}i_0 = \left.\frac{d(\ln\frac{1}{2}i)}{di}\right|_{i_0}\delta i = \left.\frac{1}{i}\right|_{i_0}\delta i = \frac{1}{i_0}\delta i .$$

hay
$$\ln\frac{1}{2}(i_0 + \delta i) = \ln\frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0}\delta i \ ;$$

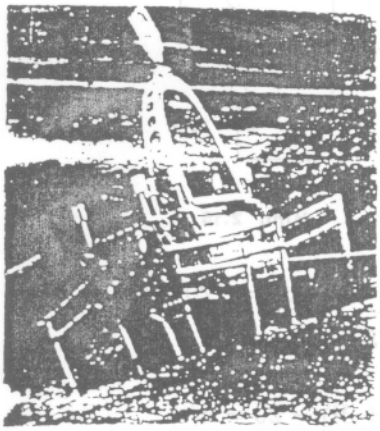
$$L\frac{d\delta i}{dt} + 10\left(\ln\frac{i_0}{2} + \frac{1}{i_0}\delta i\right) - 20 = u(t) .$$

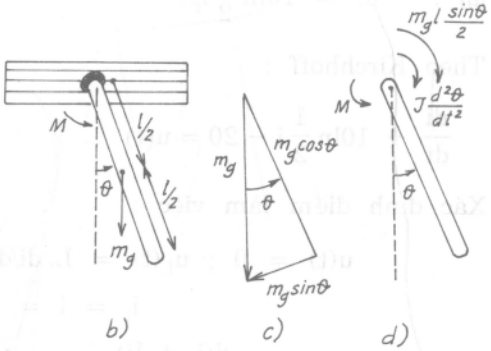
$L = 1$, $i_0 = 14{,}78$ ampe :

$$\frac{d\delta i}{dt} + 0{,}677\delta i = u(t) \ ;$$

$$\frac{U_L(s)}{U(s)} = \frac{s}{s + 0{,}677}$$

Bài tập 2-11. Ở hình 2.16b có con trỏ (mô hình của chân rôbôt ở hình 2.16a) với m_g là trọng lượng; M là mômen theo hướng θ, l là chiều dài con trỏ. Giả thiết trọng khối đặt tại tâm $\left(\frac{l}{2}\right)$. Hãy tuyến tính hóa phương trình trạng thái quanh điểm cân bằng.





Hình 2.16

Đáp án :

Theo hình 2.16d có phương trình mômen :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{2}\sin\theta = M \quad (2\text{-}42)$$

Đặt $\dot{x}_1 = x_2$; $(x_1 = \theta)$;

$$\dot{x}_2 = -\frac{mgl}{2J}\sin x_1 + \frac{M}{J}.$$

Với điểm cân bằng : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ứng với (2-9) :

$$\sin x_1 - \sin 0 = \frac{d(\sin x_1)}{dx_1}\Big|_{x_1=0}\delta x_1 = \delta x_1 .$$

Từ đó :

$$\left.\begin{aligned} \dot{\delta x}_1 &= \delta x_2 ; \\ \dot{\delta x}_2 &= -\frac{mgl}{2J}\delta x_1 + \frac{M}{J} \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}43)$$

Bài tập 2-12. Bình chứa có hệ phương trình :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{F}{A} - \frac{\beta}{A}\sqrt{h} = f(h, F) . \quad (2\text{-}44)$$

với h là biến trạng thái, F là biến đầu vào, β và A là các thông số. Tuyến tính hóa ở điểm xác lập.

Đáp án :

Dùng chuỗi Taylor

$$f(h, F) = \left[\frac{F}{A} - \frac{\beta}{A}\sqrt{h_s}\right] + \frac{1}{A}\left[F - F_s\right] - \frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}}\left[h - h_s\right] .$$

Thành phần thứ nhất vế phải bằng không vì tuyến tính hóa ở lân cận trạng thái cân bằng :

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h_s F_s} = \frac{F_s}{A} - \frac{\beta}{A}\sqrt{h_s} = 0 ;$$

$$\frac{d(h - h_s)}{dt} \approx -\frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}}\left[h - h_s\right] + \frac{1}{A}\left[F - F_s\right] .$$

Với $h' = h - h_s$, $u' = F - F_s$:

$$\frac{dh'}{dt} = -\frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}}h' + \frac{1}{A}u' .$$

Dấu (') ứng với độ chênh lệch, có thể bỏ qua, vậy :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{\beta}{2A\sqrt{h_s}}x + \frac{1}{A}u ; \\ \frac{dx}{dt} &= ax + bu . \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}45)$$

Bài tập 2-13. Hệ được mô tả bởi :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, u) ; \\ \dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, u) ; \\ y &= g(x_1, x_2, u) . \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}46)$$

Tuyến tính hóa ở điểm xác lập.

Đáp án :

Ở điểm xác lập :

$$f_1(x_{1s}, x_{2s}, u_s) = f_2(x_{1s}, x_{2s}, u_s) = 0$$

và $$g(x_{1s}, x_{2s}, u_s) = y_s$$

Vậy :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d(x_1 - x_{1s})}{dt} \\ \dfrac{d(x_2 - x_{2s})}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_{1s}x_{2s}u_s} & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_{1s}x_{2s}u_s} \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_{1s}x_{2s}u_s} & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_{1s}x_{2s}u_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1s} \\ x_2 - x_{2s} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u} \right| \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u} \right| \end{bmatrix}_{x_{1s}x_{2s}u_s} \begin{bmatrix} u - u_s \end{bmatrix} ;$$

$$y - y_s = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial g}{\partial x_1} \right| & \left.\dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{x_{1s}x_{2s}u_s} \end{bmatrix}_{x_{1s}x_{2s}u_s} \begin{bmatrix} x_1 - x_{1s} \\ x_2 - x_{2s} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_{1s}x_{2s}u_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_s \end{bmatrix} ;$$

Mô hình trạng thái có dạng :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}' &= Ax' + Bu' ; \\ y' &= Cx' + Du' . \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}47)$$

Chương 3
ĐỘNG HỌC CÁC HỆ PHI TUYẾN

3.1. MẶT PHẲNG PHA VÀ TÍNH CHẤT

Trước tiên hãy nói đến một số đặc điểm của phương pháp này :

- Mặt phẳng pha là phương pháp dùng miền thời gian nên kết quả của nó được quan sát dễ dàng.

- Phần tuyến tính của hệ giới hạn ở bậc hai vì ở bậc cao hơn (không gian pha) tính trực quan bị hạn chế.

- Phương pháp được áp dụng với hệ dừng (thông số không thay đổi theo thời gian).

- Phương pháp được áp dụng thuận tiện với hệ gồm một phần phi tuyến và một phần tuyến tính như ở hình 1.2b mà phương pháp ghép nối các khâu tuyến tính (II.3 tl [19]) và phi tuyến tính (I.4) có thể đơn giản hóa cấu trúc của hệ phi tuyến.

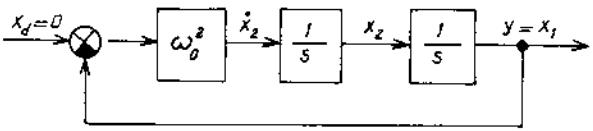
Trường hợp các khâu phi tuyến nằm rải rác giữa các khâu tuyến tính thì dùng phương pháp mô hình hóa trên máy tính là thuận tiện.

Mặc dù hiện nay với kỹ thuật máy tính phát triển, có thể dùng các phương pháp khác để mô hình hóa hệ phi tuyến nhưng phương pháp mặt phẳng pha cho phép quan sát hành vi của hệ, nhanh chóng đánh giá kết quả, còn khi không có máy tính thì ưu việt của phương pháp là hiển nhiên.

3.1.1 VÍ DỤ VỀ QUỸ ĐẠO PHA TRÊN MẶT PHẲNG

Ví dụ 3-1. Ở hình 3.1 có sơ đồ khối của hệ tuyến tính, bậc hai với $x_d = 0$ là chế độ trượt về gốc trục. Tương ứng với hệ phương trình vi phân :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \frac{dx_1}{dt}\ ; \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2 x_1 = \frac{dx_2}{dt}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}1)$$



Hình 3.1

Chia hai phương trình cho nhau ta có :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega_0^2 \frac{x_1}{x_2}\ ;$$

$$x_2 dx_2 = -\omega_0^2 x_1 dx_1.$$

Giải hệ phương trình trên ta được :

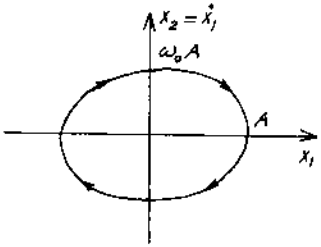
$$\frac{x_2^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x_1^2}{2} = C\ . \qquad (3\text{-}2)$$

Ví dụ với điều kiện đầu $x_2(0) = 0$, $x_1(0) = A$.

$C = \dfrac{\omega_0^2 A^2}{2}$ và (3-2) là phương trình ellip :

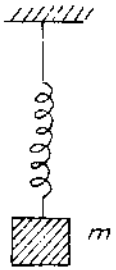
$$\frac{\dot{x}_2^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x_1^2}{2} = \frac{\omega_0^2 A}{2}\ , \qquad (3\text{-}3)$$

Khi $\omega_0 = 1$ có phương trình đường tròn ; khi $\omega_0 > 1$ thì trục tung là trục lớn của ellip và ngược lại.

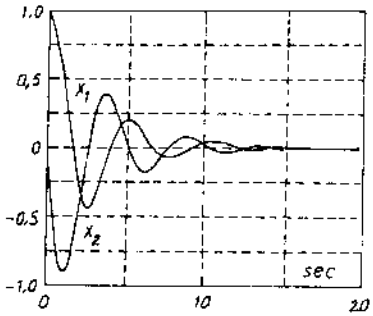


Hình 3.2

Ví dụ 3-2. Một trọng khối m được treo trên lò xo. Nếu kéo trọng khối xuống một khoảng cách 1m chẳng hạn và thả ra. Có thể quan sát quá trình dao động của m như ở hình 3.4 (đường x_1) và tốc độ dịch chuyển m được xác định bởi đạo hàm của nó như ở đường x_2 $\left(x_2 \equiv \dfrac{dx_1}{dt}\right)$.



Hình 3.3



Hình 3.4

Hệ trên có thể mô tả bởi phương trình :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \equiv \frac{dx_1}{dt} ; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m} x_1 - \frac{B}{m} x_2 \equiv \frac{dx_2}{dt} . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}4)$$

Với m = 1,9 kg ; hệ số ma sát của lò xo k = 3 $N.m^{-1}$ và hệ số giảm xóc B = 1,2 $N/(m.sec^{-1})$. Vậy (3-4) có dạng :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &\equiv \frac{dx_1}{dt} = x_2 ; \\ \dot{x}_2 &\equiv \frac{dx_2}{dt} = -1{,}581\, x_1 - 0{,}63\, x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}5)$$

Hệ phương trình trên có thể mô tả dưới dạng ma trận :

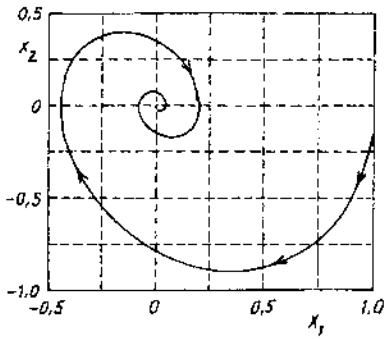
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1{,}581 & -0{,}63 \end{bmatrix} x \quad (3\text{-}6)$$

với χ là hệ số góc :

$$\chi = \frac{dx_2}{dx_1} \approx \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{-1{,}581\, x_1 - 0{,}63\, x_2}{x_2} ; \qquad (3\text{-}7)$$

$$x_2 = \frac{-1{,}581}{\chi + 0{,}63} x_1 . \qquad (3\text{-}8)$$

với $x_2(t)$ là tốc độ biến đổi của $x_1(t)$ mối quan hệ ấy được mô tả trên mặt phẳng pha $x_2(x_1)$ như ở hình 3.5.



Hình 3.5

Các đường cong ở hình 3.2 hay 3.5 là quỹ đạo pha, mô tả chuyển động của hệ từ điều kiện ban đầu, còn dấu mũi tên tương ứng với hướng chuyển động của quỹ đạo pha.

3.1.2. ĐẶC ĐIỂM CỦA QUỸ ĐẠO PHA

1. Ở các hệ điều khiển, thông thường x_1 mô tả trạng thái ở đầu ra của hệ, còn x_2 là tốc độ biến đổi của x_1. Trong trường hợp hai biến trạng thái, ứng với dạng Cauchy (2 –3) ta có :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) = x_2 \; ; \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{–}9)$$

Vậy $\frac{dx_1}{dt} \approx \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = x_2$ mà Δt luôn dương (biến đổi thuận của thời gian) nên Δx_1 có dấu tùy thuộc vào dấu của x_2 : *Phía trên của trục hoành* ($x_2 > 0$), *quỹ đạo pha đi từ trái sang phải* ($\Delta x_1 > 0$), *còn ở phía dưới trục hoành* ($x_2 < 0$) *quỹ đạo pha đi từ phải sang trái* ($\Delta x_1 < 0$).

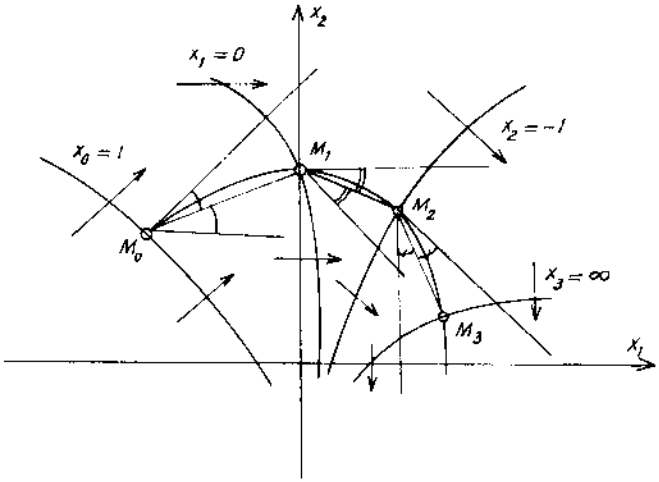
2. Chia hai phương trình ở (3 –9) cho nhau ta có :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \chi \; . \qquad (3\text{–}10)$$

Với một điểm nhất định trong mặt phẳng pha, xác định bởi x_1 và x_2, theo (3–10) chỉ có một hệ số góc χ xác định tiếp tuyến của hướng chuyển động của quỹ đạo pha : $\chi = \frac{dx_2}{dx_1} = \text{const}$ cho nên : *ở những điểm bình thường quỹ đạo pha không cắt nhau.*

Với trị số $\chi_i = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{x_1 = x_{1i} \; ; \; x_2 = x_{2i}}$ cho trước, có thể vẽ các đường cong trong mặt phẳng pha như với bốn trị số ở hình 3.6. Đó là các đường đẳng tà. Để tăng độ chính xác, chọn số lượng đường đẳng tà với độ chênh lệch giữa chúng :

$$10^o \leqslant \Delta\alpha \leqslant 30^o$$



Hình 3.6

Khi vẽ xong các đường đẳng tà (ở hình 3.6 là các đường cong có cùng trị số χ_0, χ_1, χ_2, χ_3), từ một điểm xuất phát trên đường đẳng tà (M_o) vẽ đường phân giác của góc $\alpha_o - \alpha_1$ (xác định bởi hai đường đẳng tà đầu tiên) cho đến khi gặp đường đẳng tà thứ hai (M_1) ; từ điểm thứ hai lại vẽ đường phân giác của góc $\alpha_1 - \alpha_2$ đến giao điểm M_2 v.v... Cuối cùng nối các điểm M_o, M_1, M_2 ..., M_3 với nhau bằng một đường trơn, đó là quỹ đạo pha cần tìm xây dựng theo *phương pháp đường đẳng tà.*

3. Ở những điểm đặc biệt, tọa độ của chúng được xác định bởi

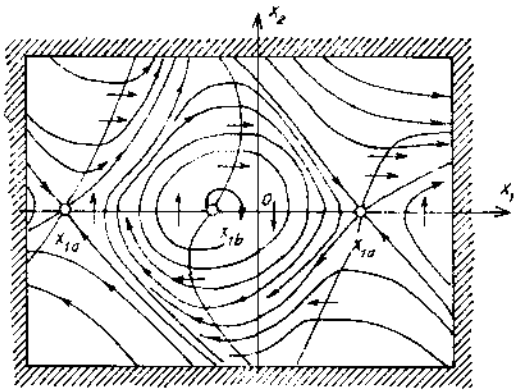
$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \; ; \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \, . \end{aligned}\right\} \quad (3-11)$$

là trạng thái cân bằng của hệ.

Khi x_2 là tốc độ biến đổi của x_1 và :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) = x_2 = 0.$$

thì điểm đặc biệt nằm trên trục hoành và cắt đường đẳng tà có tiếp tuyến song song x_1 như ở hình 3.7.



Hình 3.7

4. Từ (3-10) : Khi $x_2 = 0$ thì $x = \infty$, nghĩa là : *Quỹ đạo pha luôn cắt vuông góc với trục hoành.*

3.2. CHÊNH LỆCH BÉ KHỎI TRẠNG THÁI CÂN BẰNG

Nếu f_1 và f_2 ở (3-10) là những hàm đơn trị, liên tục và khả vi theo cả hai biến x_1 và x_2 thì hệ sẽ làm việc khi có chênh lệch bé ở lân cận m vị trí cân bằng như hệ tuyến tính hóa.

Dùng chuỗi Taylor ở lân cận các vị trí cân bằng đối với hệ bậc hai :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= k_{11}x_1 + k_{12}x_2 \; ; \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_{21}x_1 + k_{22}x_2 \; . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}12)$$

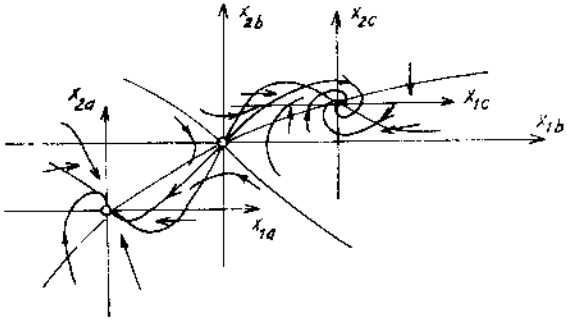
với

$$k_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_{1s}, x_{2s}} \; ; \; k_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_{1s}, x_{2s}} \; ;$$

$$k_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_{1s}, x_{2s}} \; ; \; k_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_{1s}, x_{2s}} \; .$$

Với hệ được mô tả bởi (3-9) ta có $k_{11} = 0$ và $k_{12} = 1$. Biến đổi Laplace của (3-12) ở thời điểm $t_1 = t - t_0 = 0$, tọa độ pha có trị số $x_1(t_{10}) = x_0$ và $x_2(t_0) = x_{20}$ là :

$$\left.\begin{aligned} sX_1(s) - x_{10} &= k_{11}X_1(s) + k_{12}X_2(s) \; ; \\ sX_2(s) - x_{20} &= k_{21}X_1(s) + k_{22}X_2(s). \end{aligned}\right\}$$



Hình 3.8

hay
$$\left.\begin{aligned}(s - k_{11})X_1(s) - k_{12}X_2(s) &= x_{10} ;\\ -k_{21}X_1(s) + (s - k_{22})X_2(s) &= x_{20}.\end{aligned}\right\}$$

Từ đó rút ra hai phương trình :

$$\left[s^2 - (k_{11} + k_{22})s + (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})\right]X_1(s) = (s - k_{22})x_{10} - k_{12}x_{20} ;$$

$$\left[s^2 - (k_{11} + k_{22})s + (k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21})\right]X_2(s) = (s - k_{11})x_{20} - k_{21}x_{10}.$$

tương ứng với một phương trình vi phân bậc hai đồng nhất :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \sigma\frac{dx}{dt} + \Delta x = 0 . \qquad (3\text{-}13)$$

trong đó $\sigma = k_{11} + k_{22}$; $\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}$.

Ảnh của nghiệm hệ phương trình (3-12) có dạng :

$$\left.\begin{aligned}X_1(s) &= \frac{(s - k_{22})x_{10} + k_{12}x_{20}}{(s - s_1)(s - s_2)} ;\\ X_2(s) &= \frac{k_{21}x_{10} + (s - k_{11})x_{20}}{(s - s_1)(s - s_2)} .\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}14)$$

với s_1, s_2 là nghiệm của phương trình đặc trưng :

$$s^2 - \sigma s + \Delta = 0 . \qquad (3\text{-}15)$$

$$s_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2} = \frac{(k_{11} + k_{22}) \pm \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}k_{21}}}{2} \qquad (3\text{-}16)$$

Từ ảnh (3-14) trở về hàm gốc với nghiệm phức $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$; $\alpha = -\frac{\sigma}{2}$; $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \sigma^2}$ ta có phương trình của quỹ đạo pha :

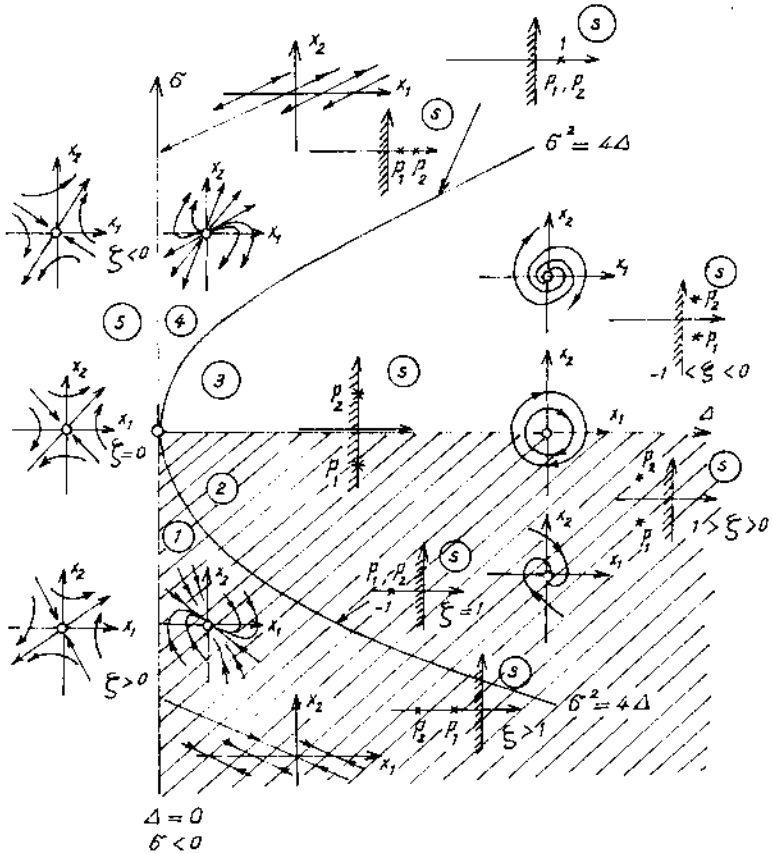
$$\left.\begin{aligned}x_1 &= e^{-\alpha(t - t_0)}\left[x_{10}\cos\omega(t - t_0) + \frac{\alpha x_{10} + x_{20}}{\omega}\sin\omega(t - t_0)\right] ;\\ x_2 &= e^{-\alpha(t - t_0)}\left[x_{20}\cos\omega(t - t_0) + \frac{\Delta x_{10} + \alpha x_{20}}{\omega}\sin\omega(t - t_0)\right] ;\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}17)$$

Ở hệ phi tuyến, các phương trình trên phản ánh chuyển động của quỹ đạo pha trong phạm vi bé khi chênh lệch khỏi trạng thái cân bằng.

Ở hệ tuyến tính các phương trình ấy sẽ đúng trên toàn bộ mặt phẳng pha khi phân tích các hệ tuyến tính từng đoạn ở mục 3.4.

Tính ổn định và chất lượng của hệ trong phạm vi bé tùy thuộc nghiệm của phương trình đặc trưng, được xác định bởi các hệ số σ và Δ.

Chia mặt phẳng các hệ số σ và Δ thành từng vùng tương ứng với những hành trạng khác nhau của hệ như ở hình 3.9.



Hình 3.9

1. Trường hợp $\Delta = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} > 0$ tương ứng với phía phải của trục tung.

Với $\Delta = \omega_0^2$; $\sigma = -2\zeta\omega_0$ ta có phương trình của khâu dao động :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$$

Khâu dao động ứng với tỷ số tắt dần $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$. Ở đây khảo sát nghiệm của phương trình với $-\infty < \zeta < \infty$.

Dùng đại lượng tương đối $\tau = \omega_0 t$, từ đó :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dx}{d\tau} + x = 0 . \qquad (3\text{-}18)$$

Dùng biến pha là chênh lệch bé x_1 và tốc độ biến đổi không thứ nguyên $x_2 = dx_1/d\tau$.

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\tau} = x_2\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)$$

Thay đạo hàm bậc hai vào (3-18) :

$$x_2\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) + 2\zeta x_2 + x_1 = 0 ;$$

Từ đó :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -(2\zeta x_2 + x_1)/x_2 ; \qquad (3\text{-}19)$$

và

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2 ; \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -x_1 - 2\zeta x_2 . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}20)$$

là hệ phương trình (3-9) đã đề cập ở trên, có nghiệm của phương trình đặc trưng :

$p^2 + 2\zeta p + 1 = 0$; $p = \frac{1}{\omega_o} s$ phụ thuộc tỷ số tắt dần ζ.

Trong mặt phẳng thông số $\sigma(\Delta)$ có các vùng.

Vùng 1. Ứng với $\zeta > 1$ ở ô phần tư thứ tư dưới đường cong $\sigma^2 = 4\Delta$, có hai nghiệm thực âm :

$$p_1 = -\zeta + \sqrt{\xi^2 - 1} = \frac{1}{\omega_0 T_1} ;$$

$$p_2 = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} = \frac{1}{\omega_0 T_2} ;$$

$$p_1 p_2 = 1.$$

tương ứng với hai khâu quán tính với hằng số thời gian T_1, T_2.

Khi $\zeta \geqslant 1,75$, T_1 lớn hơn T_2 mười lần nên hệ tương đương một khâu quán tính. Phân bố nghiệm định tính và quỹ đạo pha mô tả ở hình 3.9 trong vùng 1.

Vùng 1 tương ứng với vị trí cân bằng ổn định với quá trình quá độ có dao động. Điểm đặc biệt này mang tên là điểm nút.

Quỹ đạo pha quanh điểm có thông số thỏa mãn điều kiện $\sigma = -2\omega_0 = -2\sqrt{\Delta}$, nghĩa là trên đường cong giới hạn của vùng *1* và *2* tương ứng với $\zeta = 1$, $p_1 = p_2 = -1$ là quỹ đạo pha hội tụ của hai khâu quán tính cùng hằng số thời gian nối tiếp nhau.

Vùng 2. Tương ứng với $1 > \zeta > 0$ của khâu dao động ở ô phần tư thứ tư phía trên đường cong $\sigma^2 = 4\Delta$, có nghiệm :

$$p_1 = -\zeta + j\Omega \ ;$$
$$p_2 = -\zeta - j\Omega.$$

$\Omega = \sqrt{1-\zeta^2} = \omega_t/\omega_0$, $\omega_t = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ là tần số góc của dao động tắt dần.

Dạng quỹ đạo pha là dạng xoắn ốc quanh tiêu cự ($x_1 = x_2 = 0$). *Vùng 2 tương ứng với vị trí cân bằng ổn định có quá trình dao động. Điểm đặc biệt như vậy gọi là tiêu cự.*

Trên phần phải của trục hoành tỷ số suy giảm $\zeta = 0$, nghiệm của phương trình đặc trưng là thuần ảo : $p_1 = j$; $p_2 = -j$ và hệ là mạch dao động lý tưởng, mô phỏng bằng hai khâu tích phân khép kín bởi hồi tiếp âm. Quỹ đạo pha là đường tròn bán kính tùy thuộc vào điều kiện đầu tương ứng với vị trí cân bằng trung tính. Như vậy *nửa phải của trục hoành tương ứng với điểm đặc biệt gọi là tâm.*

Qua các phân tích trên cho thấy, không thể đánh giá tính ổn định và hành trạng của hệ phi tuyến bằng phương trình tuyến tính hóa đơn thuần (3-12). Thành phần phi tuyến tính đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích hàm $f_1(x_1, x_2)$ và $f_2(x_1, x_2)$ mà người ta còn gọi là ảnh hưởng của các thông số nhỏ.

Vùng 3. Tỷ số suy giảm có giá trị âm ($\zeta < 0$). Phần thực của hai nghiệm phức đều dương :

$$p_1 = \alpha + j\Omega \ ;$$
$$p_2 = \alpha - j\Omega \ ;$$
$$1 > \alpha = -\zeta > 0.$$

Quỹ đạo pha là họ các đường xoắn ốc và phân kỳ. Vị trí cân bằng là không ổn định. *Điểm đặc biệt mà σ và Δ thuộc vùng 3 gọi là tiêu cự không ổn định.*

Quỹ đạo pha quanh điểm có thông số thỏa mãn điều kiện $0 < \sigma = 2\omega_0 = 2\sqrt{\Delta}$, nghĩa là trên đường cong giới hạn vùng *3* và vùng *4* tương ứng với $\zeta = -1$, $p_1 = p_2 = 1$ là *quỹ đạo pha của nút không ổn định nảy sinh.*

Vùng 4. Hệ số suy giảm có giá trị âm $-1 > \zeta > -\infty$, nghiệm đều thực và dương :

$$p_1 = \alpha - \sqrt{\zeta^2 - 1} \;;$$
$$p_2 = \alpha + \sqrt{\zeta^2 - 1} \;;$$
$$\alpha = -\zeta > 0 .$$

Quỹ đạo pha là hình ảnh đối xứng với quỹ đạo pha trong miền *1* qua trục x_1 nhưng dấu chuyển động ngược lại. *Quỹ đạo pha là nút không ổn định.*

2. Trường hợp $\Delta = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} < 0$ tương ứng với phía trái của trục tung.

Với $-\Delta = \omega_0^2 > 0$, thay vì (3-18) có phương trình vi phân :

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + 2\zeta\frac{dx_1}{d\tau} + x_1 = 0 \;; \qquad (3\text{-}21)$$

và hai nghiệm của phương trình đặc trưng là :

$$p_1 = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1} > 0 \;;\; p_2 = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 + 1} < 0 . \qquad (3\text{-}22)$$

đều là nghiệm thực, không phụ thuộc vào σ và dấu khác nhau.

Vùng 5. Vị trí cân bằng ($x_{1i} = 0$, $x_{2i} = 0$) luôn không ổn định. *Quỹ đạo pha có dạng yên ngựa và phân kỳ.* Hai quỹ đạo pha đặc biệt là hai đường thẳng qua gốc trục :

$$x_2 = p_1x_1 = \chi_1x_1 \text{ và } x_2 = p_2x_1 = \chi_2x_1 \qquad (3\text{-}23)$$

Các đường đẳng tà là tiếp tuyến nằm ngang và thẳng đứng đều nằm ở hai phía khác nhau đối với đường đẳng tà (3-23). Quỹ đạo pha có dạng hình đèo núi và *điểm đặc biệt không ổn định này được gọi là điểm yên ngựa.*

Ở hình 3.9 có quỹ đạo pha của ba trường hợp khác nhau của ζ (hay σ).

Quỹ đạo pha quanh điểm đặc biệt có thông số $\Delta = 0$ ứng với các điểm nằm trên trục tung. Phương trình (3-12) có dạng :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \sigma\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 . \qquad (3\text{-}24)$$

Hệ tương đương với hai khâu quán tính và tích phân nối tiếp nhau. Với $x_1 = x$; $x_2 = \frac{dx}{dt}$ ta có :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 ; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sigma x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}25)$$

Từ đó, cả trục hoành ($x_2 = 0$) là những điểm đặc biệt. Vì $\Delta = k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0$, $k_{11} = k_{21} = 0$, $k_{12} = 1$, $k_{22} = \sigma$. Nghiệm của phương trình đặc trưng là :

$$p_1 = 0 \ ; \ p_2 = \sigma.$$

Phương trình quỹ đạo pha có dạng :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + \frac{1}{\sigma} x_{20}\left[1 - e^{\sigma(t - t_0)}\right] ; \\ x_2 &= x_{20}\, e^{\sigma(t - t_0)} . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}26)$$

Xác định từ phương trình thứ hai $e^{\sigma(t - t_0)} = x_2/x_{20}$ và thay vào phương trình đầu ta có mối liên hệ giữa các biến pha dạng tuyến tính :

$$x_2 - x_{20} = \sigma(x_1 - x_{10}). \qquad (3\text{-}27)$$

Khi $\sigma < 0$, điểm biểu diễn của quỹ đạo pha tiến đến trục hoành và dừng ở điểm $x = x_{10} + (\frac{1}{\sigma})x_{20}$ (hình 3.9). Như vậy *điểm đặc biệt là vị trí cân bằng ổn định của hệ.*

Khi $\sigma > 0$, tọa độ pha tăng đến vô hạn. *Điểm đặc biệt trên trục hoành là vị trí cân bằng không ổn định.*

3.3. HÀNH TRẠNG CỦA HỆ KHI CÓ CHÊNH LỆCH LỚN. TỰ DAO ĐỘNG

Sau khi xác định các điểm đặc biệt và khảo sát tính chất của các quá trình ở lân cận vị trí cân bằng (trong phạm vi bé), có thể tiến đến khảo sát cả hệ phi tuyến, bao gồm :

Ngoài các trạng thái cân bằng, cần xác định các quá trình xác lập có thể khác, cũng như các điều kiện bảo đảm cho hệ làm việc ở những chế độ ấy. Đó là các chế độ dao động có chu kỳ mà trên mặt phẳng pha là những quỹ đạo khép kín, gọi là *chu kỳ giới hạn ổn định*. Cần làm rõ những vùng cùng với tọa độ của điểm biểu diễn mà trong mỗi vùng có một trong các chế độ xác lập của hệ. Giới hạn của những vùng ấy được gọi là *vùng hấp dẫn* của các chế độ làm việc tương ứng, được hình thành bởi các quỹ đạo pha đặc biệt, không ổn định gọi là chu *kỳ giới hạn không ổn định* và các *vùng yên ngựa phân ly*.

Việc xây dựng quỹ đạo pha trong trường hợp chung khá phức tạp nếu không dùng đến máy tính. Phương pháp giải tích được ứng dụng đối với hệ tuyến tính hóa từng đoạn (3 –4). Ngoài phương pháp giản đơn như phương pháp đường đẳng tà (3 –2), các phương pháp khác có thể tham khảo ở các tài liệu [2, 12, 13]. Ở đây chủ yếu dùng các phương pháp đồ thị và phương pháp số trên cơ sở dùng máy tính và chương trình MATLAB để giải và mô hình hóa.

Xác định thời gian chuyển động của điểm biểu diễn

Mối liên hệ giữa sự thay đổi tọa độ điểm biểu diễn và thời gian chuyển động của nó nói chung được xác định theo hệ phương trình (3–9). Nếu dùng máy tính, độ chính xác của phương pháp đồ thị được nâng cao rõ rệt. Nội dung tổng quát như sau :

Vì $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$ nên $\dfrac{dt}{dx_1} = \dfrac{1}{x_2}$. Lấy tích phân theo x_1 ta có

$$t = \int \frac{1}{x_2} dx_1 .$$

Điều đó có nghĩa là thời gian đến một điểm nào trên quỹ đạo pha là khoảng cách phụ thuộc vào điểm ở đường cong $\dfrac{1}{x_2}$ thông qua x_1. Cho nên theo trục x_1 chia thành những cung đủ nhỏ để thể hiện hành trạng

của x_2, đại lượng x_2 tương ứng với mỗi cung có thể đo được, biến đổi thành $\frac{1}{x_2}$ và tổng của chúng được xác định, từ đó xác định thời gian tương ứng.

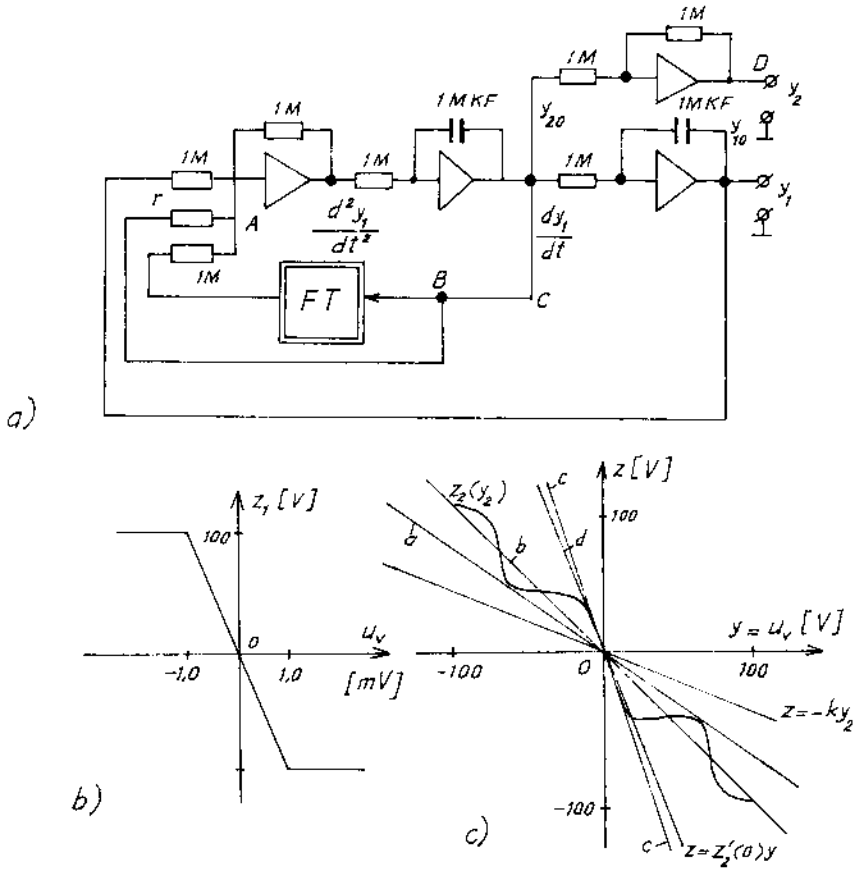
Ví dụ 3–3 Với ví dụ 3–2 và quỹ đạo pha như ở hình 3.5, xây dựng bảng kết quả như sau : Hai cột đầu lấy từ hình vẽ quỹ đạo pha, cột thứ tư là $\frac{1}{x_2}$. Vì x_2 đôi khi bằng không, để tránh trường hợp không xác định ở cột ba, dùng độ chênh lệch của Δx_2.

Bảng 3-1

x_1	x_2	Giá trị của mỗi cặp x_2	Biên độ $\frac{1}{x_2}$	$\frac{1}{x_2} \cdot 0,1$	Thời gian
1,0	0	-	-	-	-
0,9	-0,54	-0,27	3,7	0,37	0,37
0,8	-0,68	-0,61	1,64	0,16	0,53
0,7	-0,79	-0,74	1,35	0,14	0,67
0,6	-0,84	-0,82	1,22	0,12	0,79
0,5	-0,86	-0,85	1,18	0,12	0,91
0,4	-0,90	-0,88	1,14	0,11	1,02
0,3	-0,90	-0,90	1,11	0,11	1,13
0,2	-0,86	-0,88	1,14	0,11	1,24
0,1	-0,84	-0,85	1,18	0,12	1,36
0	-0,79	-0,82	1,22	0,12	1,48
-0,1	-0,72	-0,75	1,33	0,13	1,61
-0,2	-0,62	-0,67	1,49	0,15	1,76
-0,3	-0,48	-0,55	1,82	0,18	1,94
-0,4	-0,25	-0,37	2,70	0,27	2,21

Cột thứ năm là khoảng cách của đường cong $\frac{1}{x_2}$ thông qua x_1 (chú ý là độ rộng mỗi cung đều như nhau và bằng 0,1). Cột thứ sáu là thời gian gồm tổng của thời gian được xác định từ cột thứ năm. Kết quả có thể so sánh với các đường cong ở hình 3.4. Ví dụ thời điểm x_1 bằng không theo khoảng 3–1 là t = 1,48 sec còn ở đường cong là t = 2,21 sec. Càng giảm nhỏ x_1, kết quả xác định càng chính xác hơn.

Ví dụ 3–4. Mô hình hóa hệ ổn định hướng lái ở ví dụ 2–1. Mục đích là khảo sát ảnh hưởng hệ số hồi tiếp do thay đổi r. Đặc tính khuếch đại $z_1(u_v)$ như ở hình 3.10b và khối phi tuyến $z_2(u_v)$ như ở hình 3.10c (khối FT). Do khuếch đại thuật toán bão hòa $|z_1| \leq 100$ V nên quỹ đạo pha giới hạn ở ô vuông (hình 3.11).



Hình 3.10

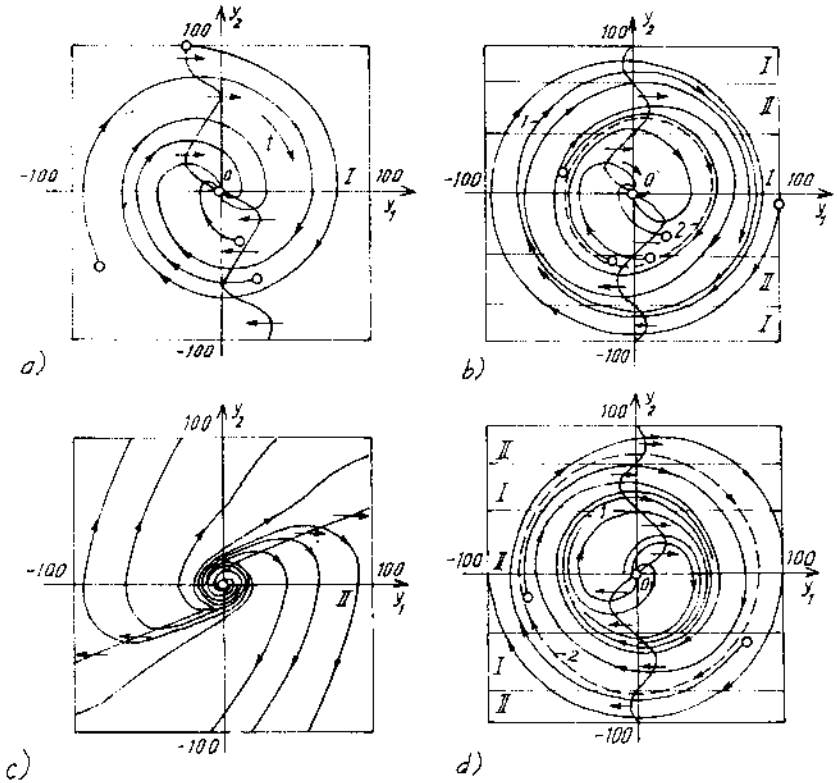
Trên đoạn tuyến tính của z_1, hệ số khuếch đại lớn, $|k| = 10^5 >> 1$ nên có thể dùng khuếch đại để tích phân các phương trình vi phân (mô hình hóa khâu động học).

Sơ đồ mô hình ở hình 3.10 nhằm mục đích giải phương trình vi phân :

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = z_2\left(\frac{dy_1}{dt}\right) + k\frac{dy_1}{dt} - y_1 \; ; \; k = \frac{1M}{r} .$$

với điều kiện đầu $y_1 = y_{10}$; $y_2 = \frac{dy_1}{dt} = y_{20}$.

Nếu điểm biểu diễn cắt đường đẳng tà theo tiếp tuyến ngang sớm hơn (hay chậm hơn) so với trục tung, $y_1 = 0$ thì chênh lệch của điểm biểu diễn so với gốc tọa độ giảm (hay tăng) được mô tả bằng vùng I (hay II) trên hình 3.11.



Hình 3.11

* Khi r lớn, đường thẳng $z = -ky_2$ chỉ cắt $z_2(y_2)$ ở gốc tọa độ. Đường đẳng tà theo tiếp tuyến ngang $y_1 = ky_2 - Z_2(y_2)$ nằm trọn trong ô thứ hai và thứ tư.

Hình 3.11a là quỹ đạo pha với $k = 0,75$; $r = 1,34M$ khi z tiếp xúc với đường cong z_2 (vị trí a ở hình 3.10c). Trường hợp này chỉ có một trạng thái cân bằng $y_{1i} = y_{2i} = 0$.

Phương trình của hệ :

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy_1}{dt} + y_1 = 0 .$$

$$\zeta = -\frac{1}{2}\left(\left.\frac{dz_2}{dy_2}\right|_{y_1=0} + k\right) = \frac{1}{2}\left(2{,}5 - 0{,}75\right) = 0{,}875 < 1 .$$

* Với k = 1, r = 1M ứng với đường b (hình 3.10). Đường đẳng tà với tiếp tuyến ngang cắt nhiều lần trục tung của mặt phẳng pha. Ngoài trạng thái cân bằng ổn định $y_{1i} = y_{2i} = 0$, có thể có dao động không tắt mà biên độ và tần số không phụ thuộc điều kiện ban đầu nếu điều kiện ấy nằm trong miền hấp dẫn của chu kỳ tới hạn 1. Đó là chế độ tự dao động. Tự dao động sẽ không tồn tại nếu không tạo nên chênh lệch ban đầu đủ đạt đến chu kỳ giới hạn 2.

* Khi tiếp tục giảm r, đường thẳng $z = -ky_2$ quay theo chiều kim đồng hồ. Đường đẳng tà với tiếp tuyến ngang nằm ở góc phần tư số một và số ba. Biên độ của chu kỳ tới hạn ổn định 1 và không ổn định 2 tăng dần khi đường thẳng $z = -ky_2$ trở thành tiếp tuyến $z = ydz/dy$, đường đẳng tà $\chi = 0$ vượt qua trục tung và vị trí cân bằng ổn định không còn nữa. Quỹ đạo pha như ở hình 3.11c ứng với k = 5 ; r = 0,2M.

Nếu dùng tác động kích thích mềm (đổi dấu của y_{20}) :

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -z^2\left(\frac{dy_1}{dt}\right) - k_1\left(\frac{dy_1}{dt}\right) - y_1 .$$

thì đường đẳng tà $y_1 = -F(y_2)$ đổi dấu ứng với quỹ đạo pha ở hình 3.11d. Đó là trường hợp r = 1M ; k = 1. Điểm đặc biệt là tiêu cự không ổn định. Đường cong *1* là chu kỳ tới hạn ổn định, còn đường cong *2* - không ổn định.

3.4. TUYẾN TÍNH HÓA TỪNG ĐOẠN

Ở phương pháp tuyến tính hóa, tại những điểm làm việc, đặc tính là tuyến tính ; do đó với những điểm làm việc khác nhau có thể biến đổi đặc tính phi tuyến thành tuyến tính từng đoạn mà giao điểm của những đường thẳng xác định cho phạm vi tuyến tính trong một giới hạn nhất định.

Khi thực hiện phương pháp xấp xỉ này cần chú ý đến ảnh hưởng của nó đối với kết quả phân tích chất lượng hệ. Nói cách khác là số

lượng và chủng loại các điểm đặc biệt, ranh giới của các vùng hấp dẫn của quỹ đạo pha, các chu kỳ tới hạn và tính ổn định không thay đổi khi dùng phương pháp xấp xỉ để tuyến tính hóa. Phương tiện để kiểm tra là so sánh với kết quả mô hình hóa hệ sơ khai.

Điều rất quan trọng đối với hệ phi tuyến là mô tả toán học xuất phát từ bản chất vật lý của phần tử phi tuyến, ví dụ các khe hở, gối tì, rơle, khóa, trigơ v.v...

Trước tiên hãy xét ảnh hưởng của dạng đặc tính phi tuyến tính từng đoạn ảnh hưởng đến quỹ đạo pha như thế nào. Mỗi đoạn tuyến tính của đặc tính $z_i(x_1)$ và $z_j(x_2)$ của các phần tử trong hệ mà không bị gián đoạn hay gãy khúc sẽ tương ứng với một vùng riêng biệt (k = a, b, c...), trong vùng ấy vế phải của hệ phương trình vi phân là tuyến tính theo cả hai biến pha.

Như vậy, ta có thể viết :

$$\left.\begin{aligned} dx_1/dt &= k_{10} + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 \ ; \\ dx_2/dt &= k_{20} + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}28)$$

Với $k_{10} = f_1(x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 0) = f_{1i}(0)$ và $k_{20} = f_{2i}(0)$.

Tọa độ của điểm đặc biệt $dx_1/dt = dx_2/dt = 0$:

$$\left.\begin{aligned} x_{1s} &= \frac{-k_{10}k_{22} + k_{20}k_{12}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \ ; \\ x_{2s} &= \frac{k_{10}k_{21} - k_{20}k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}29)$$

Điểm đặc biệt thường không phải là trạng thái cân bằng của hệ.

Theo (3-28) ; $k_{10} = -(k_{11}x_{1s} + k_{12}x_{2s})$ và $k_{20} = -(k_{21}x_{1s} + k_{22}x_{2s})$, phương trình vi phân của quỹ đạo pha ứng với (3-12) như sau :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= k_{11}(x_1 - x_{1s}) + k_{12}(x_2 - x_{2s}) \ ; \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_{21}(x_1 - x_{1s}) + k_{22}(x_2 - x_{2s}) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}30)$$

So sánh (3-30) với (3-12) thấy rằng, sự khác nhau duy nhất giữa chúng là sự dịch chuyển điểm đặc biệt từ gốc tọa độ đến điểm có tọa độ (3-29). Như vậy, mọi phân tích ở 3-3 đều có thể áp dụng cho hệ tuyến tính từng đoạn.

Trường hợp đặc biệt là khi $\Delta = 0$, nhất là với :

$$\left.\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2 \; ; \\ dx_2/dt &= \sigma(x_2 - x_{2s}) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{–}31)$$

khác với (3–25) là có thành phần $k_{20} = f_2(0) = -\sigma x_{2s}$.

Phương trình của các đường cong tích phân có dạng :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \sigma \frac{x_2 - x_{2s}}{x_2} \; . \qquad (3\text{–}32)$$

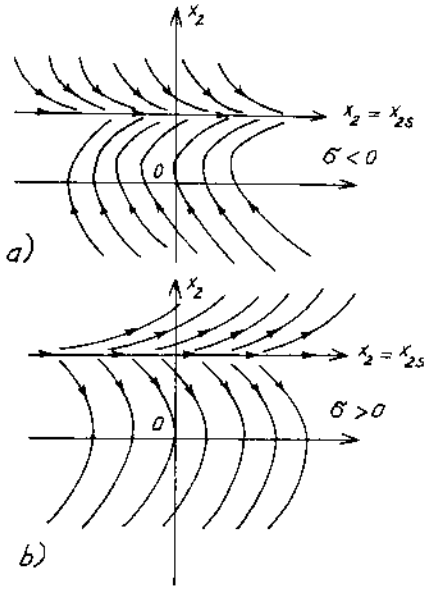
Đường đẳng tà là đường thẳng $x_2 = -\dfrac{\sigma x_{2s}}{\chi - \sigma}$ song song với hoành trục như ở hình 3.12 và đường đẳng tà với tiếp tuyến song song với trục hoành đồng thời là giới hạn của quỹ đạo pha của hệ.

Quỹ đạo pha cho trường hợp $\sigma < 0$ và $\sigma > 0$ như ở hình 3.12a và 3.12b tương ứng.

Với điều kiện $\sigma = 0$, (3–31) có dạng :

$$\left.\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2 \; ; \\ dx_2/dt &= C \; . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{–}33)$$

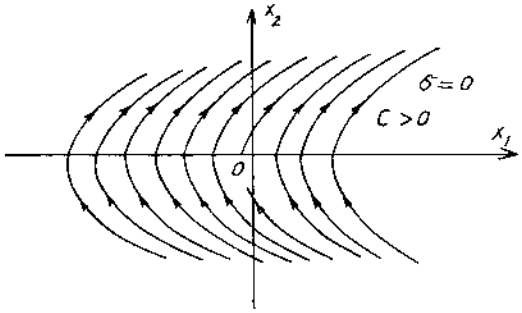
Quỹ đạo pha như ở hình 3.13 tương đương với hai khâu tích phân nối tiếp.



Hình 3.12

Có hai dạng chuyển đổi đặc tính phi tuyến tính từng đoạn :

1. Chuyển đổi mà vẫn giữ tính liên tục của vế phải phương trình vi phân (3–30), nghĩa là vẫn giữ tính liên tục của tốc độ pha, đặc trưng cho các hệ tuyến tính từng đoạn liên tục.



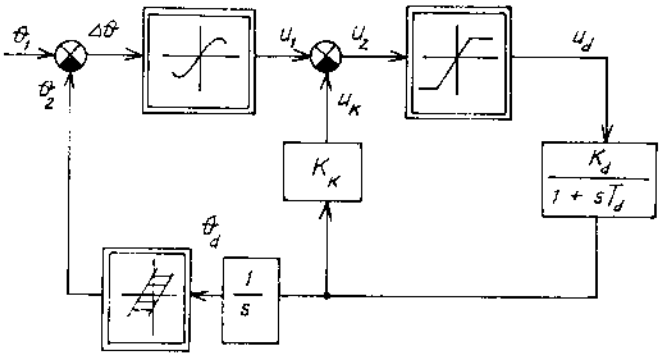
Hình 3.13

2. Chuyển đổi với tốc độ pha gián đoạn nhưng quỹ đạo pha liên tục, đặc trưng cho hệ tuyến tính từng đoạn có chuyển đổi.

3.4.1. HỆ TUYẾN TÍNH TỪNG ĐOẠN LIÊN TỤC

Vì các hàm $f_1(x_1, x_2)$ và $f_2(x_1, x_2)$ biến đổi nhưng vẫn giữ tính liên tục nên đường đẳng tà của hệ (3-28) cũng liên tục và là những đường gãy khúc. Quỹ đạo pha không gãy khúc.

Ví dụ 3-5 Hệ tùy động có sơ đồ khối như ở hình 3.14.



Hình 3.14

Đặt $x_1 = \theta_1 - \theta_2$; $x_2 = dx_1/dt$, có hệ phương trình :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 = f_1(x_1) \ ;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -f_2(2\sin x_1) - x_2$$

$$|f_2| \leqslant 1$$

Khâu phi tuyến thứ nhất là đặc tính của xenxin :

$$f_1(x_1) = U_m \sin\Delta\theta = U_m \sin x_1$$

Khâu phi tuyến thứ hai là khuếch đại có bão hòa. Khâu phi tuyến thứ ba là đặc tính kiểu khe hở của bộ giảm tốc.

Mặt phẳng pha được mô tả bằng bốn vùng (tờ) khác nhau như ở hình 3.15.

Tờ (vùng) a. Là vùng tuyến tính khi có chênh lệch góc bé :

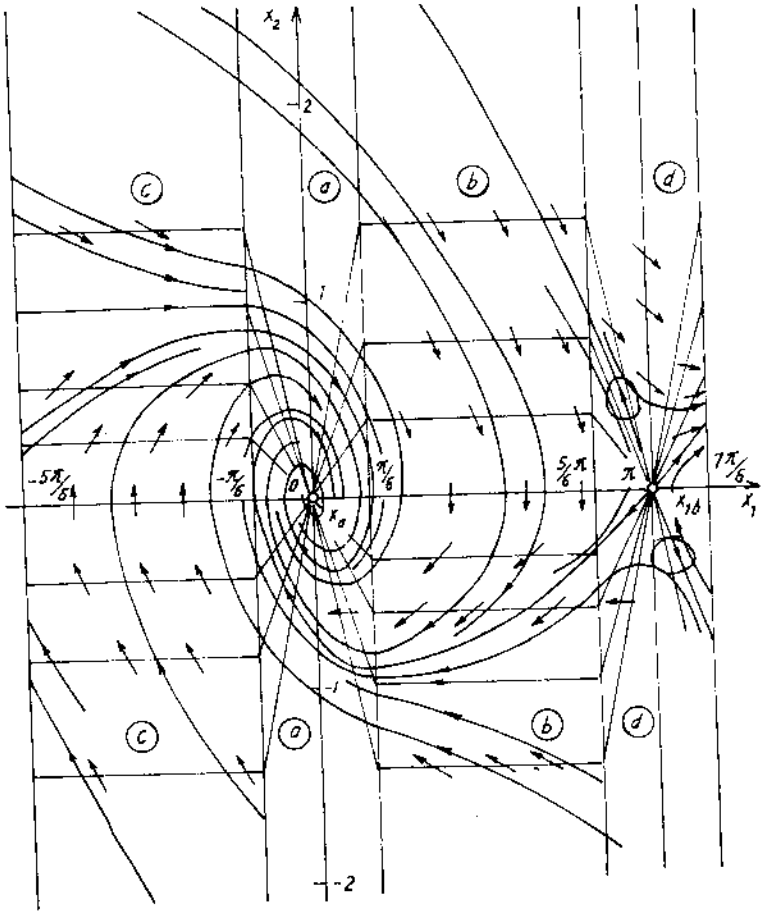
$$|2\sin x_1| \leq 1 \; ; \; \frac{d\sin x_1}{dx_1} > 0$$

Biên giới của vùng này là các đường thẳng đứng :

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \; ;$$

và $$x_1 = \arcsin\left(+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \, .$$

Trong phạm vi ấy : $$\left.\begin{aligned} dx_1/d\tau &= x_2 \; ; \\ dx_2/d\tau &= -x_1 - x_2 \, . \end{aligned}\right\}$$



Hình 3.15

Đó là phương trình của quỹ đạo pha hướng vào tiêu cự ở gốc tọa độ – điểm đặc biệt $x_{1s} = x_{2s} = 0$. Dao động có tỷ số tắt dần bằng 0,5.

Tờ (vùng) b. Đó là vùng bão hòa dương $f_2 = 1$ có giới hạn $\pi/6 < x_1 < \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.

$$\left.\begin{aligned} dx_1/d\tau &= x_2 \ ; \\ dx_2/d\tau &= -x_2 - 1 \end{aligned}\right\}$$

như ở hệ phương trình (3–31) với $\sigma = -1$; $x_{2s} = -1$. Quỹ đạo pha trong vùng bão hòa dương của khuếch đại và khi phần tuyến tính của hệ có tác động vào không đổi tương ứng với tốc độ quay đều của động cơ sẽ tiến đến đường thẳng đặc biệt : $x_2 = -1 = \text{const}$.

Tờ (vùng) c. Vùng bão hòa âm :

$$z_2 = -1, \ -\frac{5}{6}\pi < x_1 < \frac{\pi}{6} .$$

và

$$\left.\begin{aligned} dx_1/d\tau &= x_2 \ ; \\ dx_2/d\tau &= -x_2 + 1. \end{aligned}\right\}$$

Từ đó $\sigma = -1$; $x_{2s} = 1$ ứng với đường đẳng tà $x_2 = -(1-\chi)^{-1}$ như ở hình 3.15. Quỹ đạo pha vùng *c* đối xứng với vùng *b*.

Tờ (vùng) d. Vùng tuyến tính của góc quay quanh trị số π.

$$|2\sin x_1| \leqslant 1 \ ; \ \frac{d\sin x_1}{dx_1} < 0 .$$

Biên giới của vùng là các đường thẳng đứng :

$$x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \text{ và } x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi .$$

Trong vùng tuyến tính ấy, x_1 có thể được tính gần đúng : $\sin x_1 \approx \pi - x_1$, do đó :

$$\left.\begin{aligned} dx_1/d\tau &= x_2 \ ; \\ dx_2/d\tau &= x_1 - x_2 + \pi \ . \end{aligned}\right\}$$

Điểm đặc biệt $x_{1s} = \pi$; $x_{2s} = 0$ là điểm yên ngựa.

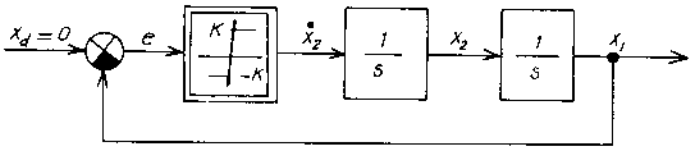
Tính liên tục của quỹ đạo pha từ vùng này sang vùng khác và tính liên tục của các đường đẳng tà như ở hình 3.15.

3.4.2. HỆ TUYẾN TÍNH TỪNG ĐOẠN VỚI ĐẶC TÍNH PHI TUYẾN GIÁN ĐOẠN – HỆ RƠLE

Hệ rơle là hệ thường gặp và đặc trưng cho loại thứ hai của tính chất tuyến tính từng đoạn.

3.4.2.1. Hệ rơle với đặc tính rơle hai vị trí

Ở hình 3.16 có sơ đồ khối của hệ rơ le mà khâu phi tuyến là rơle hai vị trí (rơle lý tưởng như ở hình 1.7c) điều khiển đối tượng là hai khâu tích phân. Đối tượng này có thể là động cơ một chiều kích từ độc lập như ở hình 2.3 tài liệu [18]. Trong thực tế hay dùng rơle để điều khiển góc quay của động cơ một chiều, chẳng hạn ($x_1 \equiv \theta$).



Hình 3.16

Theo hình 3.16 ta có thể có hệ phương trình sau :

$$dx_1/dt = y_2 \; ; \qquad dx_2/dt = \pm K. \tag{3-34}$$

Chia hai phương trình này cho nhau ta có :

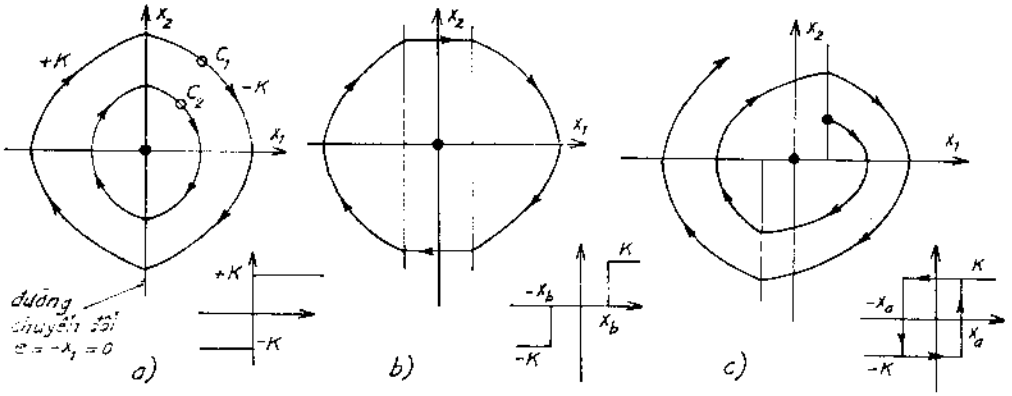
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \pm \frac{K}{y_2} . \tag{3-35}$$

Từ đó : $x_2 dx_2 \mp K dx_1 = 0$

Quỹ đạo pha có dạng parabôn với phương trình :

$$\frac{x_2^2}{2} \mp K x_1 = C \tag{3-36}$$

Tùy thuộc vào điều kiện đầu mà quỹ đạo pha là họ những đường parabôn khép kín như ở hình 3.17a. Đó là chế độ tự dao động ở hệ phi tuyến – dao động với biên độ không thay đổi. Đường chuyển đổi là trục x_2 tương ứng với $x_1 = 0$. Vì khi $x_1 = \varepsilon > 0$ thì $e = -\varepsilon < 0$ và quỹ đạo pha ứng với $-K$; còn khi $x_1 = \varepsilon < 0$ thì $e = -\varepsilon > 0$, quỹ đạo pha ứng với $+K$, rơle phải chuyển đổi vị trí từ $-K$ sang vị trí $+K$.



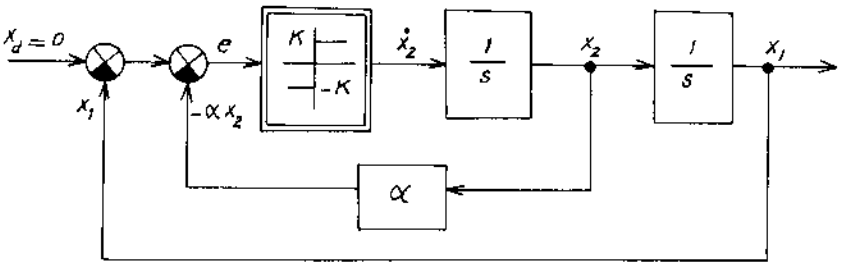
Hình 3.17

Bạn đọc hãy giải thích vì sao khi rơle có vùng kém nhạy (hay rơle ba vị trí như ở hình 1.8b) quỹ đạo pha cũng là đường cong khép kín (chế độ tự dao động), nhưng ở vùng kém nhạy ($\pm x_b$) thì quỹ đạo pha song song với trục hoành, còn khi rơle hai vị trí có trễ (hình 1.10c) thì quỹ đạo pha phân kỳ và hệ không ổn định.

Cả ba trường hợp trên đều không thể sử dụng hệ rơle như vậy để điều khiển vị trí vì hệ luôn dao động hoặc không ổn định. Do đó cần ổn định hệ bằng hồi tiếp cục bộ.

3.4.2.2. ổn định hóa hệ rơ le

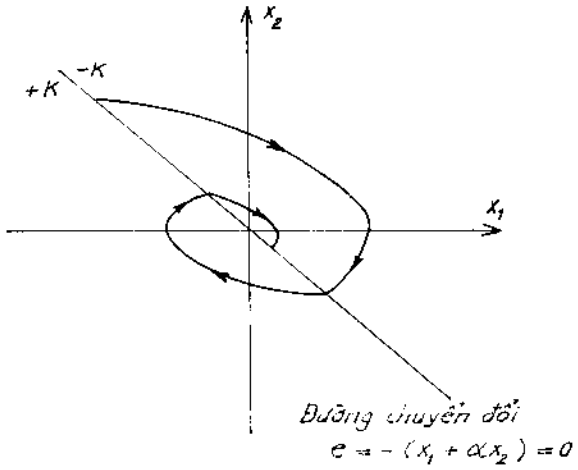
Ở hình 3.18 có sơ đồ khối của hệ rơle như ở hình 3.16 nhưng có dùng hồi tiếp âm tốc độ bằng khâu tỷ lệ α.



Hình 3.18

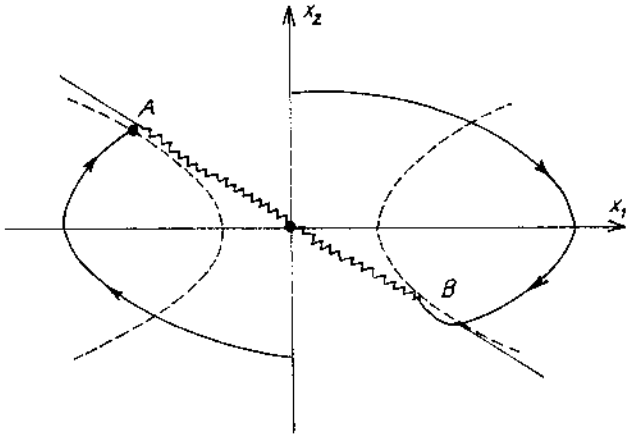
Trong trường hợp này, đường chuyển đổi không còn là trục x_2 mà là đường thẳng đi qua gốc trục như ở hình 3.19. Khi $e = -(x_1 + \alpha x_2) = 0$ là đường chuyển đổi thì về hai phía của nó là quỹ đạo pha ứng với +K

và –K như ở hình 3.19. Quỹ đạo pha hội tụ, quá trình là dao động tắt dần và tiến đến trạng thái cân bằng ở gốc tọa độ (với $x_d = 0$).



Hình 3.19

Nếu quan sát kỹ quỹ đạo pha với hệ số phản hồi lớn, ta thấy có một đoạn thẳng AB của đường chuyển đổi, trong phạm vi này chuyển động sẽ được thực hiện theo *chế độ trượt*, nghĩa là theo đường chuyển đổi mà không theo quỹ đạo pha.



Hình 3.20

Ở hệ rơle thực (có vùng kém nhạy nhất định) chuyển động sẽ theo đường gãy khúc như ở hình 3.20.

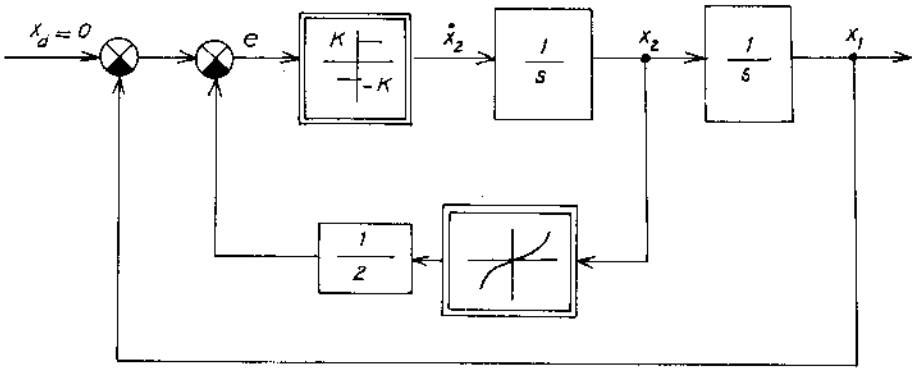
Ở chế độ trượt, hệ có hành vi như một hệ tuyến tính và chất lượng của hệ được nâng cao. Đó là một dạng của những hệ có cấu trúc biến đổi.

Mặc dù hệ có những ưu điểm quan trọng (tính bền vững khi thông số biến đổi) nhưng việc ứng dụng trong thực tế có những hạn chế như : cơ cấu làm việc ở chế độ rung nặng nề và khi bậc cao phải dùng một số khâu vi phân.

Tuy nhiên, thay vì rơle làm việc ở chế độ nặng nhọc, những cơ cấu điện tử như các bộ rung cho phép làm việc với tần số cao đã khắc phục được nhược điểm nói trên.

3.4.2.3. Chế độ tối ưu tác động nhanh

Quan sát đường chuyển đổi ở chế độ trượt có thể nghĩ ngay rằng, nếu đường chuyển đổi không có dạng đường thẳng mà cũng có dạng parabôn như quỹ đạo pha thì rơle chỉ đổi dấu một lần để đi đến trạng thái cân bằng và không có chế độ trượt. Sơ đồ được thực hiện bằng cách dùng khâu phi tuyến tính ở hồi tiếp cục bộ như ở hình 3.21. Đó là ý nghĩa của việc dùng các khâu phi tuyến để nâng cao chất lượng của hệ như đã nêu ở phần đầu. Có thể có nhiều cách để thực hiện mạch hồi tiếp phi tuyến nói trên (xem II.1.4 tài liệu [18]).



Hình 3.21

Bây giờ đường chuyển đổi có dạng :

$$e = -\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2}\,\mathrm{sign}x_2\right) = 0 \qquad (3\text{–}37)$$

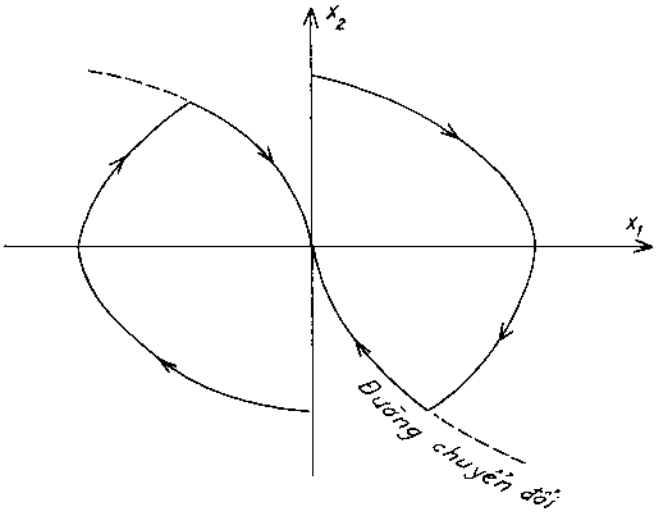
hay :

$$e = -\left(x_1 + \frac{x_2\,|\,x_2\,|}{2}\right) = 0$$

Ở tài liệu [18] có chứng minh hệ nói trên là tối ưu tác động nhanh.

3.4.2.4. Hệ có cấu trúc biến đổi

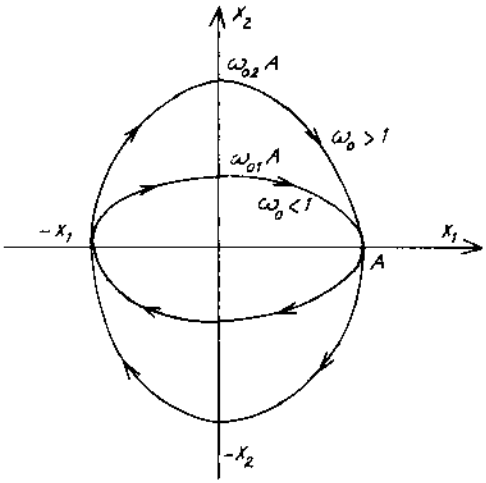
Ở ví dụ 3-1 có quỹ đạo pha của hệ tuyến tính bậc hai (hình 3.2). Tùy thuộc vào giá trị của ω_0 lớn hay bé hơn 1 mà hình dạng của elip



Hình 3.22

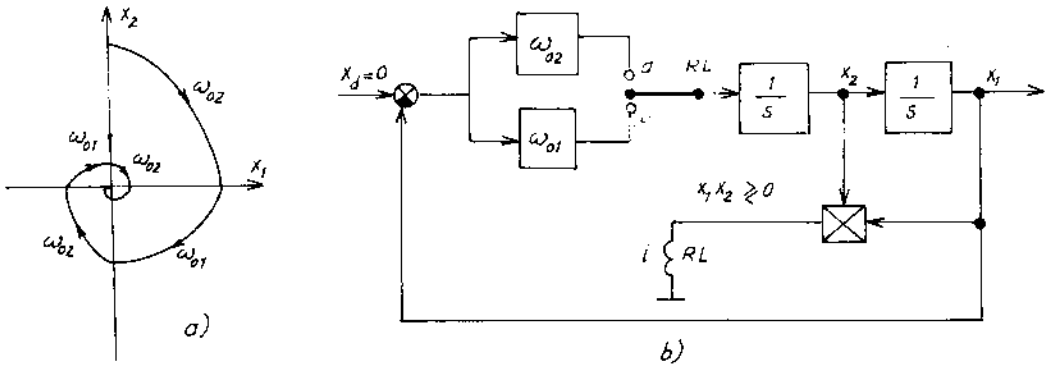
mô tả quỹ đạo pha của hệ khác nhau. Ở hình 3.23 có quỹ đạo pha cho hai trường hợp nói trên. Nếu lần lượt thay đổi các giá trị ω_0 sao cho quỹ đạo pha của hệ ngày càng xoáy vào gốc tọa độ, ta sẽ có dao động tắt dần như ở hình 3.24a.

Lưu ý rằng ở phần tư thứ nhất và thứ ba, tích của $x_1x_2 > 0$; còn ở ô phần tư thứ hai và thứ tư, tích của $x_1x_2 < 0$. Điều ấy được thực hiện theo sơ đồ khối như ở hình 3.24b. Khi dòng điện qua cuộn dây rơle dương ($x_1x_2 > 0$) tiếp điểm rơle đóng về phía *a* còn dòng điện qua cuộn dây âm ($x_1x_2 < 0$) tiếp điểm rơle đóng về phía *b*.



Hình 3.23

Một lần nữa ta thấy ý nghĩa của việc thêm khâu phi tuyến vào hệ điều khiển để cải thiện chế độ làm việc của nó.



Hình 3.24

3.5. DAO ĐỘNG HỖN LOẠN TRONG HỆ PHI TUYẾN

3.5.1. TÍNH HỘI TỤ CỦA CÁC PHƯƠNG PHÁP LẶP

Bắt đầu bằng một ví dụ. Short L. (1992) đã khảo sát hành vi của một quá trình lặp sau đây :

$$x_{r+1} = f(x_{2)} = -0{,}5(x_r^3 - 6x_r^2 + 9x_r - 6)\,,\ r = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3\text{-}38)$$

để giải phương trình $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$.

Phương trình trên có các đặc tính sau :

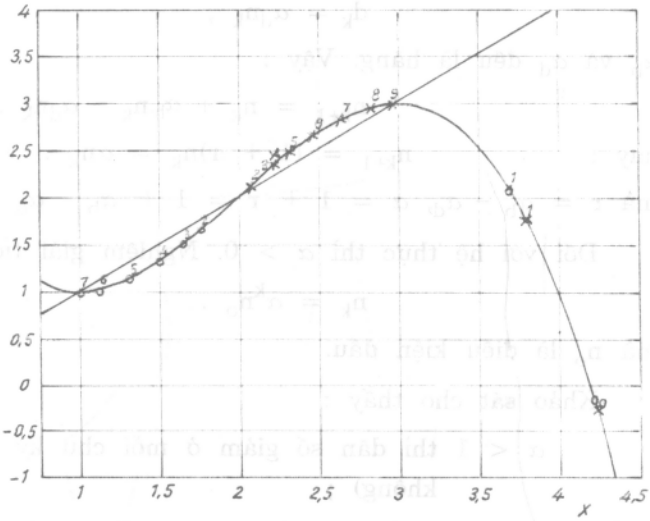
$$f'(1) = 0 \text{ và } f''(1) \neq 0,$$

$$f'(2) \neq 0.$$

$$f'(3) = 0 \text{ và } f''(3) \neq 0.$$

Vấn đề chính là xác định phạm vi xấp xỉ ban đầu để hội tụ về các nghiệm khác nhau. Để giản đơn, vẽ đường thẳng $y = x$ và $y = f(x)$ có độ nghiêng bằng 1. Phân tích đồ thị cho thấy, nếu điểm xuất phát nằm trong phạm vi từ 1 đến 1,43 (gần đúng) thì các điểm ấy hội tụ về nghiệm bằng 1 ; còn trong phạm vi từ 2,57 (gần đúng) đến 3 thì hội tụ về nghiệm bằng 3. Short L. cũng khảo sát nhiều phạm vi khác mà một số điều kiện ban đầu đã dẫn đến dao động hỗn loạn ở quá trình lặp. Ở hình 3.25 có ví dụ cho trường hợp trên.

Với điểm xuất phát x_o = 4,236067968 thì điểm hội tụ là nghiệm x = 3 (các điểm 0, 1, 2, ..., 9 có dấu "o"). Nếu lấy điểm xuất phát khác trước không đáng kể, nghĩa là : x_0 = 4,236067970 thì điểm hội tụ lại là nghiệm x = 1 (các điểm 0, 1, 2, ..., 9 có dấu "+"). Như vậy một sự thay đổi nhỏ của điều kiện đầu cũng dẫn đến đáp ứng rất khác nhau là *tính hỗn loạn* của hệ (tính nhạy cảm với điều kiện đầu).



Hình 3.25

3.5.2. MÔ HÌNH PHÁT TRIỂN DÂN SỐ

Trước đây nhiều nhà khoa học cho rằng mô hình giản đơn thì đáp ứng giản đơn và hành vi của hệ cũng giản đơn. Tuy nhiên khoảng ba mươi năm trước, một số nhà khoa học và kỹ sư đã khám phá ra rằng, những mô hình giản đơn cho phép đoán trước được hành vi của nó trong một thời gian ngắn nhưng tính nhạy cảm với điều kiện đầu không cho phép dự đoán được hành vi của nó cho thời gian dài. Đó là trường hợp của mô hình dự báo thời tiết của Lorenz (1963) hay mô hình phát triển dân số của May (1976).

Giả thiết rằng dân số trong một chu kỳ thời gian nào đó là hàm của chu kỳ thời gian trước đó. Mô hình toán học có dạng :

$$n_{k+1} = n_k + b_k - d_k. \qquad (3\text{–}39)$$

trong đó : n_k – dân số ở đầu chu kỳ k ;

b_k – số người được sinh ra ở chu kỳ k ;

d_k – số người chết ở chu kỳ k.

Giả thiết là số người sinh và tử ở chu kỳ k tỷ lệ với dân số ở đầu chu kỳ :

$$b_k = \alpha_b n_k \ , \qquad (3\text{–}40)$$

$$d_k = \alpha_d n_k \ , \qquad (3\text{-}41)$$

α_b và α_d đều là hằng. Vậy :

$$n_{k+1} = n_k + \alpha_b n_k - \alpha_d n_k \ , \qquad (3\text{-}42)$$

hay :

$$n_{k+1} = (1 + r)n_k = \alpha n_k \ . \qquad (3\text{-}43)$$

mà $r = \alpha_b - \alpha_d$, $\alpha = 1 + r = 1 + \alpha_b - \alpha_d$.

Đối với hệ thực thì $\alpha > 0$. Nghiệm giải tích của (3-43) là :

$$n_k = \alpha^k n_o \ . \qquad (3\text{-}44)$$

mà n_o là điều kiện đầu.

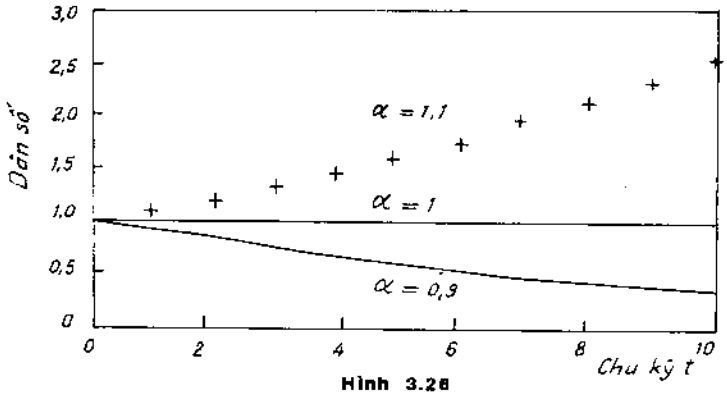
Khảo sát cho thấy :

$\alpha < 1$ thì dân số giảm ở mỗi chu kỳ thời gian (hội tụ đến không) ;

$\alpha > 1$ thì dân số tăng ở mỗi chu kỳ thời gian ($\rightarrow \infty$) ;

$\alpha = 1$ thì dân số không thay đổi.

Kết quả được thể hiện ở hình 3.26. Kết quả này là hợp lý ứng với ba trường hợp : sinh < tử, sinh = tử và sinh > tử. Mô hình của Malthus ở thế kỷ 19 dự báo tăng dân số ($\alpha > 1$) theo hàm mũ. Tuy nhiên việc tăng dân số đến vô cùng là không thực tế vì trong thực tế luôn có những hạn chế của dân số cực đại.



Hình 3.26

Vì vậy thay vì (3-39) dùng mô hình sau :

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k) \qquad (3\text{-}45)$$

Vì (3-45) là phương trình động học gián đoạn, có thể xác định trạng thái xác lập bằng cách tìm nghiệm khi $k \rightarrow \infty$. Từ (3-45) ta có :

$$x_{k+1} = \alpha x_k - \alpha x_k^2 . \qquad (3\text{-}46)$$

Ở trạng thái xác lập $x_{k+1} = x_k$ nên :

$$x_s = \alpha x_s - \alpha x_s^2 , \qquad (3\text{-}47)$$

hay :

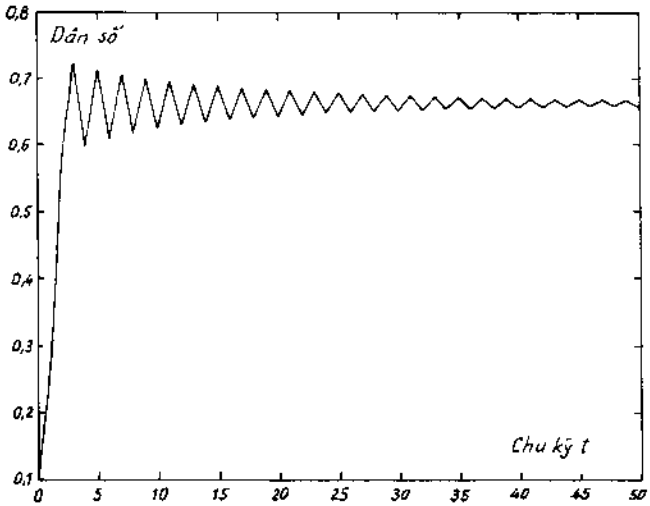
$$\alpha x_s^2 - (\alpha - 1)x_s = 0 . \qquad (3\text{-}48)$$

Vậy nghiệm là :

$$x_s = 0 \text{ và } \frac{\alpha - 1}{\alpha} \qquad (3\text{-}49)$$

Từ (3–45) thấy rằng, nếu dân số ban đầu bằng 0 thì sau đó vẫn là 0, còn nếu điều kiện đầu khác 0, dân số sẽ hội tụ đến $(\alpha - 1)/\alpha$ (xác lập). Tuy nhiên việc xác định dân số trong thời gian dài (xác lập) cũng khá phức tạp. Ở bảng 3–1 có nêu bốn trường hợp của thông số α khác nhau và trạng thái xác lập khác 0 theo (3–49).

Mỗi trường hợp ở bảng 3– 1 này tương ứng với trạng thái động học khác nhau. Ví dụ trường hợp *1* ứng với trạng thái ổn định tiệm cận, trường hợp *2*, *3* là dao động có chu kỳ còn trạng thái *4* là dao động hỗn loạn.



Hình 3.27

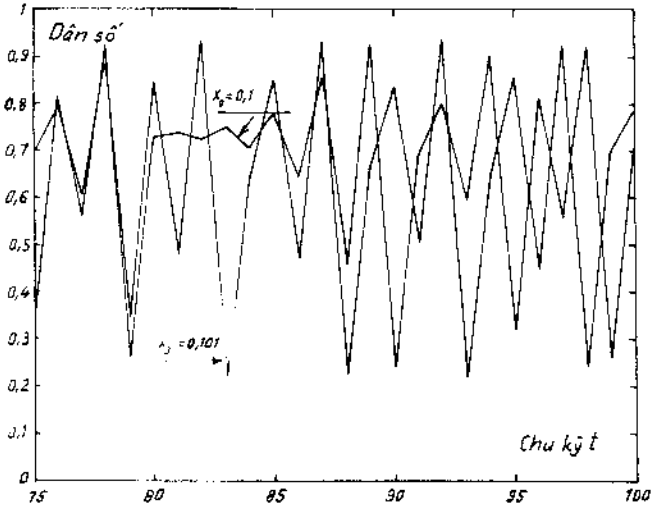
Bảng 3-1

Trường hợp	α	xs
1	2,95	0,6610
2	3,20	0,6875
3	3,50	0,7143
4	3,75	0,7333

Ví dụ ở trường hợp thứ nhất, (3–45) có dạng :

$$x_{k+1} = 2{,}95x_k(1 - x_k).$$

Ở bảng 3-2 có các thông số tính toán với điều kiện đầu $x_0 = 0{,}1$, còn ở hình 3.27 là dao động của dân số trước khi hội tụ đến trạng thái xác lập, tương ứng với $x = 0{,}6610$.



Hình 3.28

Bảng 3-2

Bước k	x_k	x_{k+1}
0	0,1	0,2655
1	0,2655	0,5753
2	0,5753	0,7208
3	0,7208	0,5937
4	0,5937	0,7116
5	0,7116	0,6054
...	.....	.....
∞	0,6610	0,6610

Ở hình 3.28 là trường hợp thứ tư với $\alpha = 3{,}75$. Đây lại là trường hợp dao động hỗn loạn và với điều kiện đầu khác nhau không đáng kể : $x_0 = 0{,}100$ và $0{,}101$.

3.5.3. PHƯƠNG TRÌNH LORENZ

Năm 1961, giáo sư khí tượng học Edward Lorenz khảo sát mô hình khí quyển đã đơn giản hóa gồm 12 phương trình. Đó là quan hệ giữa nhiệt độ, áp suất, tốc độ và hướng gió v.v... Ông thực hiện mô hình theo phương pháp số và xác định được hành vi của các biến nhưng không bao giờ kết quả ấy lặp lại như trước. Một hôm ông quyết định khảo sát trong thời gian dài hơn trước. Thay vì bắt đầu lại từ đầu, ông dùng các điều kiện đầu sẵn có. Một thời gian sau ông trở lại, ông ngạc nhiên thấy hệ không còn hội tụ nữa. Sau khi khẳng định độ chính xác của máy tính, ông khám phá ra tính chất quan trọng của một số hệ phi tuyến là rất nhạy cảm với điều kiện đầu.

Để rút ra đặc điểm của loại hệ phi tuyến ấy một cách đơn giản hơn, ông dùng mô hình khí quyển với ba phương trình cơ bản sau :

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \; ; \tag{3-50}$$

$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3 \; ; \tag{3-51}$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \, . \tag{3-52}$$

Tuyến tính hóa các phương trình trên ở lân cận trạng thái xác lập ta có ma trận Jacobian (2- 19) :

$$J_x = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-x_{3s} & -1 & -x_{1s} \\ x_{2s} & x_{1s} & -b \end{bmatrix} . \tag{3-53}$$

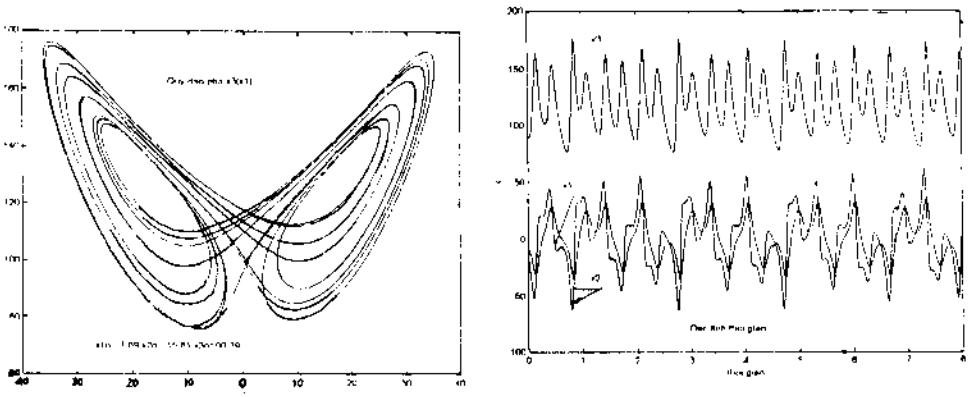
Đối với nghiệm : $x_{1s} = x_{2s} = x_{3s} = 0$, ma trận Jacobian có dạng :

$$J_x = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} . \tag{3-54}$$

Điều kiện ổn định được xác định từ nghiệm của $\det(\lambda I - J_x) = 0$.

Trong trường hợp nghiệm không thì điều kiện ổn định tương ứng với $\det(\lambda I - J_x) = 0$ mà :

$$\lambda I - J_x = \begin{bmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ x_{3s-r} & \lambda+1 & x_{1s} \\ -x_{2s} & -x_{1s} & \lambda+b \end{bmatrix} . \tag{3-55}$$



Hình 3.29

Trong trường hợp dao động hỗn loạn, mô hình hóa được thực hiện với r = 126,52 (trị số giới hạn ổn định được tính bằng r_g = 24,74). Ở hình 3.29a có quỹ đạo pha $x_3(x_1)$ và ở hình 3.29b có đặc tính $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ với các thông số sau : σ = 10 ; b = 8/3 ; x_{01} =− 7,69 ; x_{02} =− 15,61 ; x_{03} = 90,39 ; thời gian thực hiện là 8 sec ; độ chính xác bằng 0,000005.

3.6. DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ KHẢO SÁT HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Một số ví dụ ứng dụng.

Ví dụ 3 – 6. Giải phương trình phi tuyến (3–38) :

$$x_{r+1} = f(x_r) = -0,5(x_r^3 - 6x_r^2 + 9x_r - 6),\ r = 0, 1, 2, \ldots$$

bằng phương pháp lặp.

Dùng chương trình MATLAB sau :

```
>> x= .75 : .1 : 4.5 ; f= -0.5*(x.^3 -6*x.^2+ 9*x-6) ;
>> plot(x,f) ; axis ([.75,4.5,-1,4]) ;
>> hold on ; plot(x,x) ;
>> xlabel('x') ; ylabel('f(x)') ; grid on ;
>> ch=['o','+'] ; ty=0 ;
>> num= ['0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9'] ;
>> for xl={4.236067970 4.236067968}
      ty=ty+1 ;
      for i=1:19
       x2= - 0.5*(xl^3-6*xl^2+ 9*x1-6) ;
       if i==10
        text (4.25, - .2, '0') ;
       elseif i>10
        text (x1, x2+ .1, num (i-9) );
       end;
       plot (x1,x2,ch(ty)) ; x1=x2 ;
      end ;
    end ;
>> hold off
```

Chương trình trên cho kết quả như ở hình vẽ 3.25. Sự khác nhau rất bé ở điều kiện đầu x_0 đã dẫn đến các điểm hội tụ khác nhau. Đó là đặc điểm của hệ phi tuyến tính.

Ví dụ 3-7. Mô hình phát triển dân số (3-45) :

$$x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k)$$

Như ở bảng 3-1, khi α = 2,95 thì hệ ổn định và kết quả mô hình hóa như ở hình 3.27. Với chương trình trên, khi α = 3,75 có dao động hỗn loạn. Ở hình 3.28 có đặc tính của x với điều kiện đầu khác nhau : 0,1 và 0,101.

```
>> % Mo hinh phat trien dan so
>> % n-thoi gian cua chu ky
>> n = 50
>> alpha= 2.95 ;
>> % xinit-Dan so ban dau
>> xinit=0.1 ;
>> x(1) = xinit ;
>> time(1) = 0 ;
>> for k = 2 :n+1 ;
       time(k) = k-1 ;
       x(k)=alpha*x(k-1)*(1- x(k-1)) ;
   end
>> plot (time,x)
```

Ví dụ 3-8. Phương trình Lorenz (3-50, 3-51, 3-52). Để giản đơn, dùng chương trình con sau khi mở "M-file" cho hệ phương trình cụ thể sau :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 10(x_2 - x_1) ; \\ \dot{x}_2 &= 126{,}52x_1 - x_2 - x_1x_3 ; \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - \frac{8}{3}x_3 . \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}56)$$

Hệ phương trình trên tương ứng với trường hợp dao động hỗn loạn.

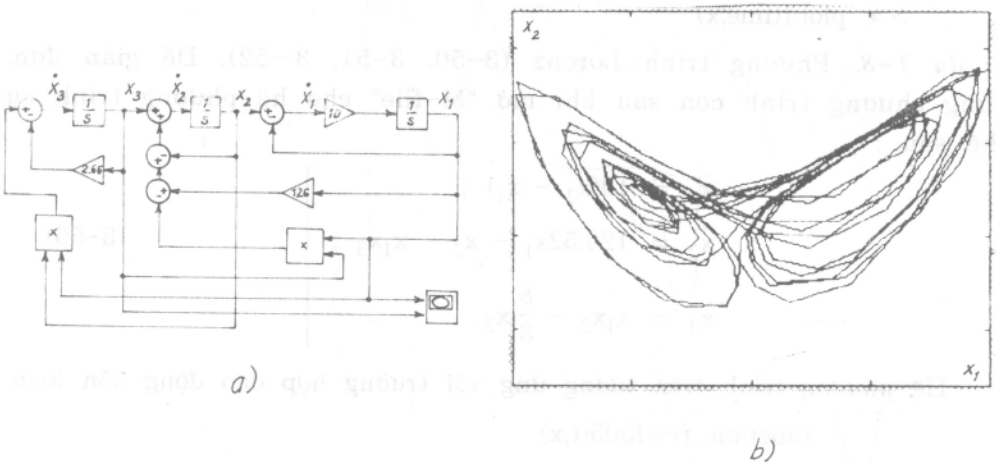
```
function fv=f505(t,x)
global r
```

```
fv=zeros(3,1) ;fv(1)=10*(x(2)- x(1)) ;
fv(2)=r*x(1)-x(2)-x(1)*x(3) ; fv(3)=x(1)*x(2) -8*x(3)/3 ;
```

Với điều kiện đầu x = $[-7{,}69\ -15{,}61\ \ 90{,}39]^T$, ta lập chương trình sau :

```
>> % Giai phương trinh Lorenz
>> global r
>> r=126.52 ;
>> simtime=8 ;
>> acc=0.000005 ;
>> initx=[- 7.69 - 15.61  90.39]' ;
>> tspan=[0 simtime] ;
>> options=odeset('RelTol',acc) ;
>> % Goi ode45 de giai p.trinh
>> [t x]=ode45('f505',tspan,initx,options) ;
>> figure(1) ; plot(t,x) ;
>> xlabel('thoi gian') ; ylabel('x') ;
>> figure(2) ; plot(x(:,1),x(:,3)) ;
>> xlabel('xl') ; ylabel('x3') ;
```

Quỹ đạo pha và đặc tính thời gian như ở hình 3.29a, b. Mô hình phi tuyến (hay hệ điều khiển nói chung) có thể thực hiện giản đơn bằng cách dùng SIMULINK (xem Phụ lục) hay TUTSIM [18].



Hình 3.30

Phương trình (3-56) được thực hiện theo sơ đồ khối như ở hình 3.30a và quỹ đạo pha như ở hình 3.30b.

Ở hình 3.31 còn có quỹ đạo pha nói trên được mô hình hóa theo TUTSIM.

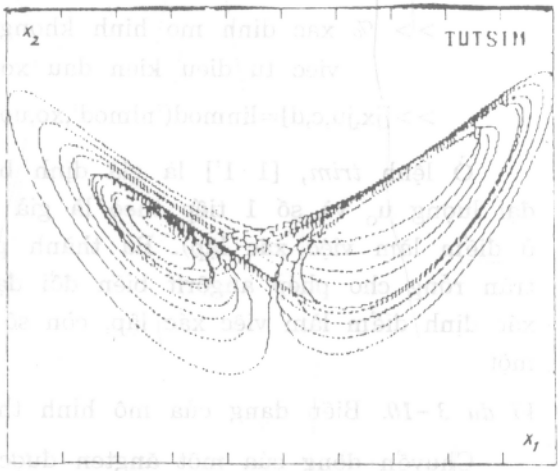
Ví dụ 3-9. Ở ví dụ 2-2 có hệ phương trình phi tuyến (2-6) :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \; ; \\ \dot{x}_2 &= -2x_1^3 - 1{,}5x_1x_2 + u \end{aligned}\right\}$$

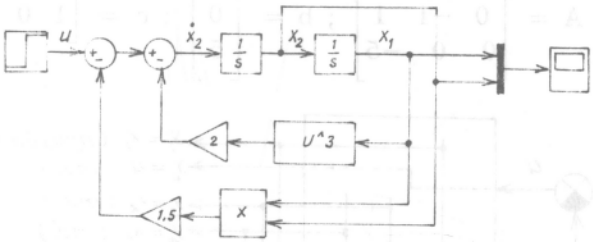
Sau khi xác định điều kiện đầu $x_o = [0{,}7937 \;\; 0]^T$ và $u_o = [0 \;\; 1]$, ta có hệ phương trình tuyến tính hóa (2-22) :

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3{,}78 & -1{,}19 \end{bmatrix} x^* + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^* .$$

Kết hợp MATLAB và SIMULINK cho phép đơn giản hóa việc so sánh hệ phi tuyến và tuyến tính hóa.



Hình 3.31



Hình 3.32

Điểm làm việc có thể được xác định theo phương pháp dùng SIMULINK là phương pháp dùng sơ đồ khối ở chương trình MATLAB :

- Sau khi dùng lệnh SIMULINK3, có thể dùng các khối có sẵn trong chương trình để thực hiện việc mô hình hóa theo hình PL2. Khâu phi tuyến x^3 được thực hiện bằng khối "Fcn" chứa hàm mũ u^3. Sơ đồ khối như ở hình 3.32.

• Lưu lại chương trình với tên *nlmod*, chẳng hạn ở "M-file". Trong chương trình có các lệnh *trim* và *linmod* ; có thể dùng *help trim* và *help limod* để biết nội dung lệnh.

• Dùng MATLAB thực hiện các lệnh sau :

```
>> % xac dinh diem lam viec
>> [xo,uo,yo,dx]=trim('nlmod',[1 1'],1,1,[ ],1,[ ])
>> % xac dinh mo hinh khong gian trang thai tại diem lam
      viec tu dieu kien dau xo và uo
>>[jx,ju,c,d]=linmod('nlmod',xo,uo)
```

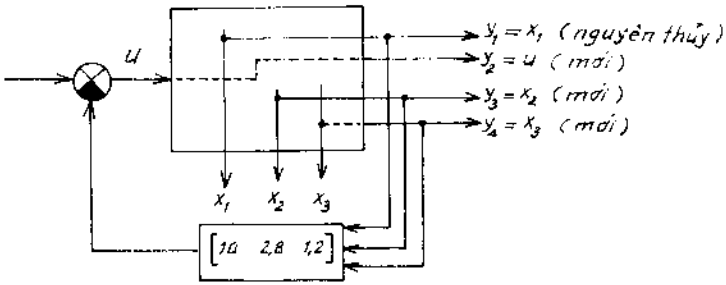
Ở lệnh *trim*, [1 1'] là giả định ban đầu của x_0, số 1 đầu tiên là đại lượng u_0 và số 1 tiếp theo là giả định ban đầu của y_0 (tín hiệu ra ở điểm làm việc xác lập). Ba thành phần còn lại : [ ],1, [ ] có hai ma trận rỗng cho phép angôrit biến đổi đại lượng x_0 và y_0 trong quá trình xác định điểm làm việc xác lập, còn số 1 ứng với u_0 được xác định bằng một.

Ví dụ 3-10. Biến dạng của mô hình theo không gian trạng thái.

Chuyển động của một ăngten được mô tả bởi :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu\ ; \\ y &= cx + du\,. \end{aligned}\right\}$$

với $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\ ;\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}\ ;\ c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ ;\ d = 0$$



Hình 3.33

Hệ có một vào một ra, đó là mạch thuận như ở hình 3.33. Nếu dùng biến a, b, c, d để mô tả A, b, c, d theo MATLAB, các lệnh :

```
>> a = [0 1 0 ; 0 -1 1 ; 0 0 -5] ;
>> b = [0 ; 0 ; 5] ; c = [1 0 0] ; d = 0 ;
>> step (a,b,c,d) ; grid
```

sẽ chỉ cho đặc tính đầu ra của hệ, đó là góc quay của ăngten (rad). Nếu cần có các đáp ứng trạng thái khác như tốc độ và gia tốc ăngten, dùng các lệnh :

```
>> [y,x,t] = step (a,b,c,d) ;
>> plot (t,x) ; grid
```

Khi cần quan sát tín hiệu vào (bậc thang đơn vị) dùng tín hiệu ra thứ hai. Bây giờ c và d mô tả phương trình tín hiệu ra :

$$y = cx + du = [1\ 0\ 0]\,x' = x$$

Hệ phương trình mới sẽ là :

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0u\ ; \\ y_2 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1u\ . \end{aligned}\right\}$$

hay dạng ma trận : $y = cx + du$.

với $$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\ ;\ c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Biến dạng của mô hình theo MATLAB bây giờ là :

```
>> c = [c ; 0 0 0] ; % thêm hàng 0 vào c
>> d = [d ; 1] ; % hàng mới bằng 1 được thêm vào d, nối tín
                  hiệu vào với tín hiệu ra thứ hai
>> step (a,b,c,d) ;
```

hoặc

```
>> [y,x,t] = step (a,b,c,d)
>> plot (t,y) ; grid.
```

Để thêm biến trạng thái vào tín hiệu ra mới, một hàng 0 được thêm vào ma trận D cho mỗi tín hiệu ra và ở ma trận C một hàng mới được thêm vào với trị số bằng 1 ở biến trạng thái tương ứng (những trị số khác bằng 0).

Lệnh "augstate" sẽ tự động biến mọi trạng thái thành tín hiệu ra mới nhưng thường không cần thiết. Trong ví dụ trên để có đủ bốn tín hiệu ra, ta dùng :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

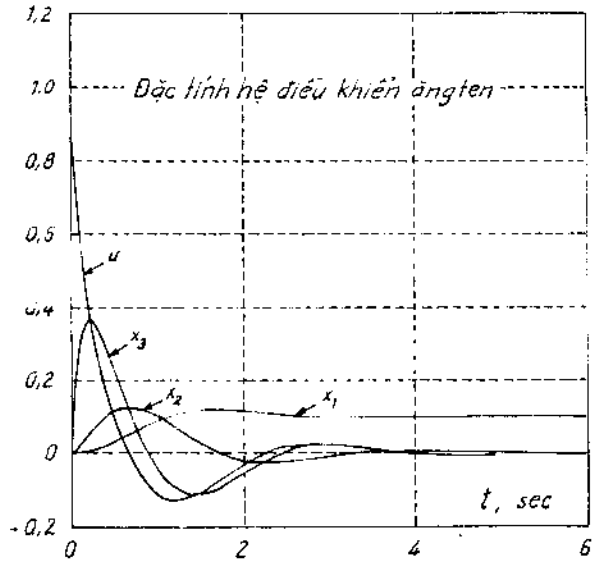
Dùng lệnh :

```
>> c = [c ; 0 1 0 ; 0 0 1] ; d = [d ; 0 ; 0] ;
>> [y,x,t] = step (a,b,c,d) ;
>> plot (t,y) ; grid.
```

Trong trường hợp hệ kín, ví dụ, ở hệ trên dùng vectơ hồi tiếp k = [10 2.8 1.2] đối với các biến trạng thái x_1, x_2, x_3 (hay y_1, y_3, y_4), dùng lệnh :

```
>> [ac,bc,cc,dc] = feedback (a,b,c,d,[ ],[ ],[ ],
                    [10 2.8 1.2], -1, [1 3 4] ;
>> [y,x,t] = step (ac, bc, cc, dc) ;
>> plot (t,y) ; grid
```

Đặc tính của hệ ăngten ở ví dụ 3-10 như ở hình 3.34. Ở feedback a, b, c, d là không gian trạng thái của mô hình [ ], [ ], [ ], [10 2.8 1.2] là mô hình trạng thái của hồi tiếp, -1 là hồi tiếp âm còn vectơ [1 3 4] là tín hiệu ra ở mạch thuận.



Hình 3.34

Ví dụ 3-11. Với hệ tuyến tính hóa ở ví dụ 2-2 và 3-9 mô tả bởi phương trình (2-22), tín hiệu vào $u_o = -0,1$, dùng các lệnh sau :

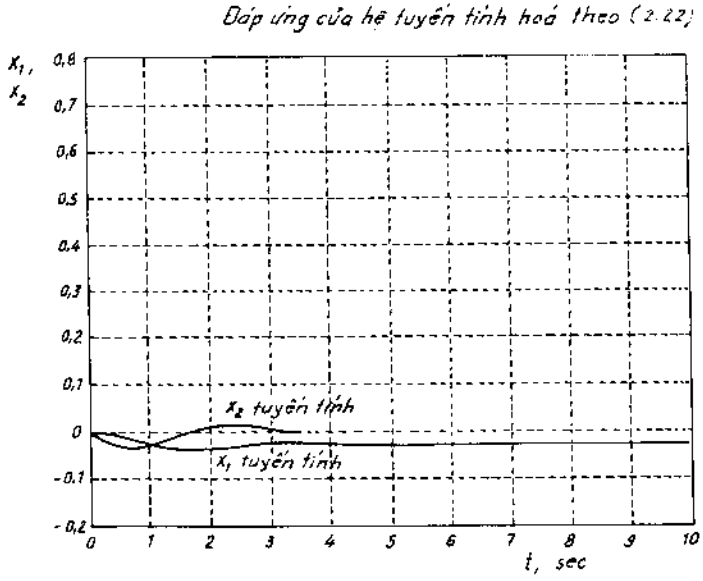
```
>>a = [0 1; - 3.78 - 1.19] ; b=[0 ; -0.1] ;
>> c = [1 0]; d=0 ;
>>[y,x,t]=step(a,b,c,d) ;
>> plot(t,x) ; grid
```

Đặc tính x_1 và x_2 như ở hình 3.35 và giống như kết quả mô hình hóa ở hình 2.4b.

Ví dụ 3-12. Xác định đáp ứng của hệ có điều kiện đầu cho trước :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

hay : $\dot{x} = Ax, \; x(0) = x_o.$



Hình 3.35

Xác định đáp ứng của hệ tương ứng với giải hệ phương trình sau :

$$\dot{z} = Az + Bu \; ;$$

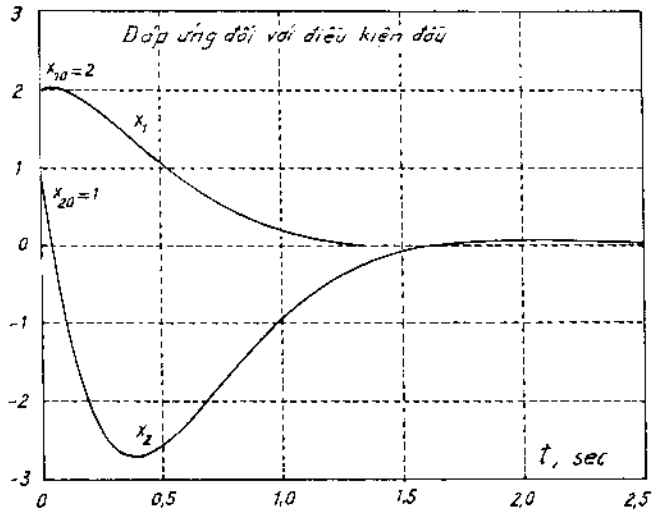
$$x = Az + Bu$$

mà $$B = x(0)u = 1(t)$$

Dùng các lệnh sau :

```
>>A = [0 1; -10 -5] ;
>> B = [2; 1] ;
>> [x,z,t]=step(A,B,A,B) ;
>> x1=[1 0]*x' ;
>> x2=[0 1]*x' ;
>> plot(t,x) ; grid
>> title('Dap ung doi voi dieu kien dau')
>> xlabel ('t sec')
>> ylabel ('x1,x2')
```

Đáp ứng x_1 và x_2 ở ví dụ trên như hình 3.36.



Hình 3.36

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài tập 3-1. Cho hệ phương trình :

$$\dot{x}_1 = -x_1 \;;$$

$$\dot{x}_2 = -4x_2.$$

Điểm cân bằng có ổn định không ?

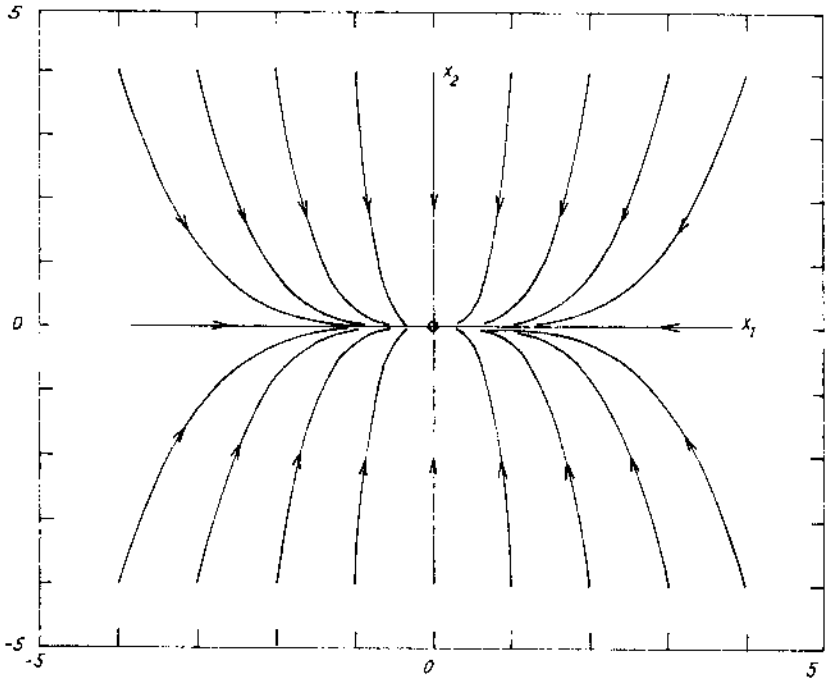
Đáp án :

Nghiệm của hệ phương trình trên là :

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t} \;;$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{-4t} \;;$$

Đó là hệ ổn định với mọi điều kiện đầu có quỹ đạo pha như ở hình 3.37.



Hình 3.37

Bài tập 3-2 Cho hệ phương trình :

$$\dot{x}_1 = -x_1 \ ;$$

$$\dot{x}_2 = 4x_2 \ .$$

Điểm cân bằng có ổn định không ?

Đáp án :

Nghiệm của hệ phương trình trên là :

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t} \ ;$$

$$x_2(t) = x_{20}e^{4t} \ ;$$

Đó là hệ không ổn định trừ trường hợp $x_2 = 0$ như ở hình 3.38.

Bài tập 3-3 Cho hệ phương trình sau :

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \ ;$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2.$$

hay $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}$ với $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Hệ có ổn định không ?

Đáp án :

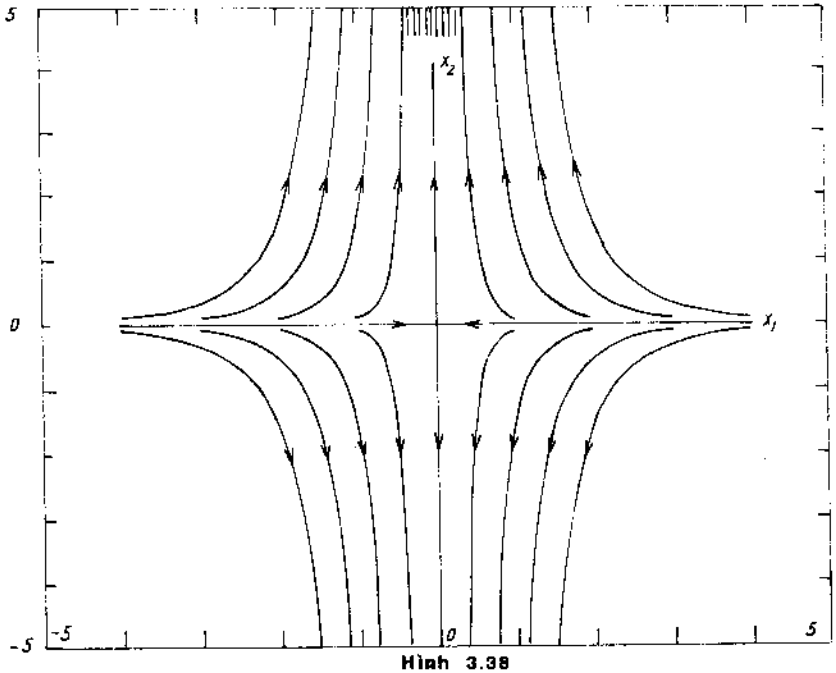
Giá trị riêng được xác định bởi :

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 2 = 0 .$$

$$\lambda_1 = -1{,}5616 \ ; \ \lambda_2 = 2{,}5616.$$

Vectơ riêng tương ứng là :

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2703 \\ -0{,}9628 \end{bmatrix} ; \ \xi_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8719 \\ 0{,}4896 \end{bmatrix}$$



Hình 3.38

Vì với $\lambda_1 < 0$, ξ_1 là không gian con ổn định ; còn với $\lambda_2 > 0$, ξ_2 là không gian con không ổn định. Vectơ riêng xác định đường phân cách trạng thái đặc trưng của quỹ đạo pha. Ở hình 3.39 có quỹ đạo pha dạng yên ngựa.

Bài tập 3–4 Cho hệ phương trình :

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \ ;$$

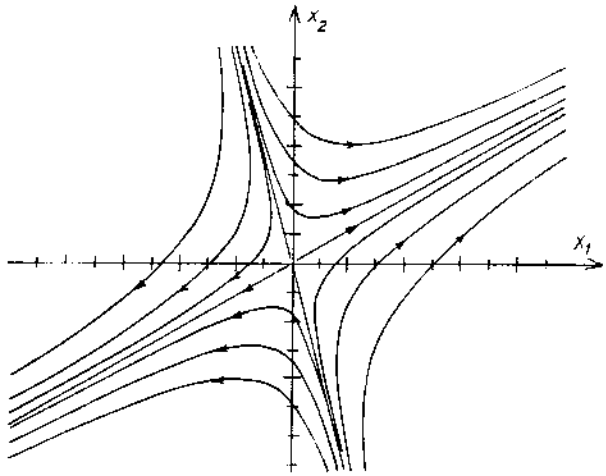
$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2.$$

hay $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ với } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hệ có ổn định không ?

Đáp án :

Giá trị riêng $\lambda = 1 \pm 2j$. Hệ không ổn định vì phần thực của nghiệm phức dương. Quỹ đạo pha dạng tiêu cự không ổn định như ở hình 3.40.



Hình 3.39

Bài tập 3–5 Cho hệ phương trình sau :

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \;;$$

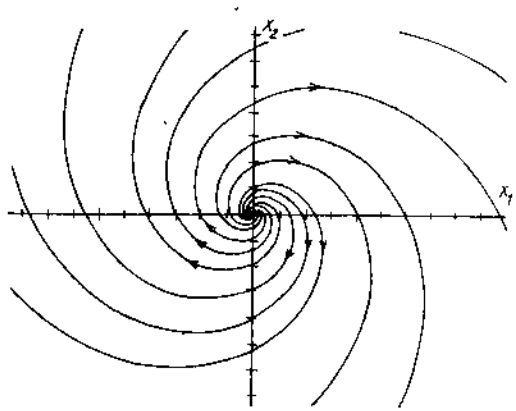
$$\dot{x}_2 = 4x_1 + x_2$$

hay $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ với $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Vẽ quỹ đạo pha của hệ trên.

Đáp án :

Giá trị riêng $\lambda = 0 \pm 1{,}7321j$. Quá trình là dao động với biên độ không đổi vì có phần thực ở giá trị riêng bằng 0. Điểm cân bằng là tâm như ở hình 3.41.

Chú ý : Các bài tập từ 3–1 đến 3–5 nhằm khảo sát quỹ đạo pha của hệ tuyến tính hay đã tuyến tính hóa khi có chênh lệch bé khỏi trạng thái cân bằng (3.2). Các quỹ đạo pha khác nhau tùy thuộc vị trí phân bố nghiệm như ở hình 3.9.



Hình 3.40

Bài tập 3–6 Cho hệ phương trình sau :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(x_1 + 1) \;; \qquad (3\text{-}57)$$

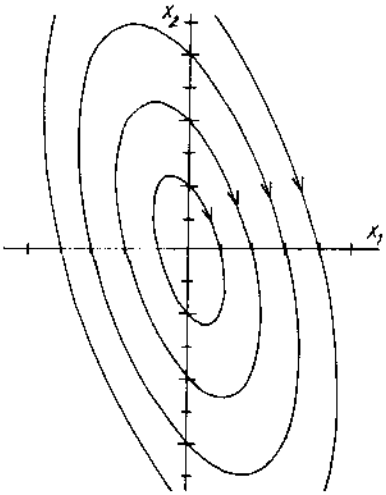
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(x_2 + 3). \quad (3\text{-}58)$$

Phân tích ổn định của các trạng thái cân bằng.

Đáp án :

Tuyến tính hóa (3-57) và (3-58) ta có ma trận Jacobian sau :

$$J_x = \begin{bmatrix} x_{2s} & x_{1s} + 1 \\ x_{2s} + 3 & x_{1s} \end{bmatrix}.$$



Hình 3.41

Trường hợp tâm thường (điểm cân bằng 1) :

$x_{1s} = x_{2s} = 0$:

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giá trị riêng $\lambda_1 = -\sqrt{3}$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$. Đó là trường hợp quỹ đạo pha dạng yên ngựa như ở hình 3.42.

Vectơ riêng ổn định là : $\xi_1 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,866 \end{bmatrix}$,

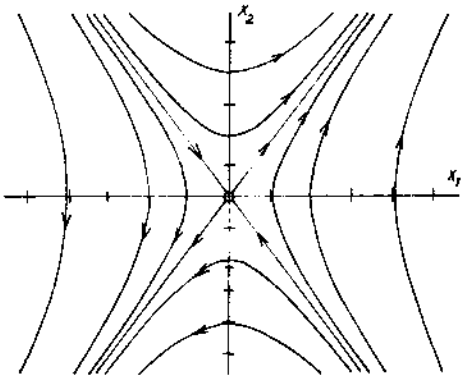
Vectơ riêng không ổn định là : $\xi_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,866 \end{bmatrix}$.

Trường hợp không tâm thường (điểm cân bằng 2) :

$x_{1s} = -1$, $x_{2s} = -3$

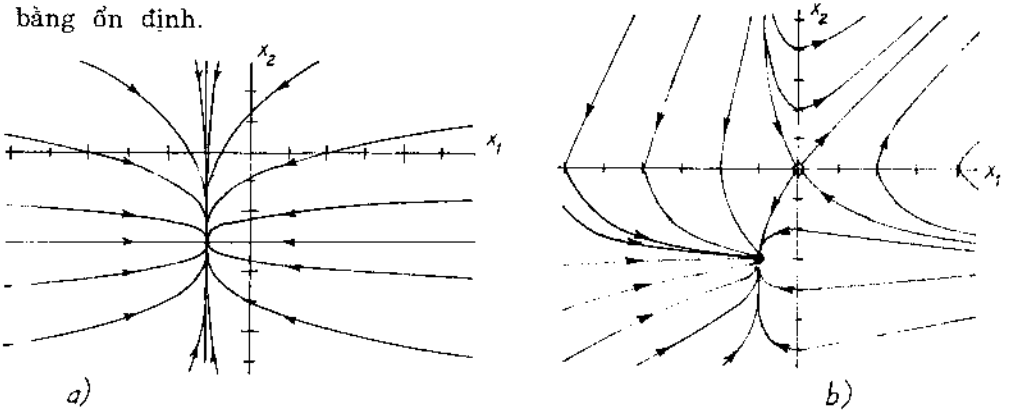
$$J_x = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Giá trị riêng $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$. Đó là trường hợp quỹ đạo pha dạng nút ổn định, cả hai giá trị riêng đều thực và âm. Ở hình 3.43a là quỹ đạo pha của hệ tuyến tính hóa quanh điểm cân bằng "*".



Hình 3.42

Quỹ đạo pha của hệ phi tuyến như ở hình 3.43b. Ngoài phần phía phải của điểm yên ngựa, các quỹ đạo pha được "hấp dẫn" về điểm cân bằng ổn định.



Hình 3.43

Bài tập 3-7 Phương trình mô tả lò phản ứng vi sinh học như sau :

$$\frac{dx_1}{dt} = (\mu - D)\,x_1 \;; \qquad (3-59)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (s_f - x_2)D - \frac{\mu x_1}{Y} \qquad (3-60)$$

$$\mu = \frac{\mu_{max} x_2}{k_m + x_2} \;. \qquad (3-61)$$

mà $\mu_{max} = 0{,}53$; $k_m = 0{,}12$;

$Y = 0{,}4$; $s_f = 4$.

x_1 là nồng độ của thành phần vi sinh, x_2 là nồng độ thành phần cơ bản. Có hai trạng thái cân bằng :

Điểm cân bằng 1 (tầm thường)

$$x_{1s} = 0 \;;\; x_{2s} = 4.$$

Tuyến tính hóa (3-59) và (3-60) ta có ma trận Jacobian sau :

$$J_x = \begin{bmatrix} \mu_S - D_S & x_{1S}\mu_S \\ -\dfrac{\mu_S}{Y} & -D_S - \dfrac{\mu_S x_{1S}}{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}114563 & 0 \\ -1{,}286408 & -0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Giá trị riêng $\lambda_1 = 0{,}114563$ và $\lambda_2 = -0{,}4$. Trạng thái cân bằng là không ổn định (điểm yên ngựa).

Vectơ riêng không ổn định : $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0,3714 \\ -0,9285 \end{bmatrix}$,

Vectơ riêng ổn định :

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Điểm cân bằng 2 (không tầm thường)

$x_{1s} = 1,4523$; $x_{2s} = 0,3692$.

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & 3,215929 \\ -1 & -8,439832 \end{bmatrix}$$

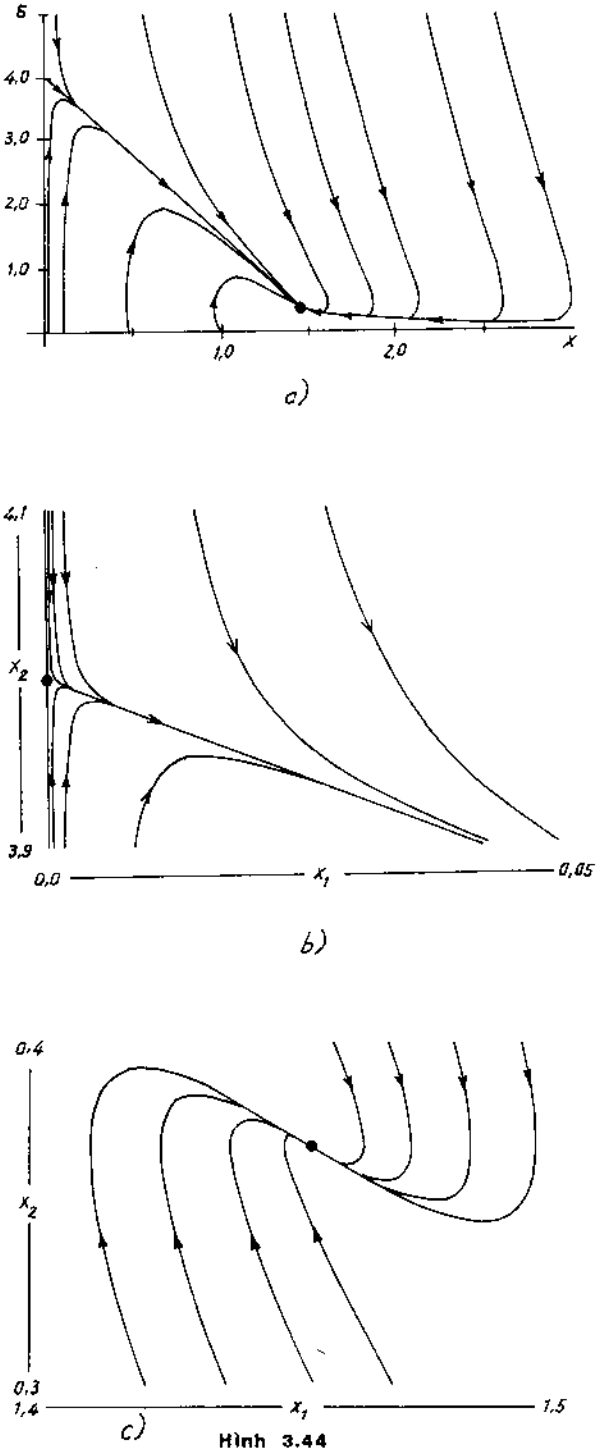
Giá trị riêng $\lambda_1 = -0,4$; $\lambda_2 = -8,0398$.

Trạng thái xác lập là điểm nút ổn định.

Vectơ riêng ổn định "chậm" : $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0,9924 \\ -0,11234 \end{bmatrix}$.

Vectơ riêng ổn định "nhanh" : $\xi_2 = \begin{bmatrix} 0,3714 \\ 0,9285 \end{bmatrix}$.

Quỹ đạo pha như ở hình 3.44a. Quỹ đạo pha rời điểm *1* (0,4) không ổn định và tiến đến điểm *2* ổn định (1.4523, 0.3692). Ở hình 3.44b có quỹ đạo pha ở lân cận điểm không ổn định (0,4), còn ở hình 3.44c ở lân cận điểm ổn định (1.4523, 0.3692).



Hình 3.44

Bài tập 3–8 So sánh quỹ đạo pha và đáp ứng của hệ phi

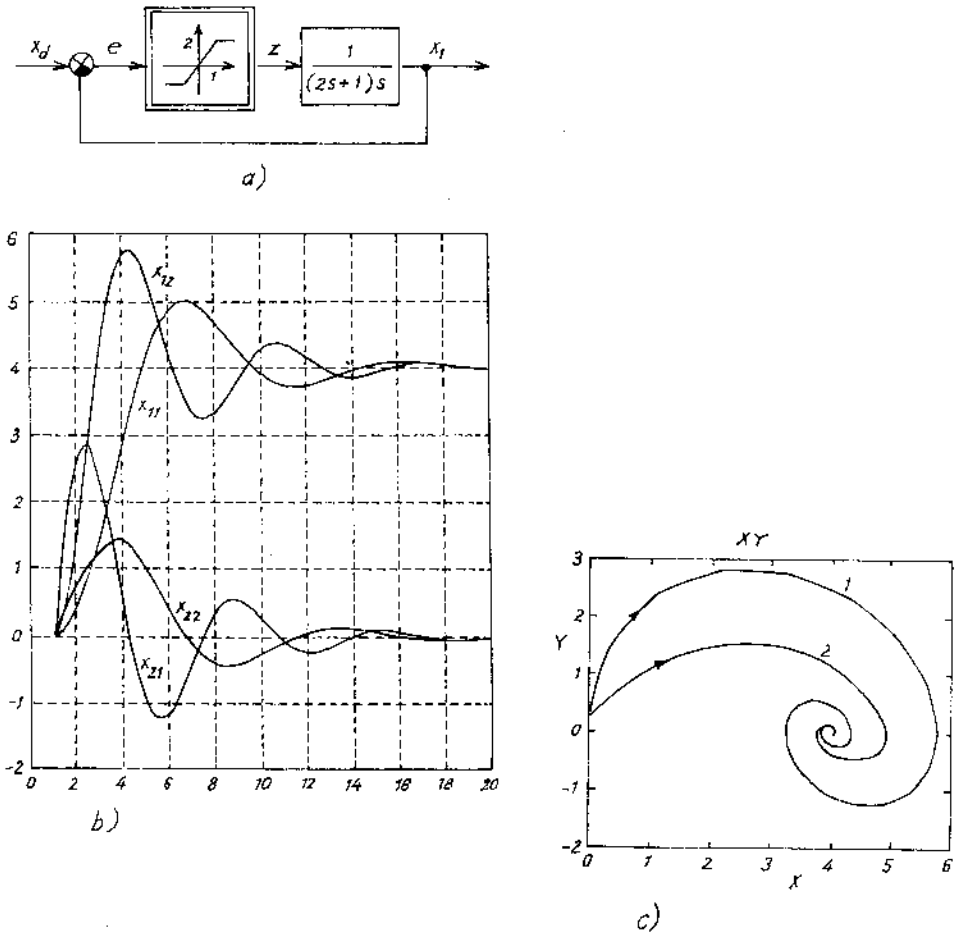
tuyến có đặc tính bão hòa và hệ tuyến tính có cùng điều kiện như ở hình 3.45a.

Đáp án :

Trong trường hợp không bão hòa, hàm truyền của hệ hở là :

$$W(s) = \frac{X_1(s)}{E(s)} = \frac{2}{(2s+1)s}.$$

Ở hình 3.45b là đáp ứng thời gian và 3.45c là quỹ đạo pha (ký hiệu *1* cho trường hợp tuyến tính và *2* cho trường hợp hệ phi tuyến tính).



Hình 3.45

Bài tập 3-9. Đáp ứng của hệ phi tuyến có vùng kém nhạy $x_a = \pm 0,8$ và $x_a = 0$, có sơ đồ khối như ở hình 3.46a. Hãy so sánh chúng.

Đáp án :

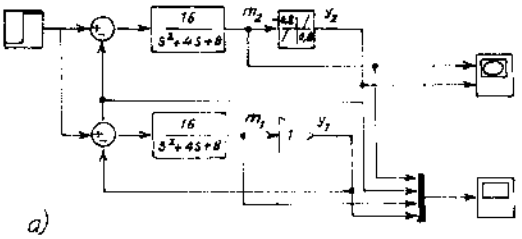
Trong trường hợp không có vùng kém nhạy, y_1 và m_1 như nhau (hình 3.46b).

Bài tập 3-10 Phương trình Lorenz :

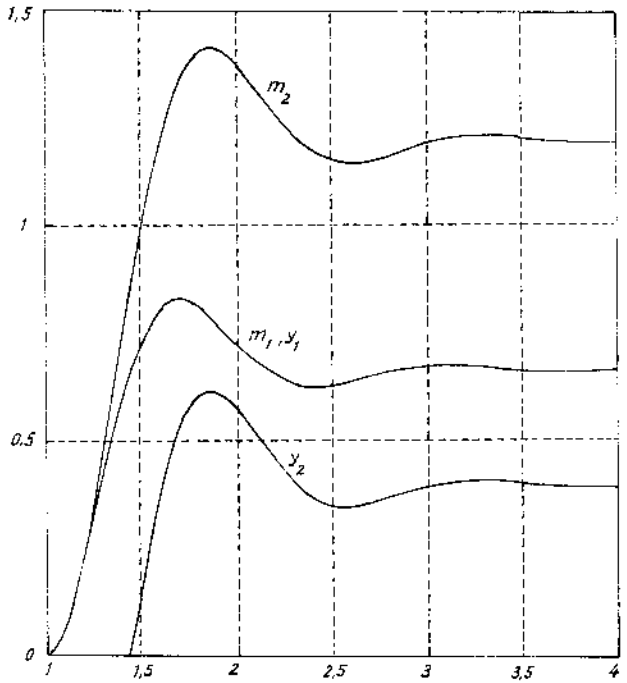
$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \;;$$

$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3 \;;$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_2 \;;$$



a)



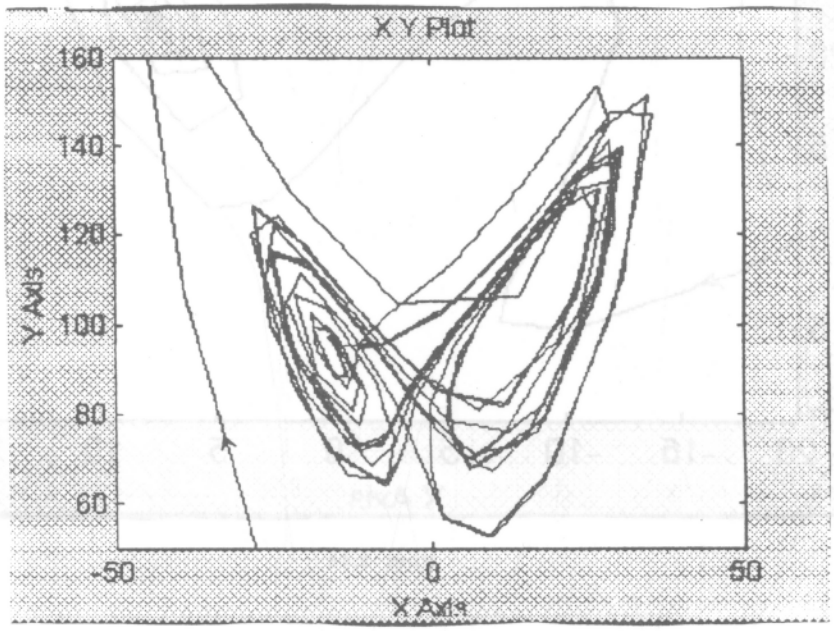
b)

Hình 3.46

Vẽ quỹ đạo pha $x_3(x_1)$ với cùng điều kiện t = 0 : 10 sec, x_0 = [-20 10 10] nhưng r khác nhau (r = 100 và r = 20 còn, σ = 10, b = 8/3).

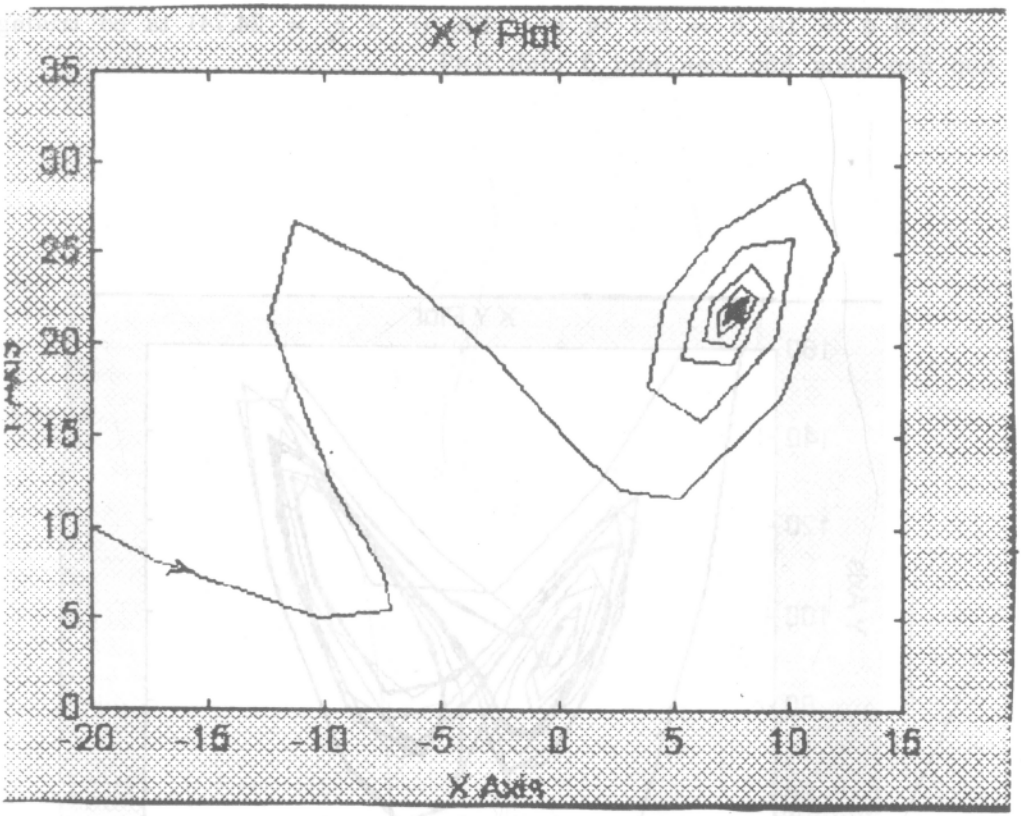
Đáp án :

Với σ = 10, b = 8/3 và r = 100 ($r > r_g$ = 24,74) ta có trường hợp dao động hỗn loạn như ở hình 3.47.



Hình 3.47

Cùng với những thông số trên nhưng nếu chọn r = 20, ($r < r_g$ = 24,74) thì quá trình sẽ có dao động ổn định như ở hình 3.48.



Hình 3.48

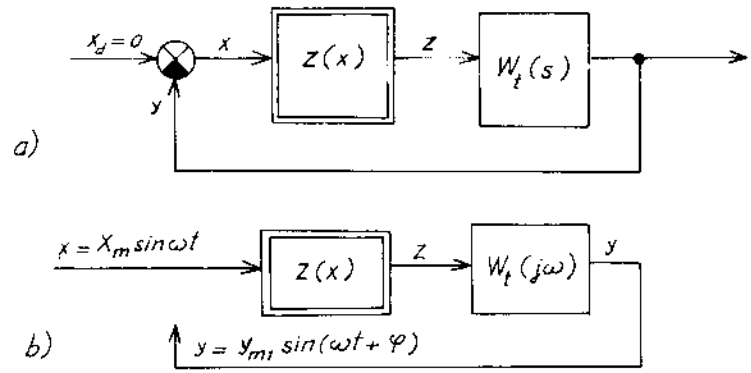
Chương 4
TUYẾN TÍNH HÓA ĐIỀU HÒA

4.1. TÍNH CHẤT CHUNG

Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa (hay cân bằng điều hòa) là phương pháp phổ biến để khảo sát các hệ phi tuyến bậc cao (n > 2) sử dụng miền tần đã được phát triển từ lý thuyết hệ tuyến tính. Phương pháp đã được L. S. Golfarb (Nga) năm 1940 và R. J. Kochenburger (Mỹ) năm 1950 đề xuất.

Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa cho phép sử dụng các công cụ khảo sát của hệ tuyến tính đồng thời kết hợp với phương pháp mặt phẳng pha để khảo sát chế độ tự dao động. Nội dung của phương pháp như sau :

Một hệ phi tuyến ôtônôm (không có tác động vào) và kín, gồm có một khâu phi tuyến và thành phần tuyến tính ổn định hay trung tính nối tiếp nhau như ở hình 4.1a.



Hình 4.1

Để đánh giá khả năng tồn tại của các sóng điều hòa không tắt dần, đặt ở đầu vào khâu phi tuyến tín hiệu điều hòa $x(t) = X_m \sin\omega t$

(hình 4.1b). Ở đầu ra khâu phi tuyến sẽ có tín hiệu $z(t) = z[x(t)]$ gồm có phổ của sóng điều hòa với biên độ z_{m1}, z_{m2}, z_{m3} v.v... với các tần số ω, 2ω, 3ω v.v... Giả thiết rằng tín hiệu z(t) đi qua phần tuyến tính $W_t(j\omega)$ sẽ được lọc các sóng bậc cao và chỉ còn lại sóng bậc một :

$$y(t) = Y_{m1}\sin(\omega t + \varphi). \qquad (4\text{-}1)$$

Giả thiết ấy gọi là *giả thiết lọc*, là điều kiện cần thiết đối với phương pháp tuyến tính hóa điều hòa.

Điều kiện để các hình 4.1a và 4.1b tương đương nhau là :

$$x(t) + y(t) = 0. \qquad (4\text{-}2)$$

Khi thỏa mãn điều kiện của giả thiết lọc (4-1), $y(t) = Y_{1m}\sin(\omega t + \varphi)$ và phương trình (4-2), điều kiện ấy tương đương với :

$$X_m = Y_{m1}, \qquad (4\text{-}3)$$

$$\varphi = \pi . \qquad (4\text{-}4)$$

Phương trình (4-3) và (4-4) là phương trình cân bằng điều hòa tương ứng với cân bằng biên độ và cân bằng pha của dao động điều hòa.

Để đánh giá khả năng thực hiện giả thiết lọc, ta khảo sát phổ tần của các tín hiệu x(t), z(t) và y(t) ở hệ hở (hình 4.1b). Nếu x(t) là sóng bậc một hình sin thì phổ của z(t) và y(t), ngoài bậc một Z_{m1} và Y_{m1} còn có sóng điều hòa bậc cao Z_{mk} và Y_{mk} có biên độ tùy thuộc dạng phi tuyến Z_x. Nếu phần tuyến tính có tính chất của bộ lọc hạ tần thì tỷ trọng của sóng bậc cao của y(t) bé hơn của z(t). Độ chính xác của giả thiết lọc tùy thuộc vào đặc tính của phần tuyến tính $W_t(j\omega)$. Khi các sóng đi qua, ngoài sóng bậc một, các thành phần khác sẽ giảm thiểu đến mức không còn đáng kể nữa. Định lượng điều kiện ấy là :

$$\frac{Z_{mk}}{Z_{m1}}\left|\frac{W_t(jk\omega)}{W_t(j\omega)}\right| << 1 . \qquad (4\text{-}5)$$

với k là số thứ tự bậc của sóng đi qua.

Nói chung, điều kiện (4-5) được thỏa mãn với mọi $k \geqslant 2$. Khi khảo sát các sóng đối xứng, ở tín hiệu y(t) không có sóng bậc chẵn và điều kiện ấy ứng với $k \geqslant 3$.

Để tính gần đúng (4-5) có thể xét độ nghiêng đặc tính tần số lôgarit phần tuyến tính ít nhất là -20 đến -40 db/dec.

Với độ nghiêng - 20 db/dec :

$$\left|\frac{W_t(j2\omega)}{W_t(j\omega)}\right| = \frac{1}{2} \text{ và } \left|\frac{W_t(j3\omega)}{W_t(j\omega)}\right| = \frac{1}{3}.$$

Với độ nghiêng -40 db/dec :

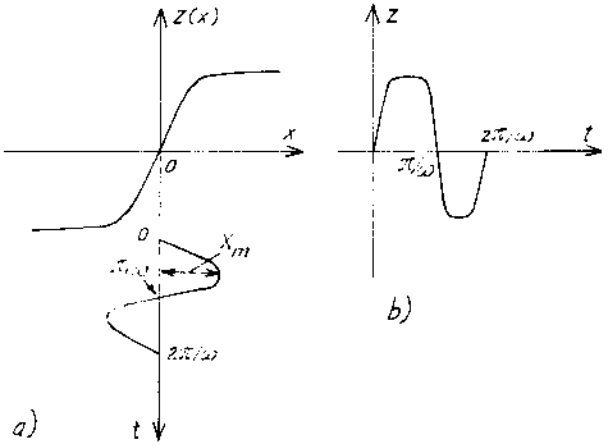
$$\left|\frac{W_t(j2\omega)}{W_t(j\omega)}\right| = \frac{1}{4} \text{ và } \left|\frac{W_t(j3\omega)}{W_t(j\omega)}\right| = \frac{1}{9}.$$

Tùy thuộc vào dao động có đối xứng hay không đối xứng mà việc khảo sát chế độ tự dao động khác nhau. Ở chế độ tự dao động không đối xứng, thành phần không đổi trong hệ có vai trò quan trọng. Khi đặc tính phi tuyến không chẵn và không có tác động từ ngoài vào ($x_d = 0$), việc khảo sát tự dao động đối xứng có nhiều ý nghĩa.

Điều kiện của giả thiết lọc (4-5) không phải là điều kiện nghiêm túc nhưng phương pháp tuyến tính hóa điều hòa làm đơn giản hóa việc khảo sát các bài toán thực tế và cho ta khái niệm gần đúng về các quá trình trong hệ thực. Khi điều kiện của giả thiết lọc không thỏa mãn thì kết quả có được cần được kiểm tra lại bằng thực nghiệm hay bằng lý thuyết trên mô hình toán học hay mô hình vật lý.

4.2. HỆ SỐ KHUẾCH ĐẠI PHỨC CỦA KHÂU PHI TUYẾN

Khi có tín hiệu điều hòa ở đầu vào, khâu phi tuyến có thể được mô tả bằng hệ số khuếch đại phức (hay hệ số truyền) phụ thuộc biên độ của tín hiệu vào. Đặc tính khâu phi tuyến ấy được gọi là *hàm mô tả*.



Hình 4.2

Hãy xét khâu phi tuyến không có quán tính với đặc tính Z = Z(x) (hình 4.2a). Nếu tín hiệu ở đầu vào $x = X_m \sin\omega t = I_m X_m e^{j\omega t}$ thì tín hiệu có chu kỳ ở đầu ra của khâu phi tuyến ấy Z(t) có thể được mô tả bằng chuỗi Fourier :

$$Z(t) = Z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_{Pk} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} Z_{Qk} \cos k\omega t \qquad (4\text{-}6)$$

mà các hệ số Z_{Pk} và Z_{Qk} được xác định theo :

$$Z_{Pk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Z(X_m \sin\omega t) \sin k\omega t \, d(\omega t) \; ; \qquad (4\text{-}7)$$

$$Z_{Qk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Z(X_m \sin\omega t) \cos k\omega t \, d(\omega t) \qquad (4\text{-}8)$$

Khi đặc tính phi tuyến Z(x) là không chẵn thì $Z_o = 0$. Với giả thiết lọc nói trên, chỉ tính đến thành phần bậc một :

$$Z(t) \approx Z_{P1} \sin\omega t + Z_{Q1} . \cos\omega t \qquad (4\text{-}9)$$

hay dưới dạng phức :

$$Z(t) \approx I_m (Z_{P1} + Z_{Q1}) e^{j\omega t} \qquad (4\text{-}10)$$

với :

$$Z_{P1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (X_m \sin\omega t) \sin\omega t \, d(\omega t) \qquad (4\text{-}11)$$

$$Z_{Q1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Z(X_m \sin\omega t) \cos\omega t \, d(\omega t) \qquad (4\text{-}12)$$

Hệ số khuếch đại phức của khâu phi tuyến là tỷ số của sóng cơ bản của tín hiệu ra và tín hiệu vào thể hiện ở dạng phức :

$$W_f(X_m) = P_f(X_m) + Q_f(X_m) = \frac{Z_{P1}}{X_m} + j\frac{Z_{Q1}}{X_m} = \left| W_f(X_m) \right| e^{j\varphi_f} \qquad (4\text{-}13)$$

với :

$$P_f(X_m) = \frac{Z_{P1}}{X_m} = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} Z(X_m \sin\omega t) \sin\omega t \, d(\omega t) \; , \qquad (4\text{-}14)$$

$$Q_f(X_m) = \frac{Z_{Q1}}{X_m} = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} Z(X_m \sin\omega t) \cos\omega t \, d(\omega t) \; , \qquad (4\text{-}15)$$

$$|\tilde{W}_f| = \frac{Z_{m1}}{X_m} = \frac{\sqrt{Z_{P1}^2 + Z_{Q1}^2}}{X_m} \; ; \; \varphi_f = \text{arctg}\frac{Z_{Q1}}{Z_{P1}} \quad (4\text{-}16)$$

Như vậy hệ số khuếch đại phức của khâu phi tuyến không có quán tính giống như hệ số khuếch đại phức của khâu tuyến tính nhưng không phụ thuộc tần số như ở khâu tuyến tính mà chỉ phụ thuộc biên độ của tín hiệu vào X_m.

Các thành phần của hệ số khuếch đại phức $P_f(X_m)$ và $Q_f(X_m)$ là *hệ số khuếch đại tuyến tính hóa điều hòa.*

Có thể chứng minh rằng tín hiệu điều hòa sẽ dịch pha khi đi qua khâu phi tuyến có đặc tính không đơn trị.

Phần ảo của $\tilde{W}_f(X_m)$ có dạng :

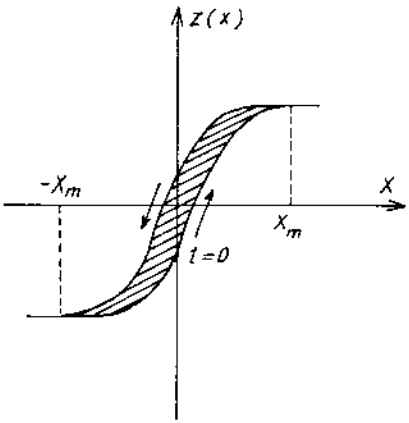
$$Q_f(X_m) = \frac{1}{\pi X_m}\int_0^{2\pi} Z(X_m \sin\omega t)\cos\omega t \, d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{\pi X_m^2}\int_0^{0} Z(X_m \sin\omega t)\, d(X_m \sin\omega t) = \frac{1}{\pi X_m^2}\int_0^{0} Z(x)\, dx) \quad (4\text{-}17)$$

Ở hình 4.3 có đặc tính từ trễ không đơn trị và được mô tả hướng lấy tích phân ngược chiều kim đồng hồ. Tích phân được lấy từ $x = 0$, $(t = 0)$ đến $x = X_m$, $(t = \frac{\pi}{2}\omega)$ sau đó từ $x = X_m$ đến $x = -X_m (t = \frac{3\pi}{2}\omega)$ và từ $x = -X_m$ đến $x = 0, (t = 2\pi\omega)$. Kết quả lấy tích phân được xác định bởi diện tích S của lá trễ với dấu âm (dấu được xác định bởi hướng chuyển động của đường cong). Như vậy :

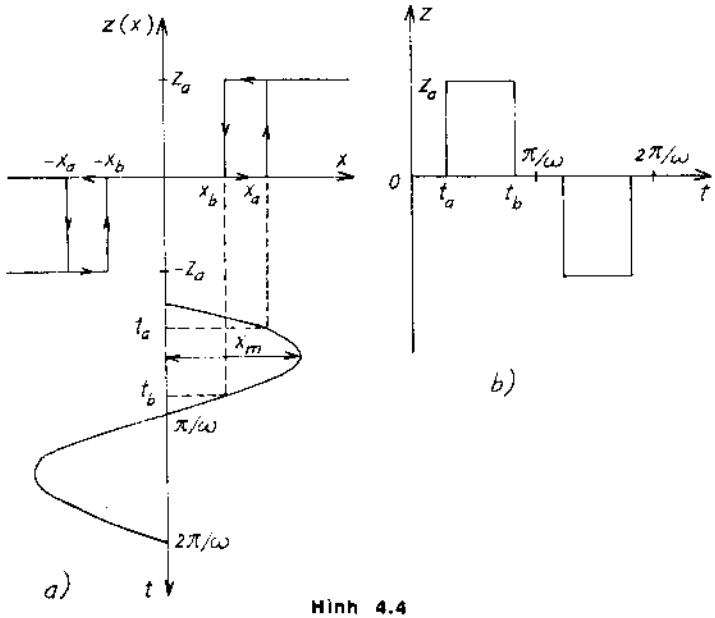
$$Q_f(X_m) = -S/(\pi X_m^2) \quad (4\text{-}18)$$

Trong trường hợp đặc tính phi tuyến là đơn trị thì thành phần này bằng không.



Hình 4.3

Ví dụ 4-1 Xác định hệ số khuếch đại phức của khâu rơle ba vị trí có trễ như ở hình 4.4a. Khâu rơle có thông số tác động là x_a, tín hiệu ra của rơle khi làm việc là $\pm Z_a$.



Hình 4.4

Khi $X_m < x_a$, tín hiệu ra bằng không cho nên $\tilde{W}_f(X_m) = 0$. Khi $X_m > x_a$, tín hiệu ra có dạng chữ nhật như ở hình 4.4b. Thời điểm tác động của rơle t_a được xác định bởi điều kiện :

$$X_m \sin\omega t_a = x_a \tag{4-19}$$

hay

$$\sin\omega t_a = \frac{x_a}{X_m} \tag{4-20}$$

Thời điểm rơle nhả được xác định bởi :

$$X_m \sin\omega\left(\frac{\pi}{\omega} - t_b\right) = x_b \tag{4-21}$$

hay

$$\sin(\pi - \omega t_b) = \frac{x_b}{X_m}\ . \tag{4-22}$$

Theo biểu thức (4 -14) và dạng đặc tính phi tuyến, có phần thực :

$$P_f(X_m) = \frac{2}{\pi X_m}\int_{t_a}^{t_b} z_a \sin\omega t\, d(\omega t) =$$

$$= \frac{2z_a}{\pi X_m}\left[\cos\omega t_a - \cos\omega t_b\right] \tag{4 -23}$$

Trên cơ sở (4-20) và (4-22) ta có :

$$\cos\omega t_a = \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2}, \qquad (4\text{-}24)$$

$$\cos\omega t_b = -\sqrt{1 - \left(\frac{x_b}{X_m}\right)^2}. \qquad (4\text{-}25)$$

Do đó :

$$P_f(X_m) = \frac{2z_a}{\pi X_m}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x_b}{X_m}\right)^2}\right]. \qquad (4\text{-}26)$$

Cũng bằng phương pháp tương tự, xác định thành phần ảo :

$$Q_f(X_m) = -\frac{2z_a(x_a - x_b)}{\pi X_m^2}. \qquad (4\text{-}27)$$

Như vậy hệ số khuếch đại phức của khâu rơle nói trên có dạng :

$$\tilde{W}_f(X_m) = \frac{2z_a}{\pi X_m}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x_b}{X_m}\right)^2}\right] - j\,\frac{2z_a(x_a - x_b)}{\pi X_m^2}. \qquad (4\text{-}28)$$

Ở hình 4.5a có đặc tính P_f và Q_f phụ thuộc biên độ X_m. Đặc tính có trị số gián đoạn ở $X_m = x_a$.

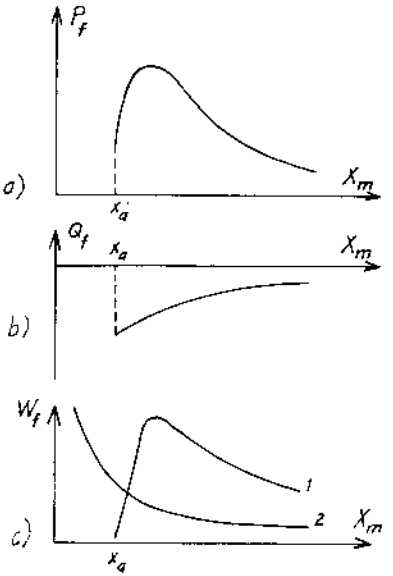
Trường hợp đặc tính rơle đơn trị, nghĩa là $x_a = x_b$, $Q_f(X_m) = 0$ và hệ số khuếch đại phức bằng phần thực của hệ số tuyến tính hóa điều hòa :

$$\tilde{W}_f(X_m) = \frac{4z_a}{\pi X_m}\sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2}. \qquad (4\text{-}29)$$

Dạng đặc tính $\tilde{W}_f(X_m)$ trong trường hợp này như ở đường 1 hình 4.5c. Khi đặc tính rơle là hai vị trí ($x_a = 0$) thì (4-29) có dạng

$$\tilde{W}_f(X_m) = \frac{4z_a}{\pi X_m} \qquad (4\text{-}30)$$

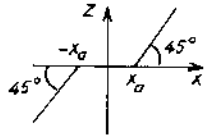
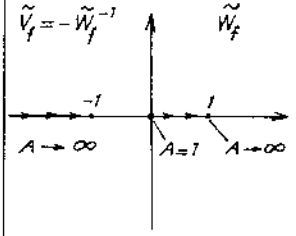
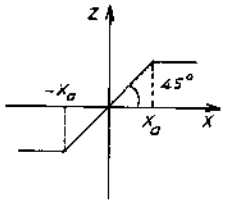
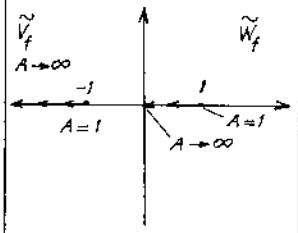
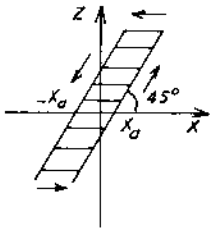
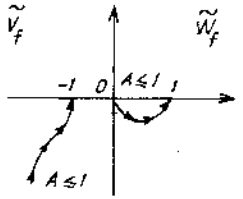
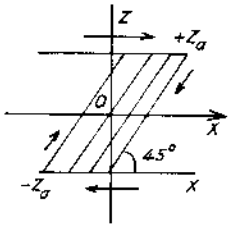
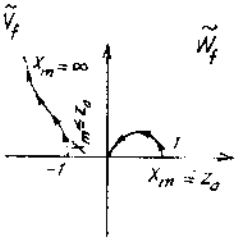
như đường 2 trên hình 4.5c.

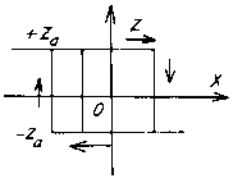
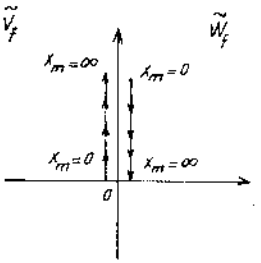
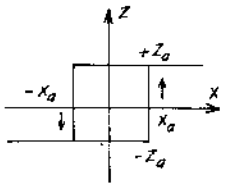
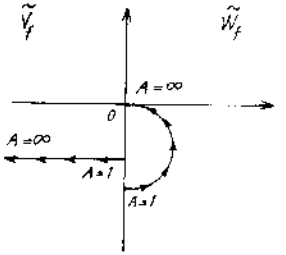
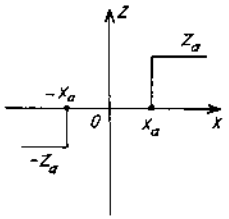
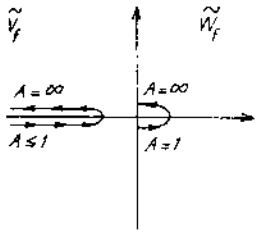
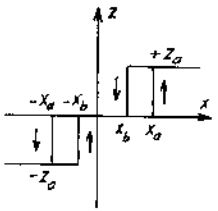
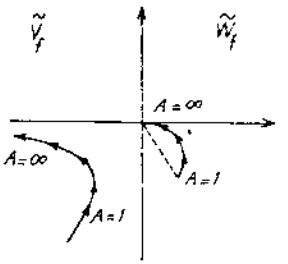


Hình 4.5

Trong nhiều trường hợp người ta dùng các đặc tính chuẩn hay đặc tính nghịch đảo. Ở bảng 4–1 cho đặc tính của một số khâu phi tuyến thường gặp.

Bảng 4–1

Khâu	Dạng phi tuyến	$\tilde{W}_f(A) = P_f(A) + jQ_f(A)$	Biểu đồ
Kém nhạy		$P_f = 1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}$ $Q_f = 0$ $\sin\alpha = \frac{1}{A}$	
Bão hòa		$P_f = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}$ $Q_f = 0$ $\sin\alpha = \frac{1}{A}$	
Khe hở		$P_f = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}$ $Q_f = \frac{\cos^2\alpha}{\pi}$ $\sin\alpha = \frac{2}{A} - 1$	
Gối tì		$P_f = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{+\sin 2\alpha}{2\pi}$ $Q_f = \frac{\cos^2\alpha}{\pi}$ $\sin\alpha = \frac{2z_a}{X_m} - 1$	

Ma sát khô		$P_f = 0$ $Q_f = \frac{4z_a}{\pi X_m}$	
Rơle hai vị trí có trễ		$P_f = \frac{4z_a}{\pi A x_a}\cos\alpha$ $Q_f = \frac{4z_a}{\pi A x_a}\sin\alpha$ $\sin\alpha = \frac{1}{A}$	
Rơle ba vị trí		$P_f = \frac{4z_a}{\pi A x_a}\cos\alpha$ $Q_f = 0$ $\sin\alpha = \frac{1}{A}$	
Rơle ba vị trí có trễ		$P_f = \frac{2z_a}{\pi A x_a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$ $Q_f = \frac{2z_a}{\pi A x_a}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$ $\sin\alpha_1 = \frac{1}{A}, \sin\alpha_2 = \frac{\lambda}{A}$ $\lambda = \frac{x_b}{x_a}$	

4.3. PHÂN TÍCH CHẾ ĐỘ TỰ DAO ĐỘNG ĐỐI XỨNG Ở CÁC HỆ PHI TUYẾN

Như đã nêu trên, điều kiện có tự dao động là sự cân bằng điều hòa của sóng ở đầu vào khâu phi tuyến và ở đầu ra khâu so sánh. Điều kiện ấy còn có thể viết :

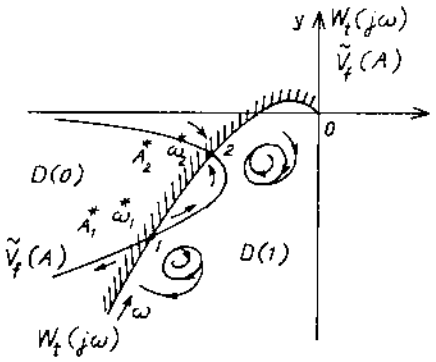
$$\widetilde{W}_f(A)W_t(j\omega) = -1 \qquad (4\text{-}31)$$

Ở đây xét trường hợp tự dao động đối xứng và không có thành phần không đổi với A là biên độ dao động.

Phương trình trên có thể viết dưới dạng :

$$W_t(j\omega) = -\frac{1}{W_f(A)} = \widetilde{V}_f(A) \ . \qquad (4\text{-}32)$$

Ở hình 4.6 là đặc tính tần của phần tuyến tính $W_t(j\omega)$ và đặc tính nghịch đảo với dấu âm của hệ số tuyến tính hóa điều hòa $\widetilde{V}_f(A)$. Hai đường cong cắt nhau ở điểm *1* và *2* xác định chế độ tự dao động cần tìm. Tần số và biên độ $\omega_1^*, A_1^*, \omega_2^*, A_2^*$ là thông số của chế độ tự dao động được xác định trên đường cong tương ứng.



Hình 4.6

Để đánh giá về tính ổn định của chế độ tự dao động, ta xem $\widetilde{V}_f(A)$ như thông số phức ở phương pháp chia miền D (chia miền ổn định ở mục 4-4 [19]. Phương trình (4-32) có thể xem như điều kiện để biểu đồ $\widetilde{V}_f(A)$ thuộc về vùng nào trên mặt phẳng miền D :

$$\widetilde{V}_f(A) = W_t(j\omega) = X + jY \qquad (4\text{-}33)$$

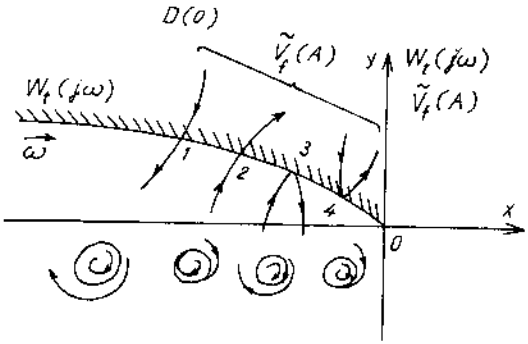
Sau khi gạch sọc mặt phẳng $W_t(j\omega)$ theo thông số phức $\widetilde{V}_f(A)$, ta sẽ khảo sát không phải chỉ các trị số của trục thực như ở (4-4 [19]) mà cả mặt phẳng XY. Nếu toàn bộ biểu đồ $\widetilde{V}_f(A)$ nằm trong miền D(0), hệ không có tự dao động. Nếu tất cả các biểu đồ $\widetilde{V}_f(A)$ nằm trong miền

D(m) (m ≥ 1) thì hệ sẽ không ổn định và chỉ có quá trình tăng dần đến vô cùng. Còn nếu $\tilde{V}_f(A)$ cắt biên giới đường D(0) thì hệ có thể có chế độ tự dao động điều hòa và có thể tiếp tục khảo sát về tính ổn định của chế độ ấy.

Ví dụ, xét điểm *1* là giao điểm của $\tilde{V}_f(A)$ và $W_t(j\omega)$ ở hình 4.6. Giả sử vì lý do gì mà biên độ tự dao động tăng. Ta sẽ dịch chuyển $\tilde{V}_f(A)$ theo hướng tăng của mũi tên từ điểm 1 chuyển đến vùng D(1). Vì có nghiệm có phần thực dương nên biên độ lại tiếp tục tăng và chuyển động càng xa điểm *1*. Ngược lại nếu biên độ tự dao động giảm, ta sẽ di chuyển theo biểu đồ vào vùng D(0), như vậy mọi dao động sẽ tắt và biên độ giảm, chuyển động cũng ngày càng xa điểm *1*.

Như vậy khi biên độ dao động ở điểm *1* thay đổi, quá trình ngày càng tăng hoặc càng giảm biên độ và tự dao động như vậy sẽ không ổn định (điểm *1*). Phân tích tương tự ta có chế độ tự dao động ổn định ở điểm *2* vì khi có chênh lệch của chế độ tự dao động khi A tăng, dịch chuyển sẽ vào vùng D(0) là vùng sẽ làm A tiếp tục giảm, còn khi chênh lệch dẫn đến giảm A, dịch chuyển sẽ vào vùng D(1) là vùng sẽ làm A tiếp tục tăng. Như vậy, điểm *2* tương ứng với chế độ tự dao động ổn định.

Tự dao động là ổn định nếu chuyển động theo đặc tính phi tuyến với hướng tăng biên độ, dịch chuyển từ miền không ổn định vào miền ổn định của vùng D.

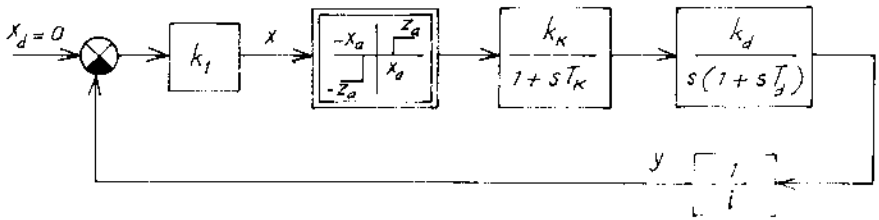


Hình 4.7

Có thể có tự dao động không ổn định về một phía, ví dụ khi tăng biên độ thì chế độ tự dao động bị ảnh hưởng còn khi giảm biên độ thì chế độ tự dao động không bị ảnh hưởng (như điểm *3* ở hình 4.7) hay ngược lại (như điểm *4*).

Ví dụ 4-2 Hãy xác định thông số của chế độ tự dao động đối xứng của hệ tùy động có sơ đồ khối như ở hình 4.8, với những thông số sau : k_1 = 1 V/độ là hệ số khuếch đại của dụng cụ đo ; x_a = 0,1 V là điện

áp tác động của rơle ; z_a = 6 V là điện áp ra của rơle ; k_K = 5 và T_K = 0,2 sec là hệ số khuếch đại và hằng số thời gian của khuếch đại ; k_d = 300°/(sec.V), T_d = 2 sec là hệ số khuếch đại (theo tốc độ) và hằng số thời gian của động cơ ; i = 7500 là tỉ số truyền của bộ giảm tốc.



Hình 4.8

Đặc tính tần của phần tuyến tính có dạng :

$$W_t(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1 + j\omega T_K)(1 + j\omega T_d)} \qquad (4\text{-}34)$$

mà $k = k_1 k_K k_d (1/i) = 0{,}2$ 1/sec là hệ số khuếch đại của hệ tùy động.

Dùng hệ số chuẩn hóa $N \equiv z_a/x_a = 60$.

Tích của $NW_t(j\omega)$ với thông số của nó :

$$NW_t(j\omega) = \frac{12}{j\omega(1 + j\,0{,}2\omega)(1 + j\,2\omega)} . \qquad (4\text{-}35)$$

Ở hình 4.9a có biểu đồ $NW_t(j\omega)$ và $\tilde{V}_f(A)$. Biểu đồ có hai giao điểm với cùng một tần số $\omega_1^* = \omega_2^* = \omega^*$ và được xác định từ điều kiện :

$$\arg W_t(j\omega^*) = -\pi$$

hay :

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 0{,}2\omega^* + \operatorname{arctg} 2\omega^* = \pi \qquad (4\text{-}36)$$

từ đó $\omega^* = 1{,}58\ \text{sec}^{-1}$.

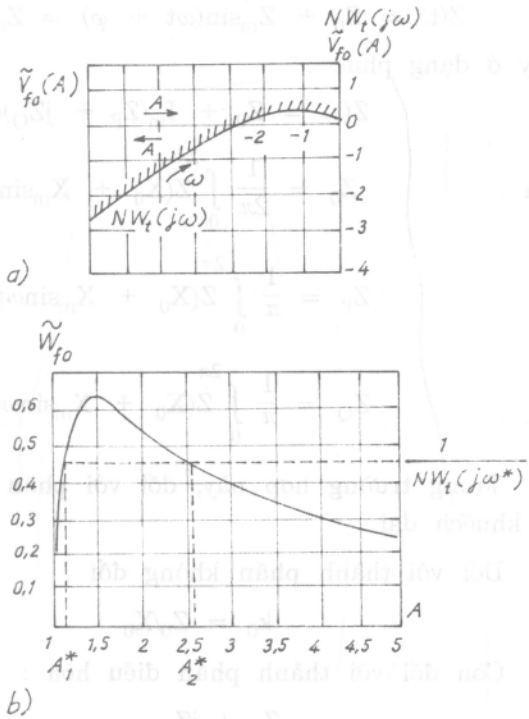
Hai trị số biên độ tự dao động A_1^* và A_2^* được xác định theo biểu đồ $\tilde{W}_{fo}(A)$ như ở hình 4.9b, bằng cách vẽ đường thẳng song song với trục hoành ở giá trị $\frac{1}{|NW_t(j\omega^*)|} = 0{,}458$ tương ứng với điều kiện tự dao động :

$$\widetilde{W}_{fo}(A) = -\frac{1}{N} W_t^{-1}(j\omega) . \qquad (4\text{-}37)$$

Biên độ bé $A_1^* = 1{,}10$ tương ứng với chế độ tự dao động không ổn định, còn biến độ lớn $A_2^* = 2{,}59$ ứng với tự dao động ổn định. Nếu chuyển đổi sang đại lượng biên độ tính theo độ thì :

$$A_2^* \frac{x_a}{k_1} = 2{,}59 \frac{0{,}1}{1} = 0{,}259^o$$

Nếu ở thời điểm ban đầu hệ không có tự dao động (x = 0), muốn hệ làm việc ở chế độ tự dao động cần đưa vào một xung ban đầu lớn hơn biên độ bé A_1^*, chỉ sau đó mới có chế độ tự dao động ổn định.



Hình 4.9

Để kiểm tra lại giả thiết lọc, xác định hệ số lọc của khâu tuyến tính theo tần số không chẵn vì đặc tính rơle đối xứng không chẵn. Sau khi thay $\omega = \omega^* = 1{,}58$ sec^{-1} vào (4 –34) ta có :

$$\left| \frac{W_t(j3\omega^*)}{W_t(j\omega^*)} \right| = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{[1 + (0{,}2 \,.\, 1{,}58)^2]\,[1 + (2 \,.\, 1{,}58)^2}{[1 + (0{,}6 \,.\, 1{,}58)^2]\,[1 + (6 \,.\, 1{,}58)^2}} \approx 0{,}09$$

Vậy giả thiết lọc được thỏa mãn.

4.4. PHÂN TÍCH CHẾ ĐỘ TỰ DAO ĐỘNG KHÔNG ĐỐI XỨNG Ở CÁC HỆ PHI TUYẾN

Tự dao động không đối xứng là kết quả của thành phần không đổi của tín hiệu vào cũng như tính không đối xứng của đặc tính phi tuyến.

Ví dụ, nếu ở đầu vào của đặc tính phi tuyến có tín hiệu $x = X_0 + X_m\sin\omega t$, và nếu giả thiết lọc được thỏa mãn, thì tín hiệu ở đầu ra có dạng :

$$Z(t) = Z_0 + Z_m\sin(\omega t + \varphi) = Z_0 + Z_P\sin\omega t + Z_Q\cos\omega t \quad (4\text{-}38)$$

hay ở dạng phức :

$$Z(t) = Z_0 + I_m(Z_P + jZ_Q)e^{j\omega t} \quad (4\text{-}39)$$

mà :

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z(X_0 + X_m\sin\omega t)\, d(\omega t), \quad (4\text{-}40)$$

$$Z_P = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Z(X_0 + X_m\sin\omega t)\sin\omega t\, d(\omega t), \quad (4\text{-}41)$$

$$Z_Q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} Z(X_0 + X_m\sin\omega t)\cos\omega t\, d(\omega t). \quad (4\text{-}42)$$

Trong trường hợp này, đối với phần tử phi tuyến có thể có hai hệ số khuếch đại :

Đối với thành phần không đổi :

$$k_0 = Z_0/X_0 \quad (4\text{-}43)$$

Còn đối với thành phần điều hòa :

$$\tilde{W}_f = \frac{Z_P + jZ_Q}{X_m} = |\tilde{W}_f|\, e^{j\varphi_f}. \quad (4\text{-}44)$$

Trường hợp đặc tính phi tuyến đa trị

Các thông số còn phụ thuộc thành phần không đổi :

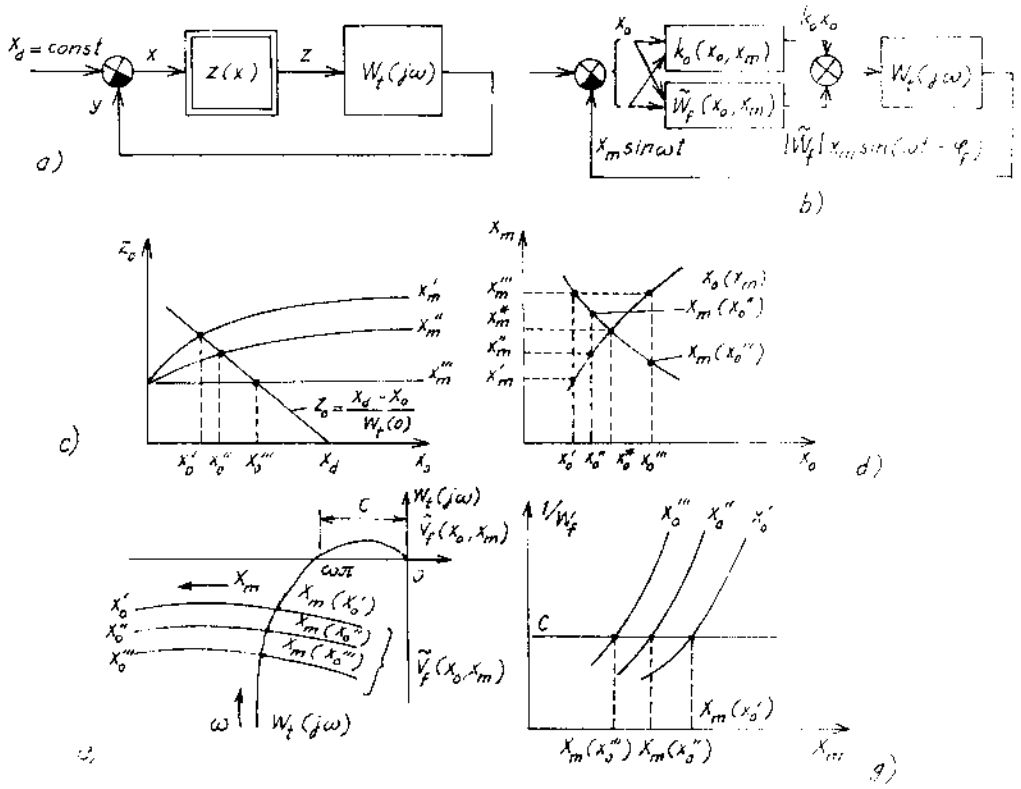
$$\left.\begin{aligned} k_0 &= k_0(X_0, X_m), \\ \text{và} \quad \tilde{W}_f &= \tilde{W}_f(X_0, X_m). \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}45)$$

Phương trình đóng mạch ứng với hình 4.10a :

$$X_0 = X_d - Z_0(X_0, X_m).W_t(0) \quad (4\text{-}46)$$

$$-X_m = X_m\tilde{W}_f(X_0, X_m).W_t(j\omega) \quad (4\text{-}47)$$

Việc phân tích ra các thành phần khác nhau đối với thành phần không đổi và thành phần điều hòa, tương ứng với việc tách khâu phi tuyến ra thành hai khâu song song tương đương như ở hình 4.10b với hệ số truyền $k_0(X_0, X_m)$ và $\tilde{W}_f(X_0, X_m)$. Việc giải hệ phương trình (4-46) và (4-47) được thực hiện giản đơn bằng đồ thị như ở hình 4.10c theo



Hình 4.10

$Z_0(X_0)$ với các trị số X_m khác nhau. Phương pháp xây dựng này giống như ở phương pháp tuyến tính hóa rung (mục 2.3). Giao điểm các đặc tính này với đường thẳng :

$$Z_0 = \frac{x_d - X_0}{W_t(0)} .$$

cho mối quan hệ $X_0(X_m)$ cần tìm.

Mặt khác nếu vẽ họ các đặc tính $\tilde{V}_f(X_0, X_m) = -W_f^{-1}(X_0, X_m)$ với X_0 khác nhau (hình 4.10d) cho ta mối quan hệ $X_m = X_m(X_0)$. Tổng hợp hai phương trình $X_m = X_m(X_0)$ và $X_0 = X_0(X_m)$ cho ta thông số tự dao động cần tìm $X_0 = X_0^*$ và $X_m = X_m^*$ như ở hình 4.10d).

Trường hợp đặc tính phi tuyến đơn trị

Cần vẽ đồ thị $-\tilde{V}_f = W_f^{-1}$ phụ thuộc X_m với các đại lượng X_0 khác nhau như ở hình 4.10g và theo giao điểm các đường cong ấy với đường

thẳng $W_t^{-1} = -W_t(\omega_\pi) = C$ mà xác định $X_m(X_0)$ như ở hình 4.10e. Tần số tự dao động ω^* xác định theo giao điểm của $W_t(j\omega)$ với toán đồ $\tilde{V}_f(X_0, X_m)$ cho điểm $X_0 = X_0^*$. Với đặc tính phi tuyến đơn trị tần số tự dao động là ω_π.

Việc xác định độ ổn định của tự dao động được thực hiện như ở trường hợp tự dao động đối xứng.

4.5. NÂNG CAO ĐỘ CHÍNH XÁC CỦA PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH HÓA ĐIỀU HÒA

Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa là phương pháp gần đúng vì với giả thiết lọc chỉ tồn tại sóng bậc một. Do đó muốn chính xác thì phải tính đến sóng bậc cao hơn một. Trong trường hợp ấy hệ số khuếch đại phức của khâu tuyến tính hóa không chỉ phụ thuộc biên độ tín hiệu vào X_m mà còn phụ thuộc tần số.

Như vậy phương trình cân bằng điều hòa (4 -31) bây giờ có dạng :

$$\tilde{W}_f(j\omega,A)W_t(j\omega) = -1 \qquad (4\text{-}48)$$

hay

$$\tilde{W}_t(j\omega) = -\tilde{W}_f^{-1}(j\omega, A) = \tilde{V}_f(j\omega, A) \qquad (4\text{-}49)$$

Dạng của đặc tính $\tilde{V}_f(j\omega,A)$ phụ thuộc không những đặc tính tĩnh của khâu phi tuyến mà còn ở đặc tính tần của phần tuyến tính. Việc xác định $\tilde{W}_f$ và $\tilde{V}_f$ đối với những dạng phi tuyến điển hình trở nên phức tạp. Bằng phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn đặc tính phi tuyến, có thể dùng máy tính để giải bài toán trên. Trường hợp giản đơn, đặc tính phi tuyến là rơle lý tưởng, có thể dùng phương pháp chính xác sau [23] :

Giả thiết là chế độ tự dao động đối xứng có thời khoảng nửa chu kỳ dương và âm bằng nhau và bằng $\frac{\pi}{\omega}$. Các cung có chu kỳ ấy ở đầu vào của phần tuyến tính (xung đầu tiên là dương) có thể mô tả theo chuỗi Fourier :

$$Z(t) = \frac{4z_a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\,\omega t \qquad (4\text{-}50)$$

Nếu phần tuyến tính có đặc tính tần :

$$W_t(j\omega) = |W_t(j\omega)|\,e^{j\varphi_t(\omega)} = P_t(\omega) + jQ_t(\omega) \qquad (4\text{-}51)$$

thì tín hiệu đầu ra của hệ có dạng :

$$y(t) = \frac{4z_a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|W_t[j(2k-1)\omega]|}{2k-1} \sin\left\{(2k-1)\omega t + \varphi_t[j(2k-1)\omega]\right\} \quad (4\text{-}52)$$

Tín hiệu sai lệch x(t) chỉ đổi dấu y(t) như ở hình 4.11. Điều kiện để có tự dao động là sự cân bằng pha của y(t) và x(t), có thể mô tả bởi hệ phương trình sau :

$$y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 0, \quad (4\text{-}53)$$

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) > 0 . \quad (4\text{-}54)$$

Điều kiện (4-53) bảo đảm rơle tác động ở thời điểm $t = \frac{\pi}{\omega}$, còn điều kiện (4-54) bảo đảm rơle tác động đúng hướng :

Từ (4-52) ta có :

$$y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{4z_a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|W_t[j(2k-1)\omega]|}{2k-1} \sin\varphi_t[(2k-1)\omega] =$$

$$= -\frac{4z_a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_t[(2k-1)\omega]}{2k-1} .$$

Lấy đạo hàm theo t :

$$\dot{y}(t) = \omega \frac{4z_a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left|W_t[j(2k-1)\omega]\right| \times$$

$$\times \cos\left[(2k-1)\omega t + \varphi_t[(2k-1)\omega]\right\} .$$

Khi $t = \frac{\pi}{\omega}$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\omega \frac{4z_a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left|W_t[(2k-1)\omega]\right| \\ \cos\varphi_t[(2k-1)\omega] &= -\omega \frac{4z_a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} P_t[(2k-1)\omega] . \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}55)$$

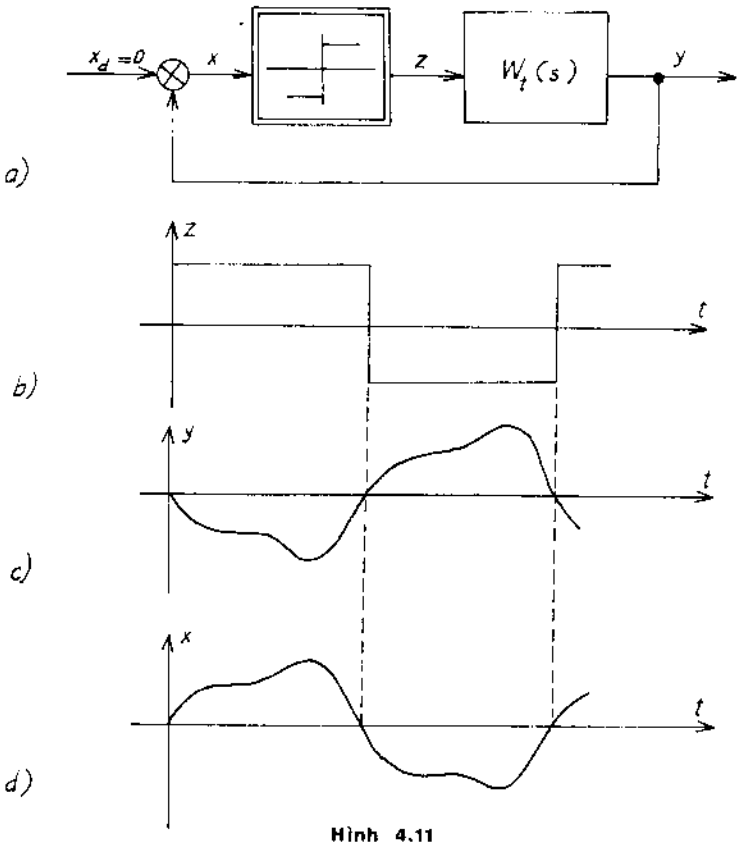
Để đảm bảo chế độ tự dao động theo điều kiện (4-53), (4-54), dùng đặc tính rơle :

$$\tilde{W}_r(\omega) = -\frac{1}{\omega}\dot{y}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) - jy\left(\frac{\pi}{\omega}\right) . \quad (4\text{-}56)$$

Đặc tính rơle phụ thuộc tần số như ở hình 4.12. Chế độ tự dao động ứng với tần số $\omega = \omega_\pi$ vì :

$$\mathrm{Im}\tilde{W}_r(\omega_\pi) = -y\left(\frac{\pi}{\omega_\pi}\right) = 0 \;;$$

$$\mathrm{Re}\tilde{W}_r(\omega_\pi) = -\frac{1}{\omega}\, y\left(\frac{\pi}{\omega_\pi}\right) < 0 .$$



Hình 4.11

Biết được tần số tự dao động, có thể xác định được dạng sóng y(t) theo (4-52). Cần kiểm tra lại trong nửa chu kỳ ấy rơle có tác động không. Nếu đặc tính tần của phần tuyến tính chỉ tính đến tần số bậc một :

$$y(t) = \frac{4z_a}{\pi}\left|W_t(j\omega)\right|\sin\left[\omega t + \varphi_t(\omega)\right] . \qquad (4\text{-}57)$$

thì đặc tính rơle trong trường hợp này bằng :

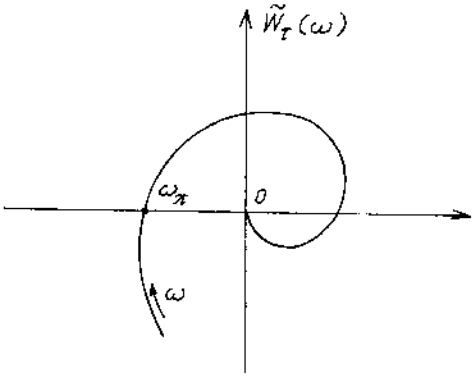
$$\widetilde{W}_r(\omega) = \frac{4z_a}{\pi} W_t(j\omega),$$

còn tần số tự dao động $\omega = \omega_\pi$ và biên độ tự dao động ứng với (4-57) là :

$$X_m = \frac{4z_a}{\pi} \left| W_t(j\,\omega_\pi) \right|. \qquad (4\text{-}58)$$

Đại lượng này trùng với kết quả tính toán ở ví dụ 4-1.

Như vậy, nếu tính đến tần số khác bậc một, với cùng một hệ số khuếch đại của hệ, biên độ tự dao động thực tế sẽ lớn hơn tính toán, còn tần số tự dao động sẽ biến đổi và bé hơn trị số tần số bậc một. Càng tăng hệ số khuếch đại của hệ, sự sai khác này càng giảm vì khi ấy tần số tự dao động tăng và khả năng lọc của hệ cũng tăng. Do đó có khi tính toán cho thấy hệ không có tự dao động nhưng thực tế thì ngược lại vì k_{gh} trong thực tế nhỏ hơn trong tính toán chỉ với tần số bậc một.



Hình 4.12

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

Bài tập 4-1 Hãy xác định thông số tự dao động cho hệ có cấu trúc không ổn định vô sai bậc hai với đặc tính phi tuyến dạng gối tì như ở hình 4.13.

Phần tuyến tính có đặc tính :

$$W_t(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^2\,(1 + j\omega T_1)\,(1 + j\omega T_2)} \qquad (4\text{-}59)$$

với $k = 0{,}35\ \text{sec}^{-2}$, $T_1 = T_2 = 0{,}2$ sec.

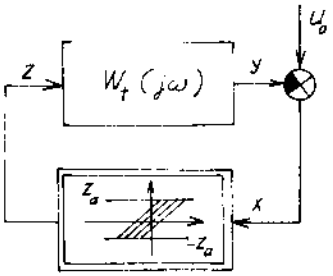
Đáp án :

Sau khi vẽ đặc tính tần $W_t(j\omega)$ (theo 4-59) và $\widetilde{V}_f(A)$ (theo bảng 4-1), xác định giao điểm của chúng với $A^* = 1{,}25z_a$, $\omega^* = 0{,}55\ \text{sec}^{-1}$ là thông số cần tìm mà $2z_a$ là khoảng trống giữa hai điểm tựa. Các đặc tính tần có thể vẽ theo MATLAB.

Bài tập 4–2 Xác định hệ số khuếch đại giới hạn của phần tuyến tính $W_t(s) = k/Ts(1 + sT)$ nếu khâu phi tuyến có dạng khe hở.

Đáp án :

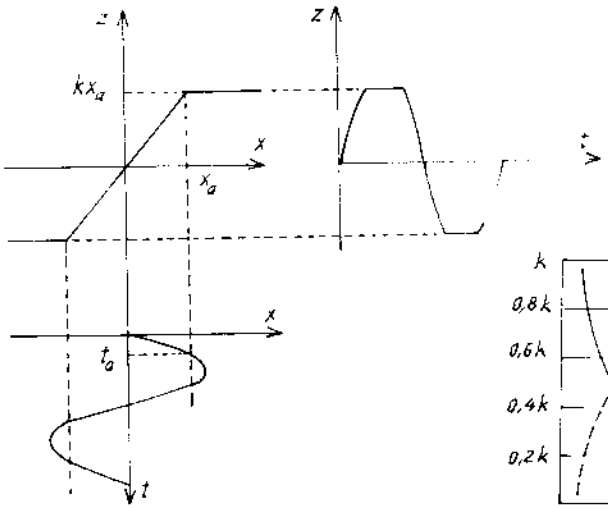
Bằng cách vẽ đặc tính phi tuyến $V_f(A)$ cho khâu phi tuyến dạng khe hở (theo bảng 4-1) và đặc tính $W_t(j\omega)$ với những trị số k khác nhau. Hệ số khuếch đại k khi $W_t(j\omega)$ tiếp xúc với $\tilde{V}_f(A)$ là thông số cần tìm : $k = k_{g1} = 3,5$.



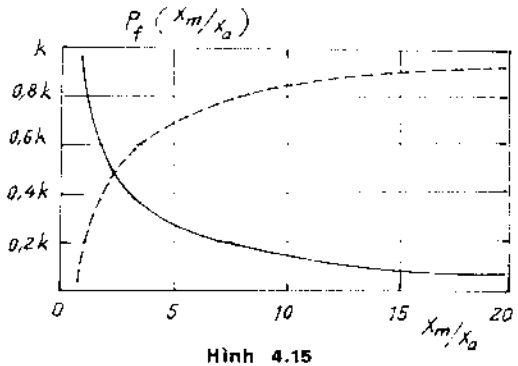
Hình 4.13

Nếu dùng phương pháp mặt phẳng pha cũng xác định được $k_{g2} = 3,04$. Do tính chất lọc của phương pháp tuyến tính hóa điều hòa mà $k_{g1} > k_{g2}$.

Bài tập 4–3. Hệ số khuếch đại phức của khâu bão hòa như ở hình 4.14.



Hình 4.14



Hình 4.15

Đáp án

$$P_f(X_m) = \frac{Z_{P1}}{X_m} = \frac{2k}{\pi}\left(\omega t_a + \frac{x_a}{X_m}\cos\omega t_a\right).$$

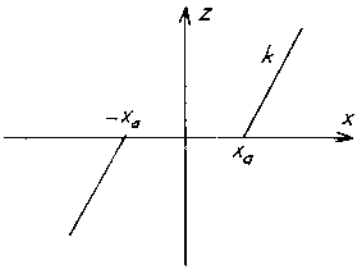
k là độ nghiêng của đặc tính phi tuyến.

hay :

$$P_f\left(\frac{X_m}{x_a}\right) = \frac{2k}{\pi}\left(\sin^{-1}\frac{1}{X_m/x_a} + \sqrt{\frac{\frac{1}{1-(X_m/x_a)^2}}{X_m/x_a}}\right) \qquad (4\text{-}60)$$

Đặc tính như ở hình 4–15 khi $X_m = x_a$, hệ số khuếch đại phức bằng k. Khi X_m tăng thì hệ số khuếch đại phức giảm.

Bài tập 4–4 Hệ số khuếch đại phức của khâu kém nhạy (có vùng chết) như ở hình 4.16.



Hình 4.16

Đáp án :

Hệ số khuếch đại phức của tổng các hàm phi tuyến bằng tổng của hệ số khuếch đại phức các hàm phi tuyến riêng rẽ. Như vậy hệ số khuếch đại phức bằng k trừ đi hệ số khuếch đại phức khâu bão hòa (4–60). Đặc tính ấy như đường nét đứt ở hình 4.15.

Bài tập 4–5. Hệ điều khiển ăngten có khuếch đại phi tuyến. Khảo sát hệ trên hình 4.17a. Phần tuyến tính có hệ số khuếch đại bằng 10. Khâu phi tuyến có độ nghiêng $k_1 = 1$ và $k_2 = 0{,}5$.

Đáp án :

Tra bảng hay dùng phương pháp tương tự như ở bài tập 4–3, ta xác định hệ số khuếch đại phức :

$$P_f(X_m) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sin^{-1}\frac{2}{X_m} + \frac{2}{X_m}\sqrt{1-\frac{4}{X_m^2}}\right)$$

Nếu $X_m < 2$, phương trình trên vô nghĩa (vì $x_a = 2$) và $-P_f = -1$ với X_m giữa 2 và ∞, các đặc tính $-\tilde{W}_f(A) = -P_f(X_m)$ và $\frac{1}{W_t(j\omega)}$ được vẽ ở hình 4.17b vì, theo (4–31) còn có thể viết :

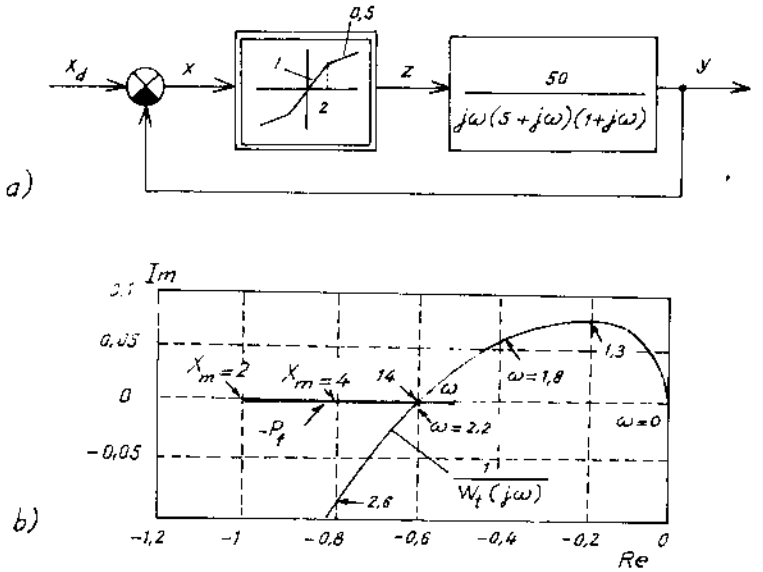
$$-\tilde{W}_f(A) = \frac{1}{W_t(j\omega)} \qquad (4\text{-}61)$$

Nếu đường Nyquist nghịch đảo hoàn toàn nằm phía trái của hàm mô tả $-\tilde{W}_f(A)$ thì hệ ổn định ; ở đây hai đường cắt nhau tại $A = X_m = 14$. Ngay cả khi không có tín hiệu vào mà có điều kiện đầu bé cũng sẽ có

dao động và biên độ sẽ tăng đến $X_m = 14$. Ở điểm này hệ ổn định và dao động giảm. Cứ thế lặp lại quá trình và cuối cùng là chế độ tự dao động với :

$$A^* = X_m^* = \pm 14 \text{ và tần số } \omega = \omega^* = 2{,}2 \text{ rad sec}^{-1}.$$

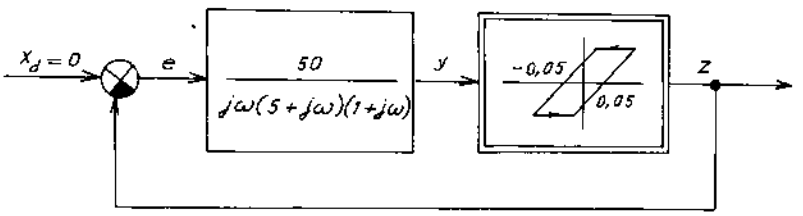
Có thể dùng MATLAB, SIMULINK để khảo sát hệ trên.



Hình 4.17

Nếu đường Nyquist nghịch đảo cắt phần ảo của trục thực bên trái của điểm (−1, jo) thì hệ sẽ ổn định vô điều kiện. Muốn thế cần "tăng" hệ số khuếch đại một đại lượng 1/0,6 = 1,67 và vì là đường Nyquist nghịch đảo nên hệ số khuếch đại phải nhỏ hơn 50/1,67 = 30.

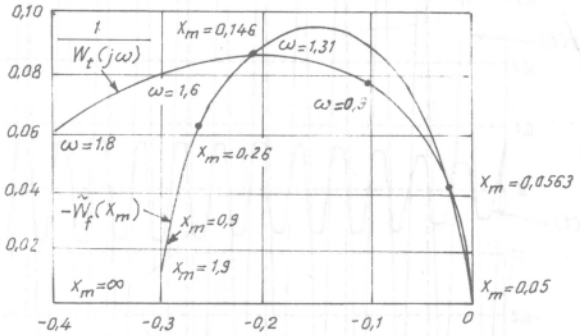
Bài tập 4-6 Khảo sát hệ ăngten có đặc tính kiểu khe hở như ở hình 4.18. Khâu phi tuyến có độ nghiêng là 0,3 và khe hở bằng 0,1 (vì $y_a = \pm 0{,}05$).



Hình 4.18

Đáp án :

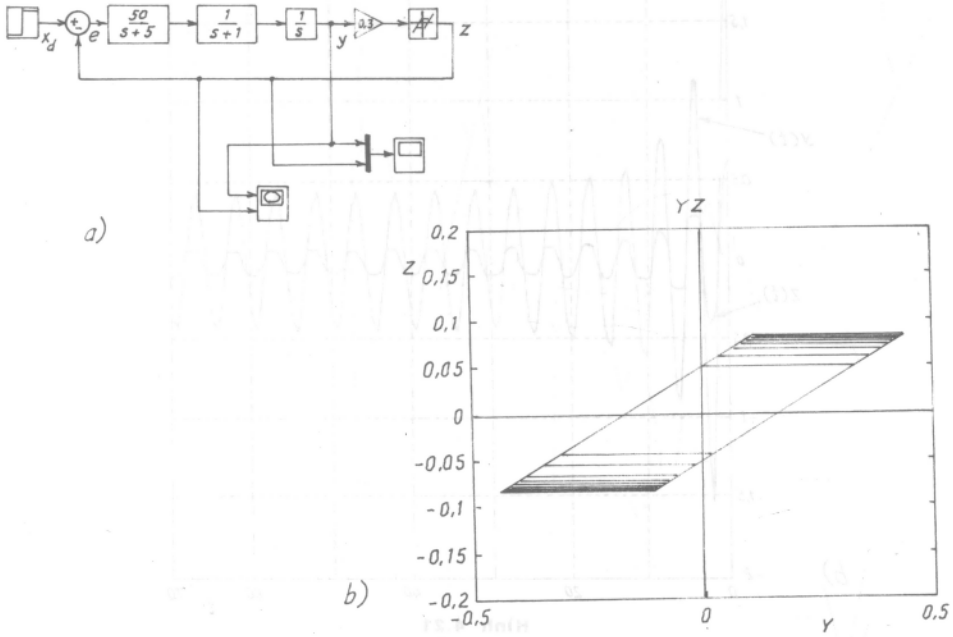
Đường cong Nyquist nghịch đảo và hàm mô tả $-\tilde{W}_f(X_m)$ như ở hình 4.19.



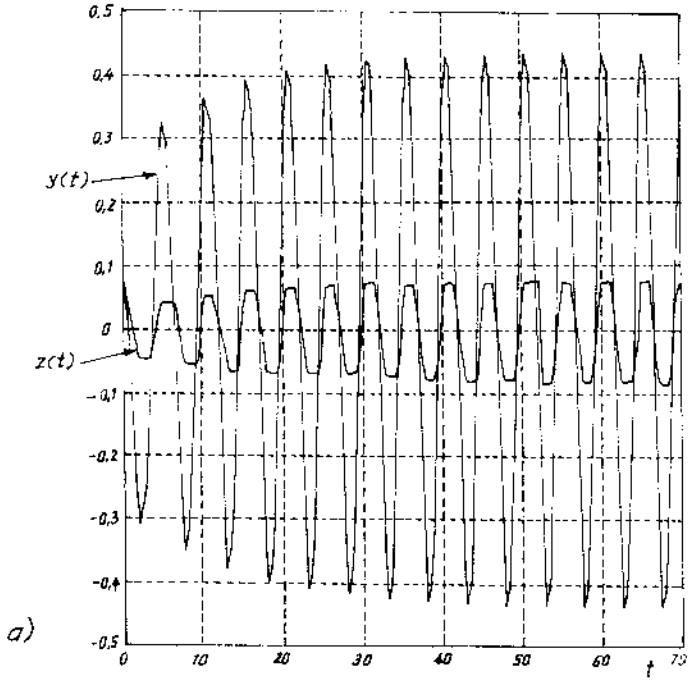
Hình 4.19

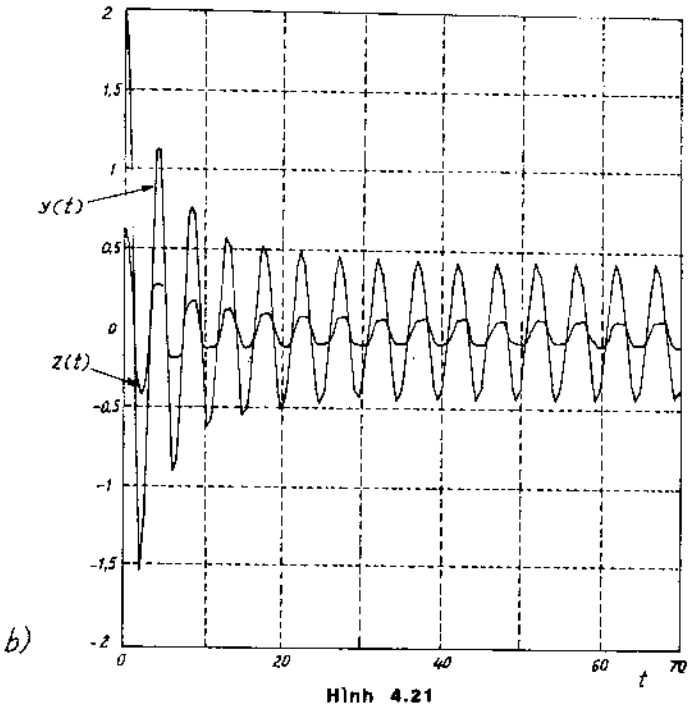
Ở hình 4.20a là sơ đồ khối mô hình hóa theo SIMULINK.

Hình 4.20b là đặc tính khe hở. Với tín hiệu vào $x_d = 0$ và điều kiện đầu $y_o = 0,06$, quá trình là dao động tăng dần như ở hình 4.21a, còn $y_o = 2$ là dao động tắt dần như ở hình 4.21b.



Hình 4.20


0,5
0,4
0,3
y(t)
0,2
0,1
0
z(t)
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
a)
0
10
20
30
40
50
60
70
t


2
1,5
1
y(t)
0,5
0
z(t)
-0,5
-1
-1,5
-2
b)
0
20
40
60
70
t

Hình 4.21

Chương 5
TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ PHI TUYẾN

5.1. KHÁI NIỆM VỀ ỔN ĐỊNH Ở HỆ PHI TUYẾN

Ở hệ tuyến tính [19] quá trình quá độ có thể được xem như gồm hai thành phần : thành phần cưỡng bức và thành phần tự do. Hệ tuyến tính được xem là ổn định nếu thành phần tự do (hay thành phần quá độ) tiến đến 0 khi $t \to \infty$.

Ở hệ phi tuyến, nguyên lý xếp chồng không thể ứng dụng được và quá trình không thể tách biệt thành phần quá độ và thành phần cưỡng bức. Khác với hệ tuyến tính, hệ phi tuyến có nhiều khái niệm về ổn định tùy thuộc vào mức độ chênh lệch khỏi trạng thái cân bằng và tùy thuộc vào tác động từ ngoài đối với hệ.

Hệ không có tác động từ ngoài hoặc tác động ngoài không thay đổi trong quá trình làm việc gọi là *hệ ôtônôm*. Ở hệ *không ôtônôm* tác động từ ngoài vào thay đổi theo thời gian.

Đối với hệ ôtônôm có hai khái niệm khác nhau về ổn định : *ổn định của trạng thái cân bằng* và *ổn định của chế độ tự dao động*. Đối với hệ không ôtônôm có khái niệm về *ổn định của quá trình cưỡng bức*.

Trạng thái cân bằng, quá trình cưỡng bức hay chế độ tự dao động chỉ tồn tại trong thực tế nếu chúng ổn định. Tính ổn định của chúng được đánh giá theo tính chất của sự biến đổi các chênh lệch khi đặt vào hệ thống những tác động nhất định.

Để sử dụng các phương pháp tuyến tính cho hệ phi tuyến, dùng khái niệm về *chuyển động không bị kích thích* và *chuyển động bị kích thích*.

Có thể xem một trong các chuyển động đã được tính toán đối với hệ ở những điều kiện đầu nhất định và tác động từ ngoài cho trước là chuyển động không bị kích thích. Mọi chuyển động khác là chuyển động bị kích thích khi có tác động ngắn hạn của nhiễu được đặt vào hệ ở thời điểm $t = 0$. Như vậy, trạng thái cân bằng và chế độ tự dao động

ổn định có thể được xem như trường hợp riêng và quan trọng của chuyển động không bị kích thích của hệ ôtônôm.

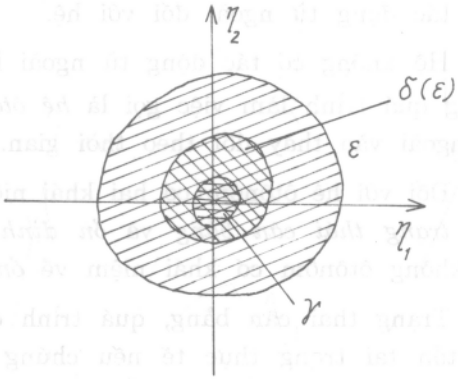
Hãy khảo sát chuyển động của một hệ liên tục trong không gian pha của vectơ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Chuyển động không bị kích thích được mô tả bằng vectơ hàm $\mathbf{x}^o(t)$ hay tổ hợp của n hàm $x_k^o(t)$. Mọi chuyển động bị kích thích được mô tả bằng vectơ hàm $\mathbf{x}(t)$ hay tổ hợp của n hàm $x_k(t)$. Chênh lệch của quá trình được mô tả bằng vectơ $\eta(t)$ hay tổ hợp n hàm $\eta_k(t)$. Vậy :

$$\eta(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^o(t) ,$$

hay $$\eta_k(t) = x_k(t) - x_k^o(t).$$

Để đánh giá về ổn định của chuyển động, Liapunov đã dùng khái niệm sau :

Chuyển động là ổn định nếu với một vùng ε cho trước, nhỏ bao nhiêu tùy *ý của những chênh lệch cho phép* η_k *so với* $\eta_k = 0$, *ta có thể chọn được vùng điều kiện ban đầu* $\delta(\varepsilon)$ *nằm bên trong vùng* ε và có tính chất là không có *chuyển động bị kích thích nào bắt đầu từ bên trong vùng* δ *lại có thể đến được biên giới của vùng* ε. Nếu những vùng như thế không tồn tại thì chuyển *động là không ổn định.*



Hình 5.1

Các vùng ε, δ trên mặt phẳng η_1, η_2 được mô tả ở hình 5.1. Ngoài các vùng ε, δ như đã nêu, còn có γ là vùng của các trị số ổn định của chênh lệch giữa chuyển động bị kích thích và không bị kích thích :

$$\text{Khi } t \to \infty \quad \eta \in \gamma \qquad (5\text{-}1)$$

Dạng của γ tùy thuộc vào vùng chênh lệch ban đầu δ và nói chung có kích thước bằng bậc của hệ (n). Có hai trường hợp quan trọng thường gặp trong thực tế như sau :

a) $$\gamma = 0 \text{ nghĩa là } \lim_{t \to \infty} \eta_k(t) = 0 . \qquad (5\text{-}2)$$

Chuyển động như vậy là *ổn định tiệm cận*. Với điều kiện (5–2), nếu vùng điều kiện đầu δ tương đối bé, gọi là *ổn định tiệm cận trong phạm vi bé*. Nếu vùng δ có kích thước nhất định, ta gọi là *ổn định tiệm cận trong phạm vi lớn*, còn nếu phương trình (5–2) thỏa mãn với mọi điều kiện đầu gọi là *ổn định tiệm cận toàn bộ*. Khi hệ ổn định tiệm cận toàn bộ với đặc tính phi tuyến nhất định, gọi là *ổn định tuyệt đối*.

b) $\gamma \neq 0$, ví dụ như γ là một đoạn trên η_1, nghĩa là (5–2) không thỏa mãn khi có chênh lệch khỏi trạng thái cân bằng nhỏ bao nhiêu tùy ý, trong trường hợp này ổn định là *không tiệm cận*.

Những khái niệm về ổn định nói trên có thể áp dụng cho trạng thái cân bằng, chế độ tự dao động và quá trình cưỡng bức.

Đối với chế độ tự dao động, ta dùng khái niệm về *ổn định của quỹ đạo*.

Chuyển động có chu kỳ (tự dao động) trong không gian trạng thái được mô tả bằng đường cong khép kín G. Nếu khoảng cách ngắn nhất đến đường cong G từ mút của vectơ chuyển động x(t) là $\rho[x(t),G]$ ta có :

Chuyển động là *ổn định tiệm cận theo quỹ đạo* của hệ ôtônôm nếu :

$$\lim_{t\to\infty} \rho[x(t),G] = 0 \quad (5\text{–}3)$$

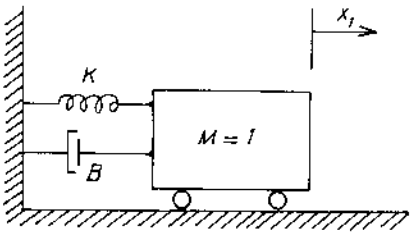
Như vậy, đối với chuyển động ổn định của hệ tuyến tính (khi tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng có phần thực âm) thì ổn định là tiệm cận trong toàn bộ. Nếu một nghiệm của phương trình đặc trưng bằng 0 thì chuyển động của hệ là ổn định theo Liapunov nhưng không tiệm cận. Vùng hấp dẫn γ là một đoạn thẳng trên trục η_1.

Phương pháp Liapunov dựa vào quan điểm về năng lượng và quan hệ giữa năng lượng tích luỹ và tính ổn định của hệ thống.

Hãy xét ví dụ về một hệ gồm lò xo K, trọng khối M và giảm chấn B như ở hình 5.2, được mô tả bởi :

$$\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Kx_1 = 0$$

Đặt:
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \;; \\ \dot{x}_2 &= -Kx_1 - Bx_2 \end{aligned}\right\} \quad (5\text{–}4)$$



Hình 5.2

Tại một thời điểm nào đó năng lượng V của hệ gồm có động năng do chuyển động của trọng khối và thế năng tích lũy ở lò xo, ta có :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 ,$$

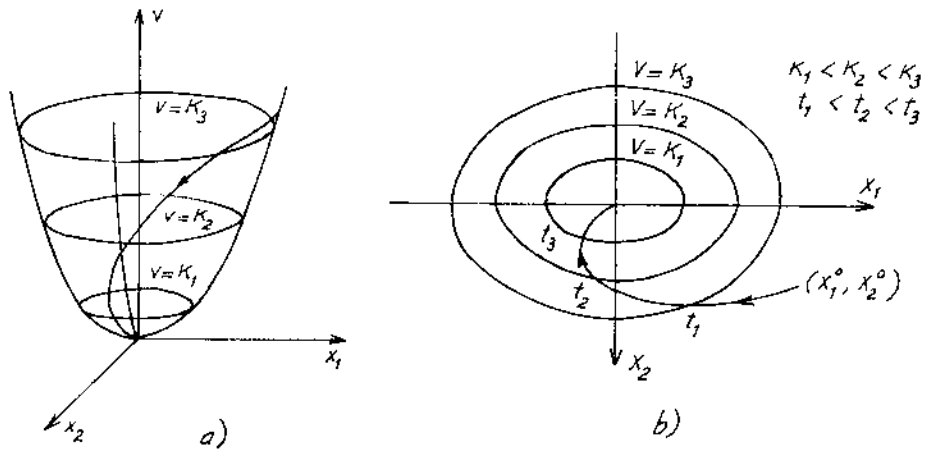
mà $$V(x) > 0 \text{ khi } x \neq 0,$$

$$V(0) = 0.$$

Như vậy có nghĩa là tổng năng lượng là dương đến khi nào hệ ở trạng thái cân bằng, nghĩa là x = 0. Tốc độ biến đổi của năng lượng là :

$$\frac{d}{dt}V(x_1,x_2) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} = -Bx_2^2 .$$

Như vậy $\frac{dV}{dt}$ sẽ âm ở mọi điểm trừ trường hợp $x_2 = 0$ (ở đó $dV/dt = 0$) và năng lượng của hệ không thể tăng. Từ (5.4), khi $x_2 = 0$ thì $\dot{x}_2 = -Kx_1$. Như vậy hệ không thể ở trạng thái không cân bằng với $x_2 = 0$ cho nên năng lượng không thể không biến đổi ngoại trừ điểm cân bằng ở đó năng lượng bằng 0.



Hình 5.3

Nếu một mặt cong được mô tả bởi :

$$V = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2 .$$

như ở hình 5.3a với các đường đồng mức V. Từ điều kiện ban đầu

(x_1^o, x_2^o) nếu vẽ quỹ đạo trên mặt cong, điểm biểu diễn x(t) cắt các đường đồng mức và chuyển động đến điểm thấp nhất là điểm cân bằng. Ở hình 5.3b có hình chiếu của quỹ đạo ấy trên mặt phẳng x_1, x_2. Có thể so sánh tổng năng lượng của hệ mà ta muốn khảo sát về ổn định của trạng thái cân bằng với ví dụ về chuyển động của điểm x(t) trên mặt cong nói trên về điểm cân bằng. Với những hàm vô hướng không âm nói trên, Liapunov đã đưa ra khái niệm về ổn định.

5.2. PHƯƠNG PHÁP LIAPUNOV TRỰC TIẾP

Liapunov A. M. đã đề ra phương pháp cho phép xác định *điều kiện đủ* để hệ điều khiển tự động phi tuyến ổn định (còn gọi là *phương pháp thứ hai của Liapunov*).

Ví dụ chuyển động của hệ phi tuyến ôtônôm, được mô tả bởi :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{–}5)$$

hay $$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; i = \overline{1,n} \qquad (5\text{–}6)$$

hoặc dưới dạng vectơ : $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x})$ (5–7)

với **x** là vectơ trạng thái. f_i là hàm đã cho trong không gian trạng thái.

Trạng thái cân bằng được xác định bởi :

$$f(\mathbf{x}) = 0. \qquad (5\text{–}8)$$

Để giản đơn, ta cho rằng hệ phương trình (5–8) có một nghiệm duy nhất ở gốc tọa độ $\mathbf{x} = 0$ ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... $x_n = 0$).

Theo phương pháp Liapunov, dùng hàm V(**x**) được cho trong không gian pha có những tính chất sau :

1– Hàm V(**x**) cùng với đạo hàm riêng bậc một theo mọi x là liên tục trong một miền hở nào đó kể cả gốc tọa độ.

2– Ở gốc tọa độ, hàm V(**x**) có trị số bằng 0.

3- Trong miền ấy, nếu ngoài gốc tọa độ, hàm V(**x**) khác 0 và cùng dấu thì ta gọi là *hàm có dấu xác định*. Nếu ngoài gốc tọa độ, còn có những điểm khác trong miền có trị số bằng 0, ngoài ra hàm vẫn không đổi dấu gọi là *hàm có dấu không đổi*.

Liapunov đã chứng minh điều kiện ổn định sau :

Với phương trình chuyển động (5-8) của hệ, nếu tìm được một hàm $V(x_1, \ldots, x_n)$ có dấu xác định mà đạo hàm của nó dV/dt là một hàm có *dấu không đổi*, ngược dấu với V hoặc bằng không thì trạng thái cân bằng ở gốc tọa độ là *ổn định*.

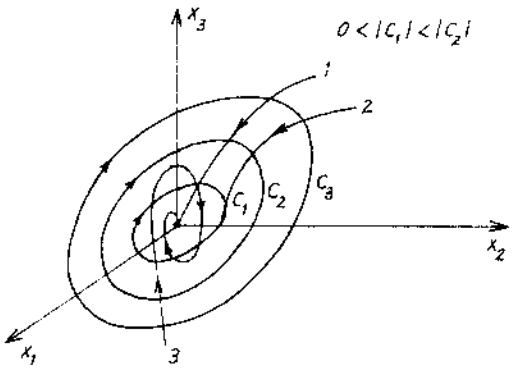
Nếu đạo hàm dV/dt là hàm có *dấu xác định*, ngược dấu với V thì trạng thái cân bằng ở gốc tọa độ là *ổn định tiệm cận*.

Ổn định (hay ổn định tiệm cận) của trạng thái cân bằng thỏa mãn các điều kiện của định lý Liapunov là đối với hàm V có những tính chất nêu trên, có thể xây dựng trong miền gần gốc tọa độ những mặt đồng mức khép kín mô tả bởi phương trình :

$$V(x_1, \ldots, x_n) = C \qquad (5\text{-}9)$$

và chứa cả gốc tọa độ.

Bằng cách giảm $|C|$, các mặt phẳng ấy sẽ tiến đến gốc tọa độ (hình 5.4). Ở hình 5.4 có ba dạng quỹ đạo pha : ở quỹ đạo *1*, đạo hàm dV/dt có dấu xác định, ngược dấu với V. Nếu mọi quỹ đạo pha có dạng như quỹ đạo *1*, vị trí cân bằng sẽ ổn định tiệm cận.



Hình 5.4

Quỹ đạo pha *2* tương ứng với đạo hàm dV/dt có dấu không đổi nên sẽ ổn định theo Liapunov nhưng không tiệm cận. Khi dV/dt = 0, quỹ đạo pha có thể "dính" vào bề mặt với V = C như ở hình 5.4. Bằng cách chọn điểm xuất phát phù hợp có thể làm cho điểm tới hạn hay quỹ đạo pha nằm trong miền cho trước của vị trí cân bằng.

Quỹ đạo 3 tương ứng với ổn định tiệm cận của vị trí cân bằng mặc dù không phù hợp với điều kiện Liapunov. Từ đó thấy rằng điều kiện Liapunov không phải là điều kiện cần để hệ điều khiển tự động ổn định. Điều kiện ổn định của vị trí cân bằng theo Liapunov mà hàm V tồn tại là *điều kiện đủ* để hệ ổn định trong phạm vi nhỏ. Nếu chọn được hàm V thỏa mãn những điều kiện trên thì hệ ổn định tiệm cận, nhưng nếu không chọn được hàm V như thế thì không thể kết luận hệ không ổn định tiệm cận.

Khi hàm V đã được chọn, để xác định dấu của đạo hàm, không cần giải phương trình (5-6). Thực vậy, vì :

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (5\text{-}10)$$

Khó khăn của việc chọn hàm V đã hạn chế ứng dụng của phương pháp Liapunov. Chưa có những phương pháp đơn trị nào để xây dựng những hàm V như vậy mà chỉ có những phương pháp trợ giúp.

5.2.1. PHƯƠNG PHÁP LIAPUNOV TRỰC TIẾP VÀ HỆ LIÊN TỤC TUYẾN TÍNH ÔTÔNÔM

Việc dùng phương pháp trực tiếp của Liapunov cho phép mở rộng khái niệm về ổn định của hệ phi tuyến. Ngoài ra hàm Liapunov cho ta những chỉ tiêu chất lượng và số lượng để tổng hợp hệ.

Hệ tuyến tính ôtônôm được mô tả bằng phương trình trạng thái :

$$\dot{X} = AX \quad (5\text{-}11)$$

mà A là ma trận n x n hằng và thực.

Hệ trên sẽ ổn định tiệm cận toàn bộ ở gốc tọa độ nếu và chỉ nếu với ma trận Q đối xứng xác định dương cho trước, có một ma trận đối xứng xác định dương P thỏa mãn phương trình :

$$A'P + PA = -Q \quad (5\text{-}12)$$

Chứng minh điều kiện đủ :

Nếu dùng hàm vô hướng dạng bình phương :

$$V(X) = X'PX$$

với giả thiết rằng ma trận P đối xứng và xác định dương là nghiệm duy nhất của phương trình (5-12).

Chú ý rằng $V(X) > 0$ đối với $X \neq 0$

$$V(X) = 0. \text{ khi } X = 0$$

Lấy đạo hàm của V theo thời gian

$$\dot{V}(X) = \dot{X}'PX + X'P\dot{X}.$$

Kết hợp với (5-11) ta có

$$\begin{aligned}\dot{V}(X) &= X'A'PX + X'PAX \\ &= X'(A'P + PA)X \\ &= -X'QX .\end{aligned}$$

Vì Q xác định dương, V(X) xác định âm. Chuẩn của vectơ X được xác định bởi :

$$||X|| = (X'PX)^{\frac{1}{2}}$$

khi P xác định dương. Vì vậy :

$$V(X) = ||X||^2 ,$$

$$V(X) \to \infty \text{ thì } ||X||^2 \to \infty$$

Như vậy, theo định lý Liapunov, hệ sẽ ổn định tiệm cận toàn bộ ở gốc tọa độ.

Với P là nghiệm duy nhất của (5-12) có thể chứng minh điều kiện đủ [7].

Nếu (5-11) là ổn định tiệm cận, với ma trận Q nào đó, tồn tại ma trận P thỏa mãn (5-12).

Nếu Q xác định dương thì P cũng xác định dương.

Ví dụ 5-1 Xác định tính ổn định của hệ :

$$\dot{X} = AX .$$

với
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Trước tiên giải phương trình (5-12) để xác định P với ma trận Q cho trước (là ma trận đối xứng xác định dương hay bán xác định dương) ví dụ chọn Q = I ta có :

$$A'P + PA = -I .$$

hay :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (5\text{-}13)$$

Ma trận P là ma trận đối xứng xác định dương đối với hệ ổn định. Từ (5-13), ta có :

$$-2p_{11} + 2p_{12} = -1$$

$$-2p_{11} - 5p_{12} + p_{22} = 0$$

$$-4p_{12} - 8p_{22} = -1$$

Giải hệ phương trình trên ta có :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{60} & -\frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}.$$

Ma trận P là xác định dương vì theo định lý Silvester $p_{11} > 0$, $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$. Hệ sẽ ổn định tiệm cận trong phạm vi lớn. Q được chọn một cách tùy ý, ví dụ :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

thì hệ trên cũng ổn định tiệm cận như với Q = I.

5.2.2. PHƯƠNG PHÁP KRASOVSKI

Hệ phi tuyến được mô tả bởi :

$$\dot{X} = f(X) \; ; \; f(0) = 0 \; . \qquad (5\text{-}14)$$

Giả thiết f có đạo hàm riêng bậc một liên tục và J (X) là định thức Jacobi :

$$J(X) = \frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{bmatrix} . \qquad (5\text{-}15)$$

Hệ phi tuyến (5-14) là ổn định tiệm cận ở gốc tọa độ nếu tồn tại ma trận P đối xứng, xác định dương sao cho ma trận :

$$F(X) = J'(X) + PJ(X) \; . \qquad (5\text{-}16)$$

là xác định âm với mọi X. Từ đó :

$$V(X) = f'Pf. \qquad (5\text{-}17)$$

Chứng minh :

Từ (5-17) ta có $\frac{dV}{dt} = \dot{f}'(X)\,Pf(X) + f'(X)\,P\dot{f}(X)$

$$= \left(\frac{\partial f(X)}{\partial X}\dot{X}\right)' Pf(X) + f'(X)\,PJ(X)\,f(X)$$

$$= f'(X)\,J'(X)\,Pf(X) + f'(X)\,PJ(X)\,f(X)$$

$$= f'(X)\left[J'(X)\,P + PJ(X)\right]f(X)$$

$$= f'(X)\,F(X)\,f(X)$$

Vì F(X) là xác định âm theo giả thiết, $\frac{dV}{dt}$ là xác định âm. Từ (5-17) thấy rằng $V(0) = 0$, $V(X) > 0$ cho mọi $X \neq 0$, trừ phi $f(X) = 0$ với một số $X \neq 0$, nghĩa là trừ phi có những trạng thái cân bằng khác.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng nếu F(X) là xác định âm thì (5-14) không có điểm cân bằng nào khác ngoài gốc tọa độ.

Dùng vectơ $\frac{\partial f(\alpha X)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(\alpha X)}{\partial x} X$. Lấy tích phân hai vế từ $\alpha = 0$ đến $\alpha = 1$ ta có :

$$f(X) = \int_0^1 \frac{\partial f(\alpha X)}{\partial X} X d\alpha .$$

Nếu vectơ $X \neq 0$ mà $f(X) = 0$ thì :

$$X'P\,f(X) = 0 = \int_0^1 X'P\frac{\partial f(\alpha X)}{\partial X} X d\alpha$$

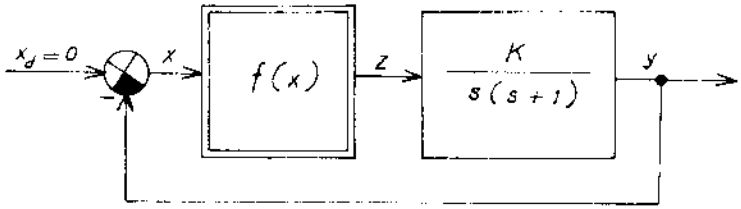
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 X'F(\alpha X)\,X d\alpha$$

Vì $F(\alpha X)$ là xác định âm cho mọi α, tích phân trên là âm và không thể bằng 0 vì đó là điều mâu thuẫn. Vậy điều kiện để có ổn định tiệm cận theo Liapunov đã được chứng minh.

Ví dụ 5-2 Cho hệ phi tuyến như ở hình 5.5 với phương trình phi tuyến dạng :

$$Z = f(x)$$

và $x_d = 0$, $y = -x$ vậy $Kz = -\ddot{x} - -\dot{x}$.



Hình 5.5

Đặt $x_1 = x$; $x_2 = dx_1/dt$, ta có phương trình trạng thái :

$$\dot{x}_1 = f_1(x) = x_2$$

Điểm cân bằng nằm ở gốc tọa độ nếu f(0) = 0.

Bây giờ ta có :

$$J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K\dfrac{df(x_1)}{dx_2} & -1 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}18)$$

Với $$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} . \qquad (5\text{-}19)$$

để ma trận P xác định dương :

$$p_{11} > 0 ; \qquad (5\text{-}20a)$$

$$p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \qquad (5\text{-}20b)$$

Ma trận $F(x) = J'(\mathbf{x})P + PJ(\mathbf{x})$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -K\dfrac{df(x_1)}{dx_1} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K\dfrac{df(x_1)}{dx_1} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2p_{12}K\dfrac{df(x_1)}{dx_1} & p_{11} - p_{12} - p_{22}K\dfrac{df(x_1)}{dx_1} \\ p_{11} - p_{12} - p_{22}K\dfrac{df(x_1)}{dx_1} & 2(p_{12} - p_{22}) \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}21)$$

Để hệ ổn định tiệm cận, $-F(\mathbf{x})$ phải xác định dương, nghĩa là :

$$2p_{12}K\frac{df(x_1)}{dx_1} > 0 \ , \qquad (5\text{–}22)$$

$$-4p_{12}K\frac{df(x_1)}{dx_1}(p_{12} - p_{22}) - \left(p_{11} - p_{12} - p_{22}K\frac{df(x_1)}{dx_1}\right)^2 > 0 \ ,$$

hoặc : $$4p_{12}K\frac{df(x_1)}{dx_1}(p_{22} - p_{12}) > \left(p_{11} - p_{12} - p_{22}K\frac{df(x_1)}{dx_1}\right)^2 \ . \qquad (5\text{–}23)$$

Giả thiết $K > 0$ và chọn $p_{12} > 0$. Từ bất phương trình (5–23) rút ra điều kiện :

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} > 0 \ . \qquad (5\text{–}24)$$

Chọn $p_{11} = p_{12}$ và $p_{22} = \beta p_{12}$ với $\beta > 1$. Từ bất phương trình (5–23) rút ra :

$$4(\beta - 1) > K\beta^2\frac{df(x_1)}{dx_1} \ . \qquad (5\text{–}25)$$

Bất phương trình (5–24) và (5–25) xác định điều kiện ổn định tiệm cận của hệ. Ví dụ nếu lấy $f(x_1) = x_1^3$, đặc tính phi tuyến đối xứng ở phần tư thứ nhất và thứ ba. Vậy :

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = 3x_1^2 > 0 \ .$$

Điều kiện (5– 25) cho ta :

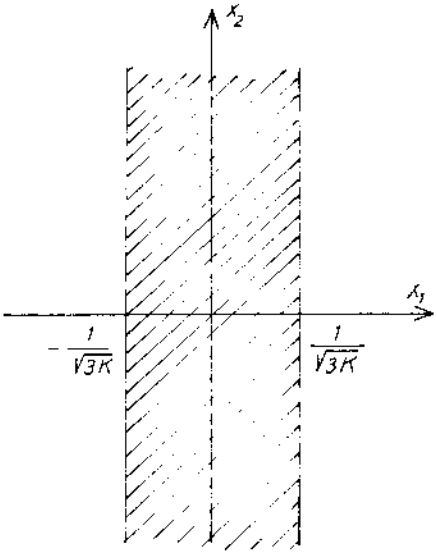
$$x_1^2 < \frac{4}{K}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2}\right) .$$

Khi $\beta = 2$, x_1 cực đại, do đó :

$$x_1^2 < \frac{1}{3K} ,$$

hoặc : $$-\frac{1}{\sqrt{3K}} < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3K}} .$$

Miền ổn định tiệm cận là miền gạch sọc như ở hình 5.6.



Hình 5.6

5.2.3. PHƯƠNG PHÁP LURIE

Trong trường hợp hệ phi tuyến như ở hình 5.5 với đặc tính phi tuyến thỏa mãn điều kiện $xZ(x) > 0$, $Z(0) = 0$, nghĩa là nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba, hàm V theo Lurie có thể có dạng :

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta \int_0^x Z(\xi)\, d\xi \,. \qquad (5\text{-}26)$$

mà $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dạng bình phương của tọa độ pha :

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \;; \qquad (5\text{-}27)$$

α_{ij} và β là hệ số hằng và $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Có thể chứng minh rằng mặt cong đồng mức Liapunov chứa gốc tọa độ và có những trị số càng xa gốc tọa độ càng tăng theo trị số tuyệt đối. Mặt cong ấy với α, β tương ứng có thể dùng để đánh giá tính ổn định của trạng thái cân bằng trong toàn bộ hệ.

Ví dụ 5 – 3 Xác định điều kiện ổn định của trạng thái cân bằng của hệ phi tuyến có phần tuyến tính là khâu quán tính :

$$W_t(s) = \frac{k}{1 + sT} \qquad (5\text{-}28)$$

Phương trình chuyển động của hệ :

$$T\frac{dy}{dt} + y = kZ(x) \;;\; x = x_d - y \qquad (5\text{-}29)$$

Với $x_d = 0$; $y = -x$, ta có :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{T} - \frac{k}{T} Z(x) \,. \qquad (5\text{-}30)$$

Chọn hàm Liapunov dạng :

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x Z(\xi)\, d\xi \,. \qquad (5\text{-}31)$$

Đạo hàm của V :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \left[x + Z(x)\right]\frac{dx}{dt} = -\left[x + Z(x)\right]\left[\frac{x}{T} + \frac{k}{T}Z(x)\right]$$

$$= -\left[\frac{x^2}{T} + \frac{k}{T}Z^2(x) + \frac{1+k}{T}xZ(x)\right] \,.$$

Với $xZ(x) > 0$, đạo hàm trên sẽ âm ở cả không gian pha nếu $k > 0$. Như vậy điều kiện đủ để ổn định tiệm cận trong toàn bộ của hệ bậc một với khâu quán tính là hệ số khuếch đại của phần tuyến tính là dương, còn đặc tính phi tuyến nằm trong phạm vị góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

5.3. ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI CỦA TRẠNG THÁI CÂN BẰNG

Ổn định tuyệt đối là ổn định tiệm cận của trạng thái cân bằng trong toàn bộ đối với họ đặc tính phi tuyến nhất định.

Thông thường họ đặc tính phi tuyến nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba, xác định bởi đường thẳng $Z = kX$ và $Z = rX$ $(r < k)$ như ở hình 5.7a. Đặc tính phi tuyến như vậy gọi là đặc tính nằm trong hình quạt $[r, k]$. Những ví dụ của hệ ổn định tuyệt đối với đặc tính phi tuyến giữa góc $[0, \infty]$, nghĩa là ở toàn bộ góc phần tư thứ nhất và thứ ba đã được xét ở phương pháp trực tiếp của Liapunov. Thực ra tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối xuất hiện trên cơ sở ứng dụng phương pháp Liapunov.

5.3.1. TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI POPOV

Năm 1959 nhà toán học Rumani Popov V. M. đã đề ra tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối trong miền tần đối với các hệ điều khiển tự động. Tiêu chuẩn phát biểu như sau :

1– Trường hợp phần tuyến tính ổn định

Nếu hệ kín có phần tuyến tính $W_t(s)$ ổn định, còn đặc tính phi tuyến $Z(x)$ nằm trong góc $0 \leq Z(x)/x \leq k$ (hình quạt $[0, k]$) thì điều kiện đủ để hệ ổn định là :

$$\mathrm{Re}[(1 + jq\omega)W_t(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0 , \qquad (5\text{–}32)$$

với q là số thực bất kỳ.

Lưu ý là $k < \infty$ và $\lim_{\omega \to \infty} W_t(j\omega) = 0$. Đó là điều kiện tính đến thông số nhỏ phi tuyến tính. Với :

$$W_t(j\omega) = P_t(\omega) + jQ_t(\omega) \qquad (5\text{-}33)$$

bất đẳng thức (5– 32) có dạng :

$$P_t(\omega) - q\omega Q_t(\omega) + \frac{1}{k} > 0 \ . \qquad (5\text{-}34)$$

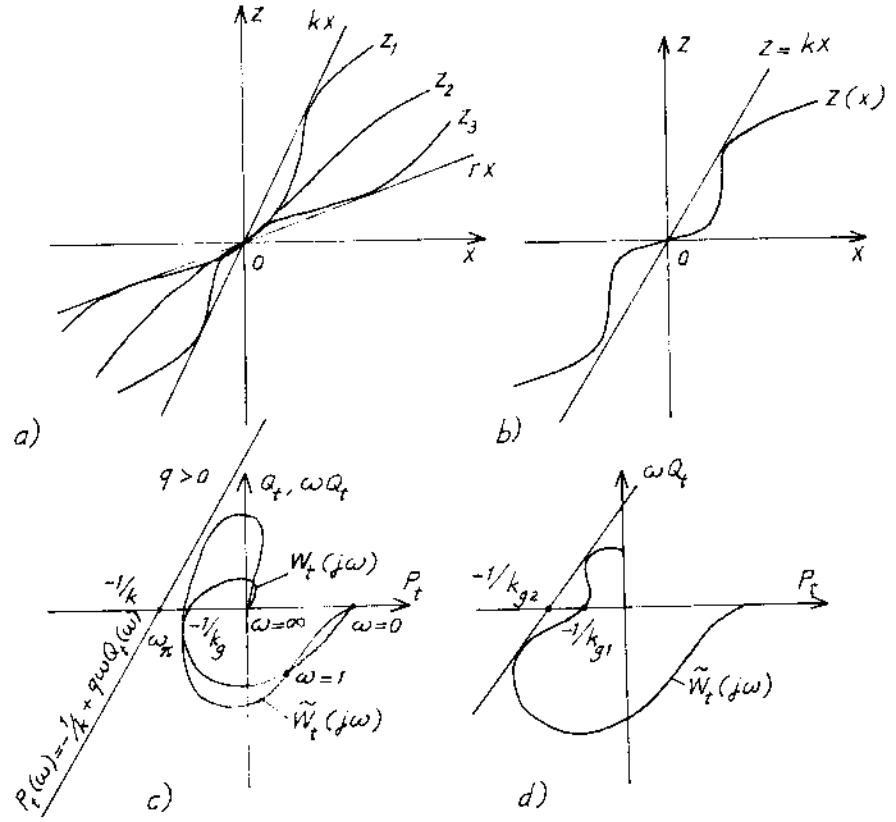
Nếu dùng đặc tính tuyến tính biến dạng :

$$\widetilde{W}_t(j\omega) = P_t(\omega) + j\omega Q_t(\omega). \qquad (5\text{-}35)$$

và vẽ đặc tính $\widetilde{W}_t(j\omega)$ cùng đường thẳng (đường thẳng Popov) :

$$P_t(\omega) = \frac{-1}{k} + q\omega Q_t(\omega) \ . \qquad (5\text{-}36)$$

thì điều kiện thỏa mãn bất phương trình (5-32) là *toàn đồ* $\widetilde{W}_t(j\omega)$ (đường *cong Popov) nằm bên phải đường thẳng Popov.* (hình 5.7c). Đó còn gọi là *tiêu chuẩn đường thẳng*.

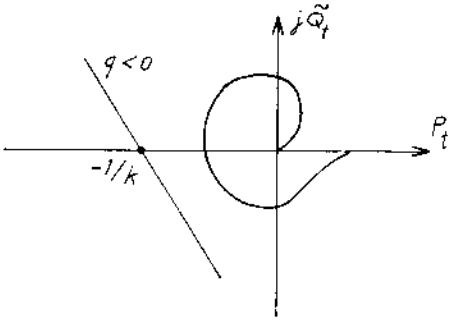


Hình 5.7

Đặc tính tuyến tính $\widetilde{W}_t(j\omega)$ và đặc tính tuyến tính biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega)$ có phần thực như nhau nên cùng cắt trục hoành ở chung một điểm cũng như ở tần số $\omega = 1$. Đặc tính tuyến tính biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega)$ không đối

xứng qua trục thực như đặc tính tuyến tính $W_t(j\omega)$ ở những tần số khác dấu nhau.

Nếu đặc tính $\tilde{W}_t(j\omega)$ là đường cong lồi thì tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối trùng với tiêu chuẩn Nyquist (xem mục 3.3.1 [19]) khi thay đặc tính phi tuyến bằng đường thẳng Z = kX. Trong trường hợp ấy điều kiện không bao vây điểm có tọa độ (−1, jo) của $kW_t(j\omega)$ trùng với điều kiện ổn định tuyệt đối. Hệ phi tuyến như vậy là hệ ổn định với góc Hurwitz (góc hình thành bởi đường thẳng $Z = k_g x$ và hoành trục mà k_g là trị số giới hạn dưới của hệ số khuếch đại phần tuyến tính). Ở hình 5.7 đường Popov có trị số q > 0 và ở hình 5.8 đường Popov có q < 0.



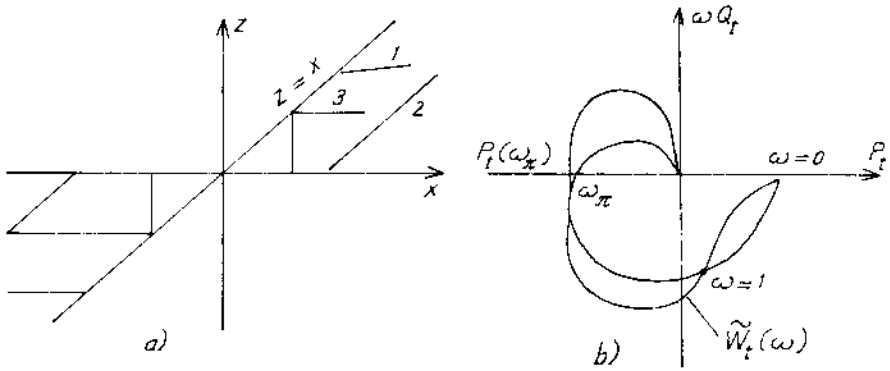
Hình 5.8

Nếu đặc tính $\tilde{W}_t(j\omega)$ là đường cong có hình dạng phức tạp thì tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối chặt chẽ hơn tiêu chuẩn Nyquist (hình 5.8). Trị số giới hạn theo Nyquist $\left(\frac{1}{k_{g1}}\right)$ bé hơn trị số giới hạn theo Popov $\left(\frac{1}{k_{g2}}\right)$. Như vậy $k_{g1} > k_{g2}$. Đặc tính $\tilde{W}_t(j\omega)$ lồi khi các khâu quán tính và dao động nối tiếp nhau và có không nhiều hơn một khâu tích phân.

Ví dụ 5–4 Phần tuyến tính : $W_t(s) = \dfrac{k}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)}$. Hãy xác định k_g mà đặc tính phi tuyến của hệ là đơn trị và bất kỳ, nằm trong góc [0, 1], là ổn định tuyệt đối. Đặc tính phi tuyến trong trường hợp này có thể là khâu giới hạn (đường *1* ở hình 5.9a), khâu kém nhạy (đường *2*) hay rơle ba vị trí (đường *3*) hoặc một kiểu phi tuyến đơn trị nào khác.

Vì $\tilde{W}_t(\omega)$ là đường cong lồi (hình 5.9b) cho nên có thể dùng tiêu chuẩn Nyquist. Điều kiện ổn định tương ứng với bất đẳng thức $-W_t(\omega_\pi) = -P_t(\omega_\pi) < 1$. Từ đó xác định được :

$$k_g = \left(T_1 + T_2 + T_3\right)\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right) - 1 .$$

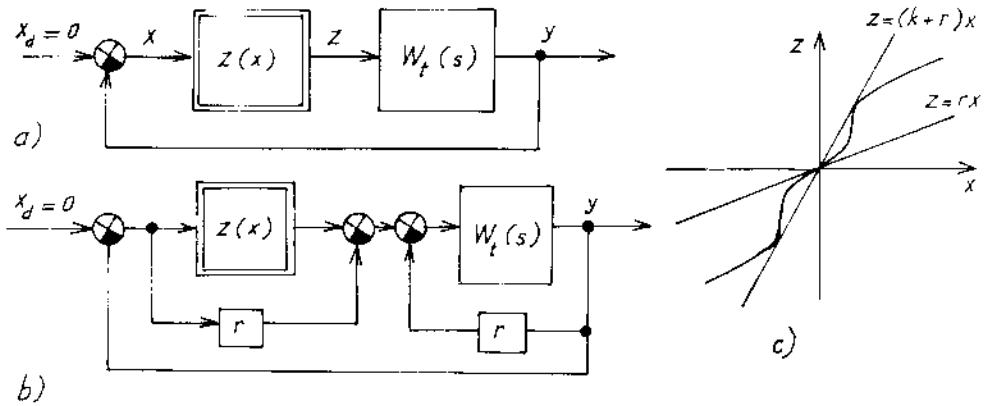


Hình 5.9

2. Khi phần tuyến tính là trung tính hay không ổn định (có nghiệm trên trục ảo hay nghiệm phải).

Trong trường hợp này tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối không thể sử dụng ngay mà phải qua một phép biến đổi. Để phần tuyến tính trở nên ổn định, dùng hồi tiếp âm như ở hình 5.10b. Để có sơ đồ tương đương với hình 5.10a, cần mắc khâu song song với khâu phi tuyến. Như vậy, phần tuyến tính tương đương bây giờ là :

$$W_{td}(s) = \frac{W_t(s)}{1 + rW_t(s)} \qquad (5\text{–}37)$$



Hình 5.10

Còn đặc tính phi tuyến tương đương là :

$$Z_{td}(x) = Z(x) - rx \ . \qquad (5\text{-}38)$$

Vì : $\dfrac{Z_{td}(x)}{x} = \dfrac{Z(x)}{x} - r$ nên đặc tính phi tuyến thực bây giờ phải nằm trong góc [r, k+r] như ở hình 5.10c.

Tiêu chuẩn Popov bây giờ tương ứng với :

$$\mathrm{Re}(1 + qj\omega)\, W_{td}(j\omega) + \frac{1}{k - r} > 0 \ . \qquad (5\text{-}39)$$

Theo (5-33) :

$$\mathrm{Re}(1 + qj\omega)\, \frac{P_t(\omega) + Q_t(\omega)}{1 + rP_t(\omega) + j\, rQ_t(\omega)} + \frac{1}{k - r} > 0 \ .$$

Sau một vài phép biến đổi ta có phần thực :

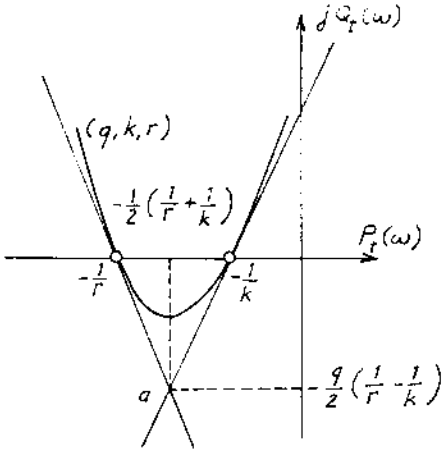
$$P_t^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k}\right) P_t(\omega) - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right) q\omega Q_t(\omega) + Q_t^2(\omega) + \frac{1}{kr} > 0 \ . \qquad (5\text{-}40)$$

Phương trình :

$$P_t^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k}\right) P_t(\omega) - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{k}\right) q\omega\, Q_t(\omega) + Q_t^2(\omega) + \frac{1}{kr} = 0 \ . \qquad (5\text{-}41)$$

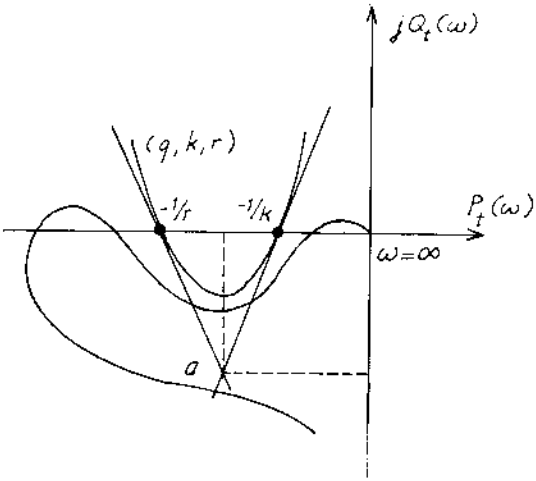
trên mặt phẳng đặc tính tuyến tính biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega)$ là đường parabôn đi qua hai điểm $-\dfrac{1}{r}$ và $-\dfrac{1}{k}$ trên trục hoành tiếp tuyến tại điểm ấy có độ nghiêng $-\dfrac{1}{q}$ và $\dfrac{1}{q}$ và gặp nhau ở điểm a như ở hình 5.11.

Đặc tính phi tuyến tương đương nằm trong góc [0, k-r] tương ứng với đặc tính phi tuyến thực nằm trong góc [r, k+r]. Vậy hệ phi tuyến ổn định tuyệt đối ở trạng thái cân bằng nếu đặc tính phi tuyến Z(x) nằm trong góc [r, k+r], còn toán



Hình 5.11

đồ $\tilde{W}_t(j\omega)$ không cắt parabôn (q, k, r) như trường hợp ở hình 5.12. Do đó tiêu chuẩn này còn có tên là *tiêu chuẩn parabôn*. Khi r → 0 thì parabôn biến thành đường thẳng và tiêu chuẩn parabôn là trường hợp riêng của tiêu chuẩn đường thẳng. Chú ý rằng tiêu chuẩn parabôn sử dụng cho hệ trung tính hoặc không ổn định của phần tuyến tính với số lượng nghiệm không quá hai và số lượng nghiệm phải không quá một, nếu không, parabôn (q, k, r) sẽ cắt đường cong Popov.



Hình 5.12

5.3.2. TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI CỦA TRẠNG THÁI CÂN BẰNG VỚI ĐẶC TÍNH PHI TUYẾN KHÔNG DỪNG

Trong trường hợp này đặc tính phi tuyến không dừng :

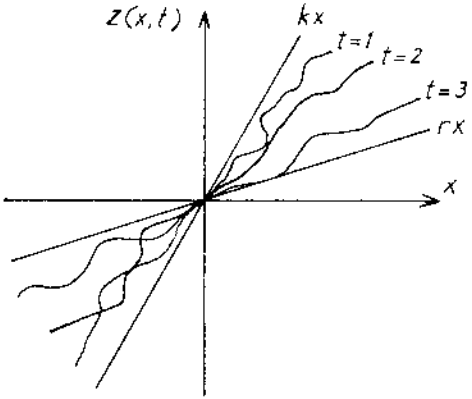
$$Z = Z(x, t) \qquad (5\text{–}42)$$

như ở hình 5.13. Giả thiết là đặc tính ấy thỏa mãn điều kiện Z(x, t) nằm trong miền (r, k) với mọi thời điểm t :

$$Z(0, t) = 0 \; ;$$

$$r < \frac{Z(x, t)}{x} < k \; . \qquad (5\text{–}43)$$

Trong trường hợp đặc tính phi tuyến là không dừng, ở bất đẳng thức tần số, đặt q = 0 (điều kiện ổn định tuyệt đối của quá trình cưỡng bức [23 – tr 268)]. Từ (5 –40) có dạng :



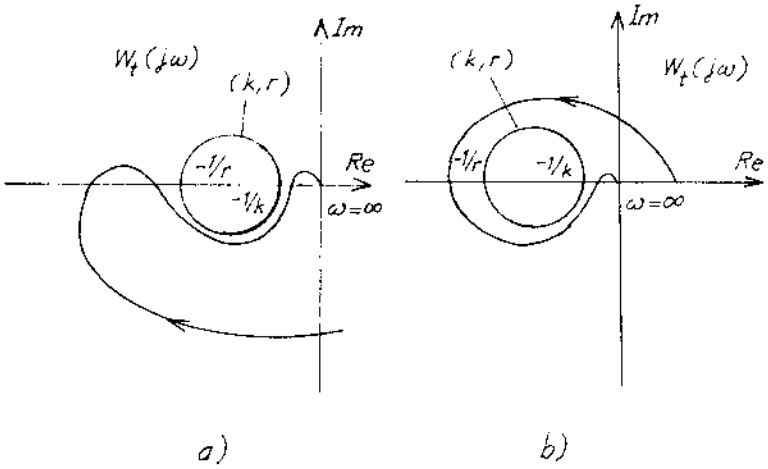
Hình 5.13

$$P_t^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k}\right) P_t(\omega) + Q_t^2(\omega) + \frac{1}{kr} > 0 . \qquad (5\text{-}44)$$

và (5-41) với q = 0 có dạng :

$$P_t^2(\omega) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{k}\right) P_t(\omega) + Q_t^2(\omega) + \frac{1}{kr} = 0 . \qquad (5\text{-}45)$$

Vậy hệ phi tuyến sẽ ổn định tuyệt đối ở trạng thái cân bằng với đặc tính phi tuyến là không dừng Z(x, t) với mọi t, nằm trong góc [r, k] nếu phần tuyến tính là ổn định và đường cong Nyquist không cắt đường tròn (k, r) (hình 5.14a).

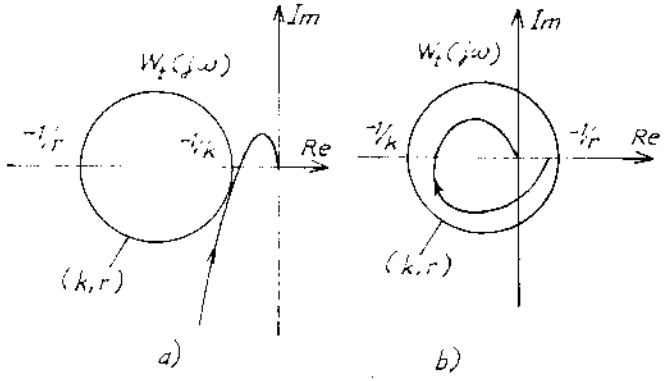


Hình 5.14

Nếu phần tuyến tính là không ổn định thì đường cong Nyquist không cắt đường tròn (k, r) và vây lấy nó $\frac{l}{2}$ lần theo chiều dương, với l là số nghiệm phải của phương trình đặc trưng (hình 5.14b). Đó là *tiêu chuẩn đường tròn*. Tiêu chuẩn Zames [12] dùng cho đặc tính Nyquist thông thường và cho đặc tính phi tuyến là dừng hay không dừng. Khi r < 0 thì điều kiện ổn định là đường cong Nyquist nằm trong đường tròn r, k như ở hình 5.15b. Ở hình 5.15a là trường hợp r > 0 và k > 0.

Ví dụ 5-5 Khảo sát hệ có hàm truyền của phần tuyến tính :

$$W_t(s) = \frac{16}{s(s+1)(s^2 + 0{,}45s + 16)} .$$



Hình 5.15

Đặc tính tuyến tính biến dạng :

$$\tilde{W}_t(j\omega) = \frac{16(\omega^2 - 16{,}45)}{(1+\omega^2)\left[(16-\omega^2)^2 + (0{,}45\omega)^2\right]} + j\,\frac{16(1{,}45\omega^2 - 16)}{(1+\omega^2)\left[(16-\omega^2)^2 + (0{,}45\omega)^2\right]}.$$

như ở hình 5.16. Hệ số khuếch đại tới hạn của hệ tuyến tính hóa :

$$k_{gt} = \frac{1}{0{,}3} \approx 3{,}33.$$

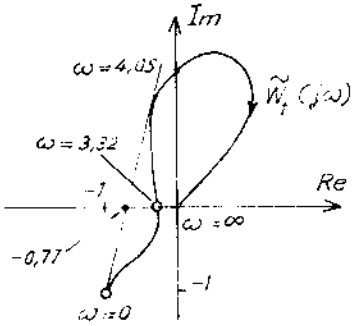
Nếu vẽ đường thẳng tiếp xúc với đặc tính tuyến tính biến dạng theo tiêu chuẩn đường thẳng, ta xác định hệ số khuếch đại tới hạn (hay hệ số tuyến tính hóa tĩnh k^t) :

$$k_g = \frac{1}{0{,}77} \approx 1{,}3.$$

Như vậy trạng thái cân bằng của hệ phi tuyến sẽ ổn định tuyệt đối nếu :

$$0 < k^t(x) = \frac{Z(x)}{x} < k_g \approx 1{,}3.$$

Miền ổn định của hệ phi tuyến bé hơn miền ổn định của hệ tuyến tính.



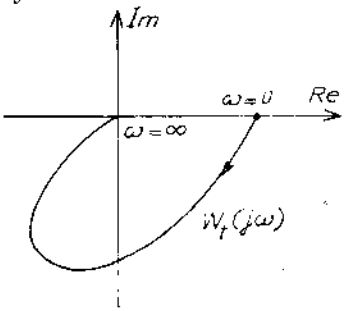
Hình 5.16

Ví dụ 5-6 Phần tuyến tính của hệ có hàm truyền :

$$W_t(s) = \frac{1}{T_1^2 s^2 + 2\delta T s + 1}.$$

với $T_1^2 = a$, $2\delta T = b$. Đặc tính tần như ở hình 5.17. Đặc tính tuyến tính biến dạng tương ứng bằng :

$$\widetilde{W}_t(j\omega) = \frac{1 - a\omega^2}{(1 - a\omega^2)^2 + b\omega^2} - j\frac{b\omega^2}{(1 - a\omega^2)^2 + b\omega^2}.$$



Hình 5.17

$\widetilde{W}_t(j\omega)$ khác với $W(j\omega)$ ở chỗ tỷ lệ xích của trục tung tăng lên ω lần. Vì $\omega \geqslant 0$ nên khi thay đổi $W(j\omega)$ luôn có thể vẽ qua gốc trục một đường thẳng mà đặc tính tần ấy nằm bên phải của nó. Như vậy trạng thái cân bằng của hệ phi tuyến sẽ ổn định tuyệt đối với mọi đặc tính phi tuyến nằm trong ô thứ nhất và thứ ba.

5.4. ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI CỦA QUÁ TRÌNH

Ổn định tuyệt đối của trạng thái cân bằng trong nhiều trường hợp chưa đủ để bảo đảm hệ tự động điều khiển phi tuyến tính vận hành bình thường khi có những tác động đầu vào hay nhiễu khác nhau. Trong hệ, ổn định tiệm cận của quá trình là trạng thái mà sau khi mất kích thích hệ trở lại với quá trình như khi chưa có nhiễu tác động một cách tiệm cận. Hệ ổn định tuyệt đối nếu quá trình ổn định tiệm cận với họ đặc tính phi tuyến nhất định.

Naumov B. N. và Tsipkin Ya. Z. đã tìm ra điều kiện đủ để quá trình ổn định tuyệt đối khi có tác động vào có giới hạn. Trong trường hợp chung, khi phần tuyến tính không ổn định, điều kiện ấy là :

$$\mathrm{Re}\,\frac{W_t(j\omega)}{1 + rW_t(j\omega)} + \frac{1}{k - r} > 0. \qquad (5\text{-}46)$$

với r là hệ số hồi tiếp để bảo đảm phần tuyến tính ổn định.

Trong trường hợp ấy đạo hàm của đặc tính phi tuyến $Z'(x)$ hay *hệ số tuyến tính hóa đạo hàm* $k^{d}(x)$ nằm trong miền :

$$r < k^d(x) = Z'(x) < k \quad . \qquad (5\text{-}47)$$

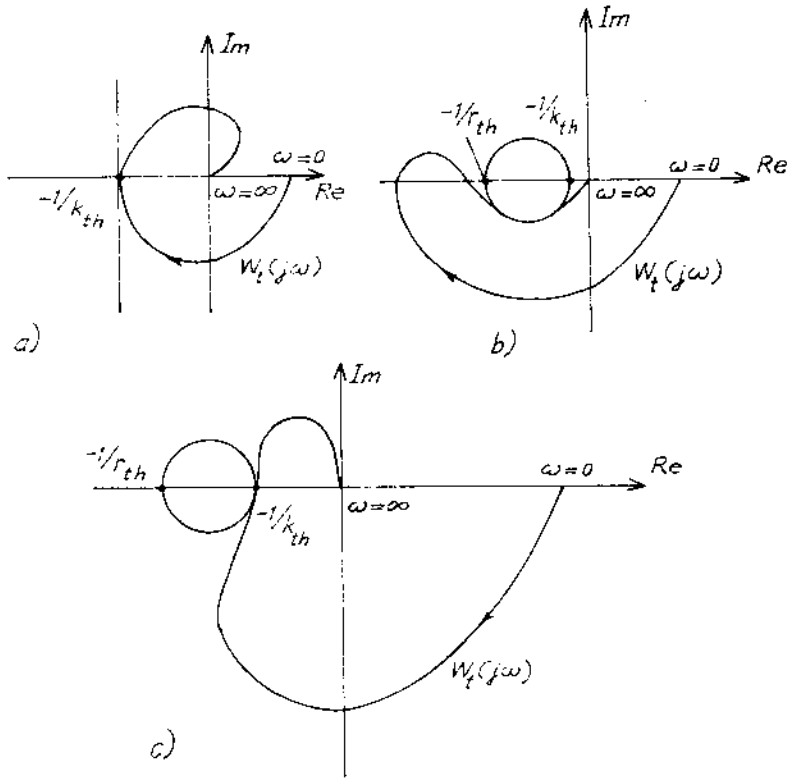
Có thể xác định trị số tới hạn của r và k theo tiêu chuẩn đường tròn và đặc tính tần của phần tuyến tính thông thường như sau :

Bằng cách vẽ đường tròn (r, k) tiếp xúc với đặc tính tần (hình 5.18a, b, c), xác định các trị số tới hạn r_{th} và k_{th} sao cho với :

$$r_{th} < k^d(x) = Z'(x) < k_{th}$$

thì quá trình là ổn định tuyệt đối. Ở đây $k^d(x)$ là hệ số tuyến tính hóa đạo hàm và $Z'(x) = \dfrac{dZ(x)}{dx}$.

Khi $r \to 0$ thì đường tròn (r, k) biến thành đường thẳng đứng tiếp xúc với đặc tính tần (hình 5.18a): đường tròn có bán kính vô cùng lớn.



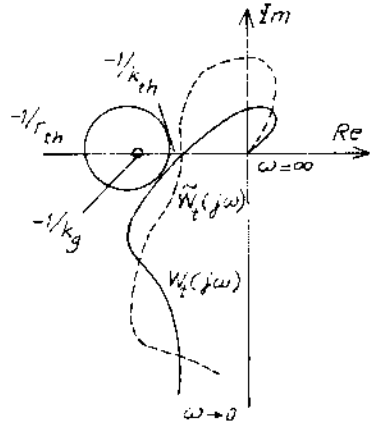
Hình 5.18

Thông thường $k_{th} < k_g$, nghĩa là : vùng ổn định tuyệt đối của quá trình hẹp hơn vùng ổn định tuyệt đối của trạng thái cân bằng. Nếu điểm tiếp xúc nằm trên trục thực (hình 5.18a, c) thì $k_{th} = k_g$; trong trường hợp ấy tiêu chuẩn đường tròn là điều kiện cần và đủ. Trị số k_{th} có thể lớn hơn k_g khi $k^d(x) = Z'(x)$ thay đổi không đáng kể, nghĩa là đặc tính phi tuyến Z(x) rất gần với đặc tính tuyến tính.

Ví dụ 5-7 Với ví dụ 5-5, đặc tính tần của phần tuyến tính $W_t(j\omega)$ như ở hình 5.19 (đường nét đậm).

Bằng cách vẽ đường tròn tiếp xúc với đặc tính tần ta xác định được k_{th} = 1,9 và r_{th} = 0,67.

Ở ví dụ 5-5, k_g = 1,3 nhỏ hơn trị số tới hạn k_{th} = 1,9. Tuy nhiên giới hạn biến đổi của đặc tính phi tuyến bị hạn chế đáng kể.



Hình 5.19

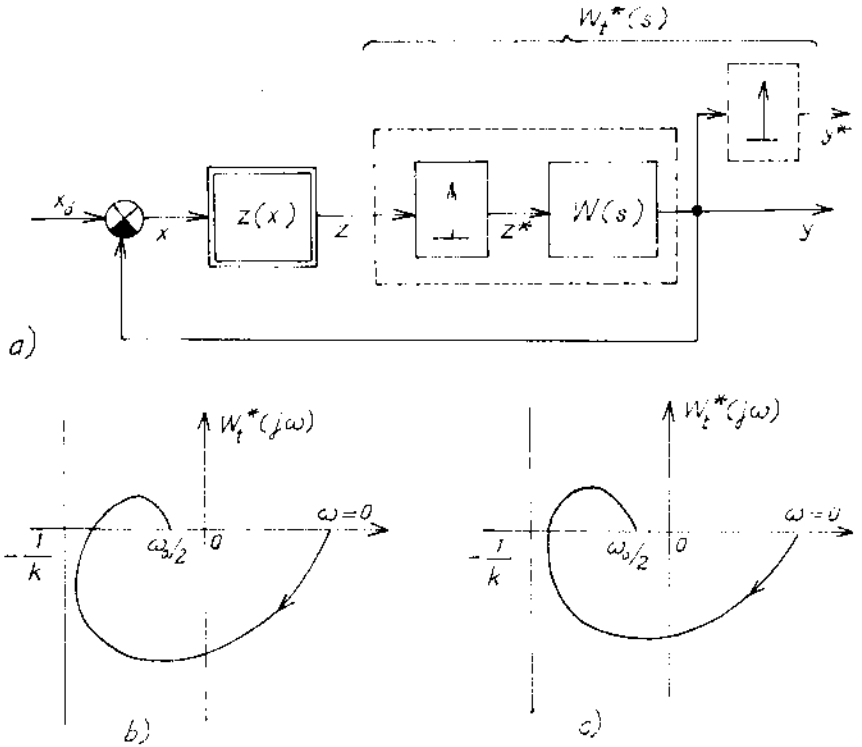
5.5. ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI CỦA HỆ XUNG

Đối với hệ xung phi tuyến mà khâu phi tuyến Z(x) nằm trước phần tử xung (hình 5.20a), có thể hình thành điều kiện ổn định (điều kiện đủ) trên cơ sở phương pháp trực tiếp của Liapunov cũng như tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối Popov, thông dụng là dạng đặc tính tần.

Công trình đầu tiên về đề tài này là của Tsipkin Ya. Z., ông đã chứng minh rằng điều kiện đủ để hệ xung với đặc tính phi tuyến nằm trong góc [0, k] ổn định tuyệt đối phải thỏa mãn bất đẳng thức :

$$\mathrm{Re}W_t^*(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 . \qquad (5\text{-}48)$$

với $W_t^*(j\omega)$ là đặc tính tần của phần xung tuyến tính của hệ với giả thiết là $W_t^*(j\omega)$ ổn định. Đặc tính phi tuyến nằm trong góc [0, k] có thể gián đoạn, đa trị hoặc không đừng.



Hình 5.20

Theo tiêu chuẩn này, hệ sẽ ổn định tuyệt đối nếu đặc tính tần $W_t^*(j\omega)$ nằm hoàn toàn ở phía phải của đường thẳng đứng đi qua điểm $\left(-\frac{1}{k}\right)$ (hình 5.20b). Điều kiện này không những là đủ mà còn là cần thiết khi đặc tính tần $W_t^*(j\omega)$ có cực tiểu ở giao điểm với trục thực (hình 5.20c). Trong trường hợp này trị số giới hạn của k ở hệ tuyến tính mà khâu phi tuyến được thay thế bằng tuyến tính, với hệ số khuếch đại k được xác định theo tiêu chuẩn Nyquist sẽ trùng với giới hạn của góc [0, k] được xác định theo Tsipkin.

Trường hợp vừa nêu ít gặp ; nhiều khi tiêu chuẩn (5-48) có yêu cầu tương đối cao đối với thông số của hệ. Đó là đường thẳng phải thẳng đứng mà đặc tính tần $W_t^*(j\omega)$ nằm bên phải nó. Chú ý rằng ở hệ liên

tục, đường thẳng Popov đi qua điểm có tọa độ $\left(-\frac{1}{k}\right)$ có độ nghiêng bất kỳ. Dễ thấy rằng trị số giới hạn của k đối với biên giới trên của góc [0, k] sẽ lớn hơn so với đường thẳng đứng Popov.

Đối với hệ có đặc tính phi tuyến đơn điệu thì tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối tương ứng với bất đẳng thức :

$$\mathrm{Re}\left[1 + q(1 - e^{-j\omega T})\right] W_t^*(j\omega) + \frac{1}{k} > 0 \qquad (5\text{-}49)$$

với q là số dương bất kỳ.

Toán tử $1 - e^{-j\omega T}$ tương ứng với sai phân bậc một, tương tự như nhân tử $j\omega$ ở bất đẳng thức Popov cho hệ liên tục. Nếu dùng đặc tính tần biến dạng của thành phần xung tuyến tính :

$$\tilde{W}_t^*(j\omega) = \mathrm{Re}W_t^*(j(\omega) + j\left\{\mathrm{Re}\left[e^{-j\omega T}W_t^*(j\omega)\right] - R_e W_t^*(J\omega)\right\} . \qquad (5\text{-}50)$$

thì tiêu chuẩn (5-49) giống như tiêu chuẩn Popov thông thường đối với hệ liên tục. Hệ xung phi tuyến ổn định khi phần xung tuyến tính ổn định và qua điểm có tọa độ $\left(-\frac{1}{k}\right)$ có thể vẽ đường thẳng với độ nghiêng dương $\frac{1}{q}$ tùy ý sao cho biểu đồ $W_t^*(j\omega)$ nằm bên phải nó.

Trong trường hợp phần xung tuyến tính trung tính hay không ổn định, cách biến đổi sơ đồ cấu trúc tương đương giống như ở hệ liên tục.

Để quá trình ở hệ xung phi tuyến ổn định tuyệt đối, Tsipkin Ya. Z. nêu lên điều kiện đủ giống như điều kiện khi phần tuyến tính là trung tính hay không ổn định của trạng thái cân bằng hay của quá trình ở hệ liên tục :

$$\mathrm{Re}\frac{W_t^*(j\omega)}{1 + rW_t^*(j\omega)} + \frac{1}{k - r} > 0 \qquad (5\text{-}51)$$

với điều kiện về đạo hàm của đặc tính phi tuyến :

$$r < k^d(x) = dZ(x)/dx < k \qquad (5\text{-}52)$$

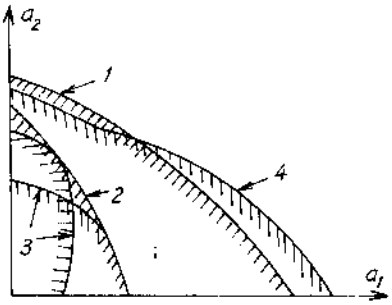
khác với trường hợp liên tục là đặc tính này có thể không dừng.

5.6. SO SÁNH CÁC PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ PHI TUYẾN

Từ các phương pháp phân tích ổn định của hệ phi tuyến đã khảo sát, chỉ có phương pháp mặt phẳng pha (hay không gian pha nói chung) cho phép xác định điều kiện cần và đủ để hệ ổn định. Với độ chính xác của mô hình theo hệ phương trình đã cho mà điều kiện cần và đủ để hệ ổn định được xác định nhờ vào mô hình hóa toán học.

Tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối tần số cho điều kiện đủ nhưng không phải là điều kiện cần, trong khi đó phương pháp trực tiếp của Liapunov với dạng hàm V nhất định có thể cho vùng ổn định hẹp hơn tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối của Popov. Tuy nhiên cả hai phương pháp này đều bảo đảm tính ổn định trong vùng đã cho.

Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa tùy thuộc vào mức độ thỏa mãn của giả thiết lọc mà cho ta trị số gần đúng của miền ổn định, nhưng lại không bảo đảm tính ổn định trong miền này vì miền đã xác định theo phương pháp tuyến tính hóa điều hòa có thể vượt ra khỏi giới hạn miền ổn định. Trong miền này đôi khi có tự dao động đa tần.



Hình 5.21

Miền ổn định xác định theo các phương pháp khác nhau được mô tả định tính như ở hình 5.21. Ở đây a_1 và a_2 là thông số tổng quát của hệ phi tuyến đã cho. Phía được gạch sọc tương ứng với miền ổn định. Nếu đường *1* là giới hạn miền ổn định thực của hệ thì đường *2* là giới hạn ổn định theo tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối Popov. Đường *3* là giới hạn ổn định theo phương pháp trực tiếp của Liapunov với những hàm V khác nhau.

Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa ứng với đường *4* mà có nơi vượt ra ngoài giới hạn thực của miền ổn định.

Ví dụ 5–8 Dùng tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối của trạng thái cân bằng để xác định hệ số khuếch đại giới hạn $(Nk)_g$ của hệ tùy động rơle như ở ví dụ 4–2 và so sánh với hệ số khuếch đại giới hạn xác định theo phương pháp tuyến tính hóa điều hòa.

Phần tuyến tính của hệ có hàm truyền :

$$W_t(s) = \frac{k}{s(1 + 0,2s)(1 + 2s)} . \qquad (5-53)$$

Tần số cắt của đặc tính tần $W_t(j\omega)$ với phần âm của trục thực đã được xác định theo ví dụ 4-2 bằng 1,58 sec^{-1}. Ở tần số này, môđun của đặc tính tần $W_t(j\omega^*) = 0,182k$. Đặc tính rơle (bảng 4-1) nằm trong góc [r, N] mà r là trị số dương vô cùng bé, còn $N \equiv Z_g/x_a$ là hệ số chuẩn hóa. Do đặc tính tần $W_t(j\omega)$ có dạng lồi, theo tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối :

$$0,182k < 1/N,$$

từ đó : $(Nk)_g = 1/0,182 = 5,5\ sec^{-1}$.

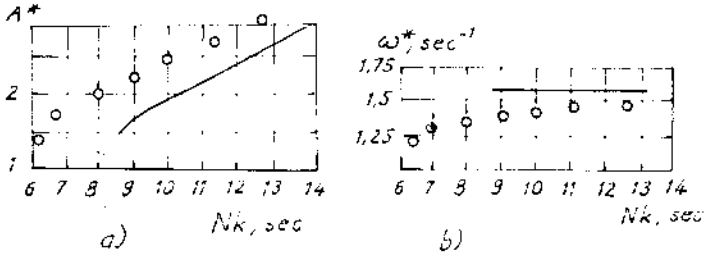
Ở ví dụ 4-2, theo phương pháp tuyến tính hóa điều hòa, tần số tự dao động không thay đổi khi thay đổi hệ số khuếch đại của phần tuyến tính, tuy nhiên trong thực tế tần số ấy thay đổi.

Sai số của phương pháp tuyến tính hóa điều hòa được mô tả ở hình 5.22a, b, với kết quả tính toán (đường nét liền) và kết quả mô hình hóa trên máy tính (các điểm). Điểm tận cùng bên trái của tính toán và thực nghiệm tương ứng với trị số giới hạn $(Nk)_g$ của chế độ tự dao động : theo tính toán bằng 8,6 sec^{-1} và theo thực nghiệm bằng 6,3 sec^{-1}.

Tất cả các số liệu nói trên phù hợp với thông số a_1, trên hình 5.21.

Kết quả tính toán cho trị số $(Nk)_g$ lớn hơn, có nghĩa là ở hệ thống có tự dao động, mặc dầu theo phương pháp tuyến tính hóa thì không.

Theo hình 5.22, khi tăng Nk thì biên độ và tần số tự dao động tăng và chênh lệch giữa trị số tính toán và thực tế của A^*, ω^* giảm rõ rệt.



Hình 5.22

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài tập 5-1 Phương trình chuyển động của hệ con trỏ giản đơn (hình 7.20 [19]) như sau :

$$m\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{mg}{L}\sin\Phi = 0 .$$

Nếu tính đến ma sát của không khí thì :

$$mL^2\frac{d^2\Phi}{dt^2} + B\frac{d\Phi}{dt} + mgL\sin\Phi = 0 . \qquad (5\text{-}54)$$

Phân tích về tính ổn định của con trỏ theo tiêu chuẩn Liapunov trực tiếp.

Đáp án :

Năng lượng của hệ gồm có động năng và thế năng :

$$V(\Phi) = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgL - mgL\cos\Phi + \frac{1}{2}mL^2\dot{\Phi}^2 . \qquad (5\text{-}55)$$

Đạo hàm của (5-55) theo thời gian :

$$\dot{V}(\Phi) = mgL\dot{\Phi}\sin\Phi + mL^2\dot{\Phi}\ddot{\Phi} = \dot{\Phi}(mgL\sin\Phi + mL^2\ddot{\Phi})$$

Thay (5-54) vào phương trình trên ta được :

$$\dot{V}(\Phi) = -B\dot{\Phi}^2 \qquad (5\text{-}56)$$

Phương trình (5-55) (hàm V) không thể âm, bằng 0 khi $\cos\Phi = 1$ và $\dot{\Phi} = 0$. Trong trường hợp ấy $\Phi = \pm n2\pi$ (n = 0, 1 ,2,...) ta có trạng thái ổn định tới hạn. Dấu của (5-56) luôn âm có nghĩa là năng lượng chỉ giảm và trạng thái ổn định là tiệm cận. Vai trò của B là tiêu tán năng lượng. Nếu B = 0, hệ sẽ không ổn định tiệm cận nhưng ổn định theo Liapunov.

Nếu chọn $x_1 = \Phi$ và $x_2 = \dot{\Phi}$, hàm V(x) là xác định dương trong miền R vì nó có đạo hàm riêng luôn dương ngoài điểm V(0) = 0. Nếu V(x) không bé hơn 0 nhưng bằng 0 với một số đại lượng khác 0 của x trong miền R thì V(x) là bán xác định dương.

Nếu V(x) là xác định dương, $\dot{V}(x)$ là bán xác định âm, V(x) là hàm Liapunov và hệ là ổn định theo Liapunov. Nếu $\dot{V}(x)$ là xác định âm, hệ ổn định tiệm cận. Nếu $\dot{V}(x)$ là xác định dương, gốc tọa độ là điểm không ổn định tới hạn.

Bài tập 5-2 Với bài tập 5-1, xác định tính ổn định của hệ phụ thuộc điều kiện đầu khác nhau.

Đáp án :

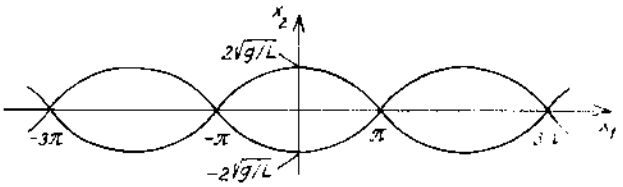
Với biến trạng thái x, (5-55) có dạng :

$$V(x) = mgL - mgL\cos x_1 + \frac{1}{2}mL^2x_2^2 . \qquad (5\text{-}57)$$

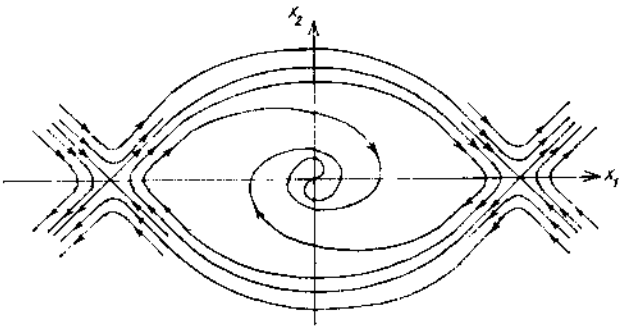
Để ổn định tiệm cận, V(x) phải xác định dương và $\dot{V}(x)$ xác định âm. Một trong những yêu cầu để $V(x_1)$ xác định dương là Φ được giới hạn trong miền $-\pi \leqslant \Phi \leqslant \pi$. Tại các trị số $\pm\pi$, $x_2 = 0$. Thay các giá trị giới hạn vào (5-57) ta có V(x) = 2mgL. Với trị số hằng của V(x), (5-57) cho :

$$x_2 = \sqrt{\frac{2g(1 + \cos x_1)}{L}} = \sqrt{\frac{2g}{L}\cos\frac{x_1}{2}}$$

Với đại lượng nhất định của L có dạng đường cong nhất định như ở hình 5.23 và dạng các quỹ đạo pha như ở hình 5.24.



Hình 5.23



Hình 5.24

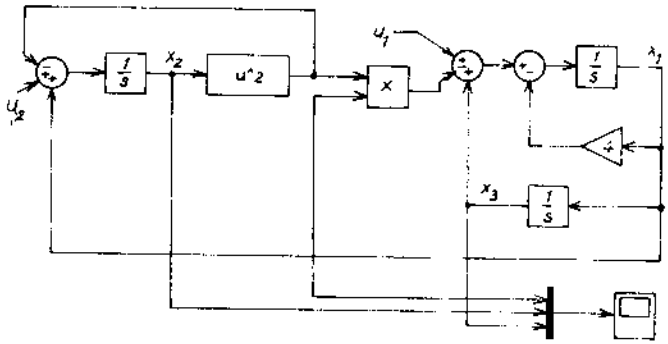
Bài tập 5-3 Kiểm tra ổn định của hệ phi tuyến với tín hiệu vào $u_1 = u_2 = 0$. Hệ phương trình được mô tả bởi :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_1 - x_1x_2^2 + x_3 \;; \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^2 \;; \\ \dot{x}_3 &= x_1 \;. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{–}58)$$

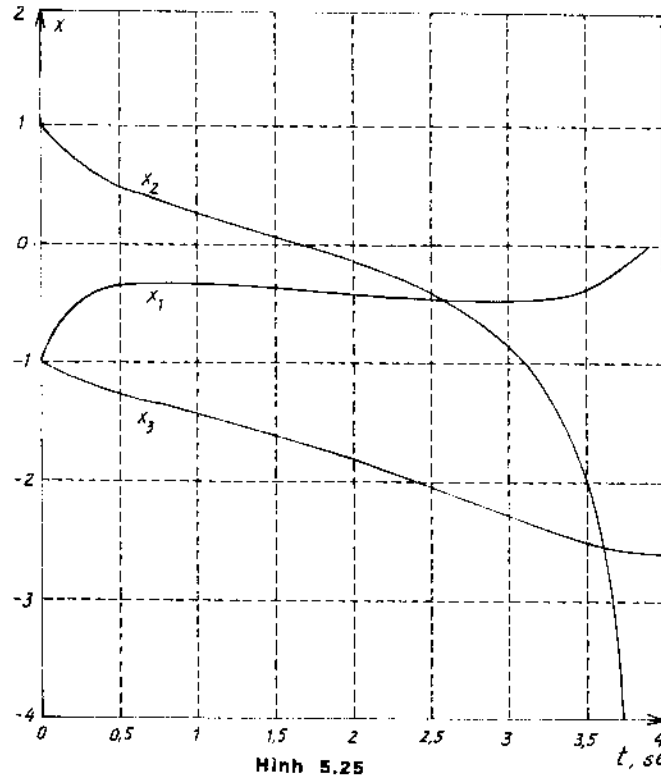
hay

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 - x_2^2 & 0 & 1 \\ 1 & -x_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \;.$$

a)



b)



Hình 5.25

Đáp án :

Mô hình hóa theo SIMULINK với sơ đồ khối như ở hình 5.25a các đáp ứng như ở hình 5.25b. Khảo sát cho thấy hệ không ổn định nhất là khi $x_1 > 0$ thì x_2 nhanh chóng trở thành đường thẳng đứng.

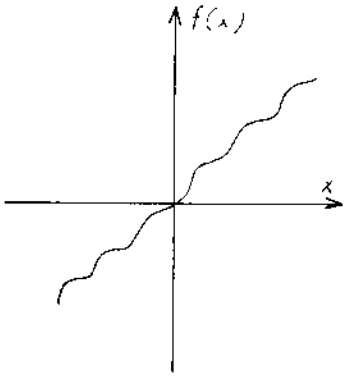
Bài tập 5-4 Hệ gồm lò xo, trọng khối và giảm chấn như ở hình 5.2. Giả thiết lực của lò xo tạo dịch chuyển x_1 như ở hình 5.24. Lực giảm chấn tỷ lệ với tốc độ tức thời $x_2 = \dot{x}_1$. Vậy (5-4) bây giờ có dạng :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \; ; \\ \dot{x}_2 &= -f_1(x_1) - x_2 f_2(x_1) \end{aligned}\right\} \quad (5-59)$$

Nếu dùng hàm V là tổng năng lượng :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} f_1(x)dx \, . \quad (5-60)$$

thì hệ có ổn định theo Liapunov không ?



Hình 5.26

Đáp án :

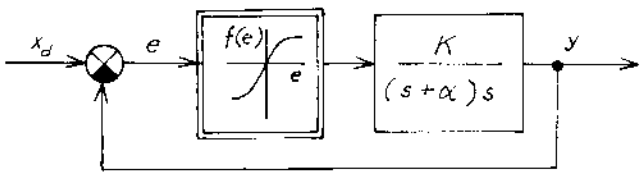
Theo (5-60) :

$$V(x) > 0 \; , \; x \neq 0 \; ;$$

$$V(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= f_1(x_1)x_2 + x_2\left[-f_1(x_1) - x_2 f_2(x_1)\right] \\ &= -x_2^2 f_2(x_1) \, . \end{aligned} \quad (5-61)$$

Nếu $f_2(x_1) > 0$, $\frac{dV}{dt}$ là bán xác định âm. $\frac{dV}{dt} = 0$ không thỏa mãn (5-59) ngoại trừ $x = 0$. Hệ phi tuyến trên ổn định tiệm cận.



Hình 5.27

Bài tập 5-5 Hệ điều khiển động cơ xécvô như ở hình 5-27. Với hàm

$$V(x_1, x_2) = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 \quad (5\text{-}62)$$

với $p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$

Kiểm tra ổn định theo Liapunov khi hệ là tuyến tính hóa, khi $f_1(e)$ có dạng như ở hình 5-24 và khi hàm V là tổng năng lượng.

Đáp án

Với $x_d = 0 : \ddot{e} + \alpha\dot{e} + Kf_1(e) = 0$ (5-63)

a) Hệ tuyến tính hóa : $f_1(e) = e$

Dùng biến trạng thái $e \equiv x_1$, $\dot{e} \equiv x_2$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 ; \\ \dot{x}_2 &= -Kx_1 - \alpha x_2 \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}64)$$

Với (5-62) ta có : $\dfrac{dV}{dt} = 2(p_{11} - p_{22}K)\, x_1x_2 - 2p_{22}\alpha\, x_2^2$.

$\dfrac{dV}{dt}$ là bán xác định âm nếu $p_{11} - p_{22}K = 0$, $p_{22}\alpha > 0$ (p là ma trận hệ số (5-19)). Nếu chọn $p_{11} = Kp_{22}$ với $K > 0$, $\alpha > 0$ thì điều kiện đủ để hệ ổn định là thỏa mãn. Tuy nhiên với hệ tuyến tính, đó còn là điều kiện cần và đủ.

b) Trường hợp $f_1(x_1)$ như ở hình 5.26, hệ phương trình (5-64) bây giờ là :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 ; \\ \dot{x}_2 &= -Kf_1(x_1) - \alpha x_2 . \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}65)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = {} & 2p_{11}x_1x_2 \\ & -2p_{22}Kf_1(x_1)x_2 \\ & -2p_{22}\alpha x_2^2 \end{aligned}$$

Vì $f_1(x_1)$ là phi tuyến, không có điều kiện $p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$ để ít nhất là $\dfrac{dV}{dt}$ bán xác định âm.

Bài toán không giải được.

c) Hàm V dạng năng lượng :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + K\int_0^{x_1} f_1(x_1)\,dx_1 ,$$

K > 0 thì V là xác định dương :

$$\frac{dV}{dt} = Kf_1(x_1)\,x_2 + x_2\left[-Kf_1(x_1) - \alpha\,x_2\right] = -\alpha\,x_2^2 .$$

Hệ ổn định tiệm cận.

Bài tập 5–6 Với hệ phi tuyến ở hình 5.27 nhưng phần tuyến tính có hàm truyền :

$$W_t(s) = \frac{K}{s^2 + \alpha^2} ;$$

$$f(e) = e .$$

Hệ phương trình (5–64) bây giờ là :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 ; \\ \dot{x}_2 &= -(K + \alpha^2)\,x_1 . \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}66)$$

$$\frac{dV}{dt} = 2p_{11}x_1x_2 - 2p_{22}(K + \alpha^2)\,x_1x_2 .$$

Nếu chọn $p_{11} = p_{22}(K + \alpha^2)$ thì $\frac{dV}{dt} = 0$ và hệ ổn định.

So sánh kết quả của phương pháp Liapunov với cách giải trực tiếp hệ phương trình trên.

Đối với hệ (5–66) với điều kiện đầu x^o có nghiệm :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1^o\cos\sqrt{k + \alpha^2}\,t + \dfrac{x_2^o}{\sqrt{K + \alpha^2}}\sin\sqrt{K + \alpha^2}\,t \\ -\sqrt{K + \alpha^2}\,x_1^o\sin\sqrt{K + \alpha^2}\,t + x_2^o\cos\sqrt{K + \alpha^2}\,t \end{bmatrix}$$

Chuẩn của vectơ $\mathbf{x}(t)$ là :

$$||\mathbf{x}(t)|| = \left|x_1^o\cos\sqrt{K + \alpha^2}\,t + \frac{x_2^o}{\sqrt{K + \alpha^2}}\sin\sqrt{K + \alpha^2}\,t\right| +$$

$$+ \left| -\sqrt{k + \alpha^2}\,x_1^o\sin\sqrt{k + \alpha^2}\,t + x_2^o\cos\sqrt{K + \alpha^2}\,t\right|$$

$$\leq \left|x_1^o\right| + \frac{|x_2^o|}{|\sqrt{K + \alpha^2}|} + \left|\sqrt{K + \alpha^2}\right|\left|x_1^o\right| + \left|x_2^o\right|$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{|\sqrt{K+\alpha^2}|} + |\sqrt{K+\alpha^2}| \right) \left(|x_1^o| + |x_2^o| \right)$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{|\sqrt{K+\alpha^2}|} + |\sqrt{K+\alpha^2}| \right) ||x^o||$$

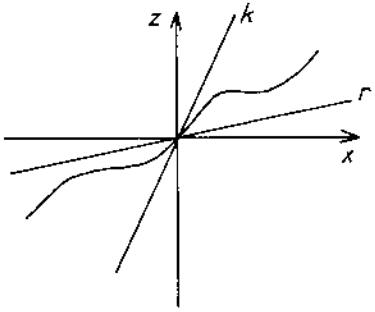
Như vậy với ε đã cho, có thể chọn :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{|\sqrt{K+\alpha^2}|} + |\sqrt{K+\alpha^2}|} .$$

để thỏa mãn điều kiện ổn định.

Bài tập 5–7 Dùng tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối Popov để kiểm tra ổn định của hệ có sơ đồ khối ở hình 4.17a (bài tập 4–5).

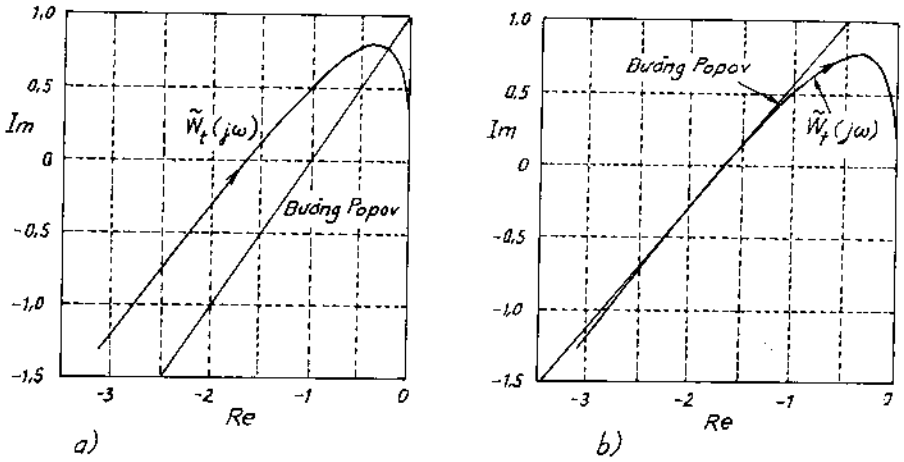
Phần tử phi tuyến nằm trong miền giới hạn như ở hình 5.28 với r là trị số dương bé, còn $k \geqslant 1$.



Hình 5.28

Đáp án :

Chú ý là phần tuyến tính của hệ ổn định (nhưng không tiệm cận



Hình 5.29

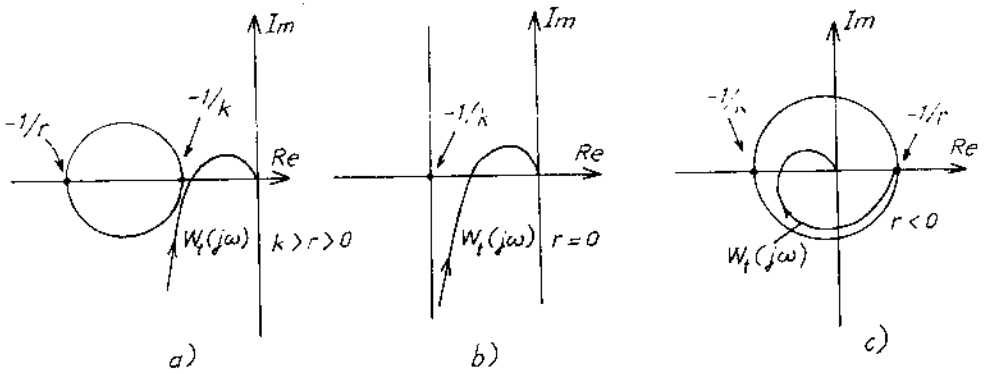
vì có nghiệm ở gốc trục, điều đó chấp nhận được vì r > 0) và tiêu chuẩn Popov có thể áp dụng được cho hệ này.

Ở hình 5.29a có đặc tính tuyến tính biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega)$ và đường thẳng Popov đi qua điểm $\left(-\frac{1}{k}, jo\right) = \left(-1, jo\right)$ có độ nghiêng $\frac{1}{q} = 1$.

Không thể vẽ đường Popov như vậy mà không cắt đặc tính tuyến tính biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega)$: không thể kết luận là hệ ổn định tiệm cận và cũng không thể kết luận là hệ không ổn định.

Bây giờ thay đổi k = 0,6 và q = 1,2 chẳng hạn. Đó là trường hợp như ở hình 5.29b. Hệ sẽ trở nên ổn định tiệm cận với mọi k < 0,6.

So sánh với phương pháp tuyến tính hóa điều hòa ở bài tập 4–5, ta kết luận rằng hệ sẽ ổn định vô điều kiện nếu hệ số khuếch đại của phần tuyến tính giảm đi một đại lượng 0,6 (ở hình 4.17b đặc tính $\frac{1}{W_t(j\omega)}$ là đặc tính nghịch đảo của phần tuyến tính) thì ở bài tập này đường thẳng Popov đi qua điểm $\left(-\frac{1}{k}\right)$ với k = 0,6.



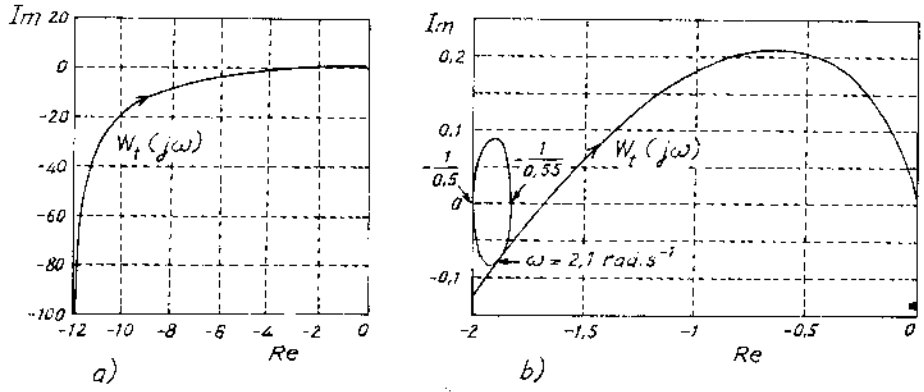
Hình 5.30

Bài tập 5–8 Với bài tập (4–5) và (5–7) hãy xác định k theo tiêu chuẩn đường tròn (hình 5–4 chẳng hạn).

Đáp án :

Ở hình 5–30 có ba trường hợp khác nhau của tiêu chuẩn đường tròn tùy thuộc giá trị tới hạn của k và r ở đặc tính phi tuyến Z(x).

Ở ví dụ này, nếu giả thiết r = 0 ta có trường hợp ở hình 5.30b và đường thẳng đứng tại $-\frac{1}{k} = -1$ sẽ cắt đường cong Nyquist (hình 5.31a). Nếu vẽ đường thẳng đứng như vậy mà không cắt $W_t(j\omega)$ thì phải vẽ qua điểm $-\frac{1}{k} = -12$ tương ứng với k = 0,08.



Hình 5.31

Phương pháp hàm mô tả và phương pháp Popov đều cho kết quả bằng 0,6.

Nếu không giả thiết điều kiện r = 0, ta dùng trường hợp như ở hình 5.30a.

Theo đặc tính phi tuyến ở bài tập 4-5 ta có $k_1 = 1$, $k_2 = 0,5$. Vậy để đường thẳng có độ nghiêng r không cắt đặc tính phi tuyến với mọi trị số của x, ta chọn $-\frac{1}{r} = -\frac{1}{0,5} = -2$. Theo đường cong Nyquist ở hình 5.31b chọn k = 0,55 và đường tròn như ở hình vẽ trên với tần số tại điểm tiếp xúc bằng $\omega^* = 2,1$ rad.sec^{-1}.

Bài tập 5-9 Một hệ lò xo, trọng khối, giảm xóc mà lực giảm xóc tỷ lệ với hàm bậc ba của tốc độ và được mô tả bởi :

$$\ddot{y} + 0,5\dot{y}^3 + y = 0 .$$

Kiểm tra ổn định theo Liapunov với hàm V :

$$V = x_1^2 + x_2^2 \text{ mà } x_1 \equiv y \; ; \; x_2 = \dot{y} .$$

Đáp án :

Từ các phương trình trên ta rút ra :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \; ; \\ \dot{x}_2 &= -0{,}5x_2^3 - x_1 \; . \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}67)$$

và $$\dot{V} = 2x_1x_2 - x_2^4 - 2x_1x_2 = -x_2^4 \; .$$

$\dot{V}$ là bán xác định âm, hệ ổn định theo Liapunov. Tuy nhiên vì trục $x_1(x_2 = 0)$ không phải là quỹ đạo, hệ còn là ổn định tiệm cận.

Bài tập 5-10 Với hệ phi tuyến như ở hình 5-27 và cơ cấu điều khiển có đặc tính như hình 5.32 và phần tuyến tính :

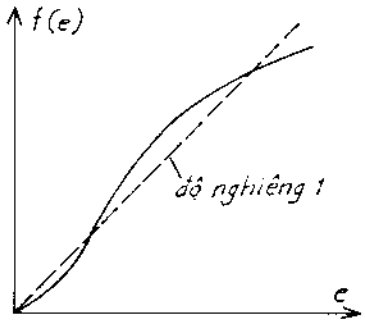
$$W_t(s) = \frac{1}{(s+1)\,s} \; .$$

Hàm V được chọn :

$$V = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

với $x_1 = e$, $x_2 = \dot{e}$.

Kiểm tra ổn định với f(e) được tuyến tính hóa và không tuyến tính hóa.



Hình 5.32

Đáp án :

a) Với $f(x_1)/x_1 = 1$ ta có hệ tuyến tính :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \; ; \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1 \; . \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}68)$$

và $$\dot{V} = -2a_{12}x_1^2 + 2(a_{11} - a_{12} - a_{22})\,x_1x_2 + $$
$$+ 2\,(a_{12} - a_{22})\,x_2^2 \; .$$

Muốn có $\dot{V} = 2x_1^2 + 2x_2^2$, cần chọn :

$$a_{11} = -3 \; ; \; a_{12} = -1 \; ; \; a_{22} = -2$$

và $$V = -3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \; .$$

Theo định lý Sylvester (xem Phụ lục A) thì V xác định âm và hệ tuyến tính ổn định tiệm cận.

b) Với $f(x_1)$ là phi tuyến :

Với hàm V là xác định âm thì :

$$\dot{V} = 2x_1f(x_1) + 4x_2f(x_1) - 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$= 2\frac{f(x_1)}{x_1}x_1^2 + 4\left(\frac{f(x_1)}{x_1} - 1\right)x_1x_2 + 2x_2^2 .$$

Để $\dot{V}$ xác định dương, theo định lý Sylvester ta có các điều kiện sau :

$$k > 0 ; k - (k-1)^2 = -k^2 + 3k - 1 > 0 ; \left[\frac{f(x_1)}{x_1} \equiv k\right]$$

Theo nghiệm $k^2 - 3k + 1 = 0$, điều kiện để hệ phi tuyến ổn định tiệm cận là :

$$0{,}38 < \frac{f(x_1)}{x_1} < 2{,}62 .$$

Bài tập 5-11 Với bài tập 5-3, dùng phương pháp Liapunov xác định ma trận hồi tiếp K để hệ ổn định.

Đáp án :

Dùng hàm Liapunov dạng : $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$, hàm $V(x) > 0$ nếu a, b, c đều dương

$$\dot{V}(x) = 2ax_1\dot{x}_1 + 2bx_2\dot{x}_2 + 2cx_3\dot{x}_3$$

$$= -8ax_1^2 - 2ax_1^2x_2^2 + 2(a+c)x_1x_3 + 2bx_1x_2 - 2bx_2^3 .$$

Chọn K đối với u_1 và u_2 :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -k\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -k_{11}x_1 - k_{12}x_2 - k_{13}x_3 \\ -k_{21}x_1 - k_{22}x_2 - k_{23}x_3 \end{bmatrix} .$$

Từ đó : $\dot{x}_1 = -(4 + k_{11})x_1 - x_1x_2^2 - k_{12}x_2 + (1 - k_{13})x_3$;

$$\dot{x}_2 = (1 - k_{21})x_1 - x_2^2 - k_{22}x_2 - k_{23}x_3 ;$$

$$\dot{x}_3 = x_1 .$$

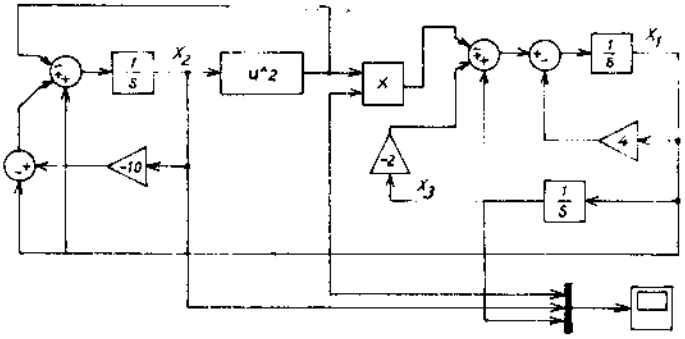
Bây giờ ta có :

$$\dot{V}(x) = -2a(4 + k_{11})x_1^2 - 2ax_1^2x_2^2 - \left(2ak_{12} - 2b(1 - k_{21})\right)x_1x_2$$

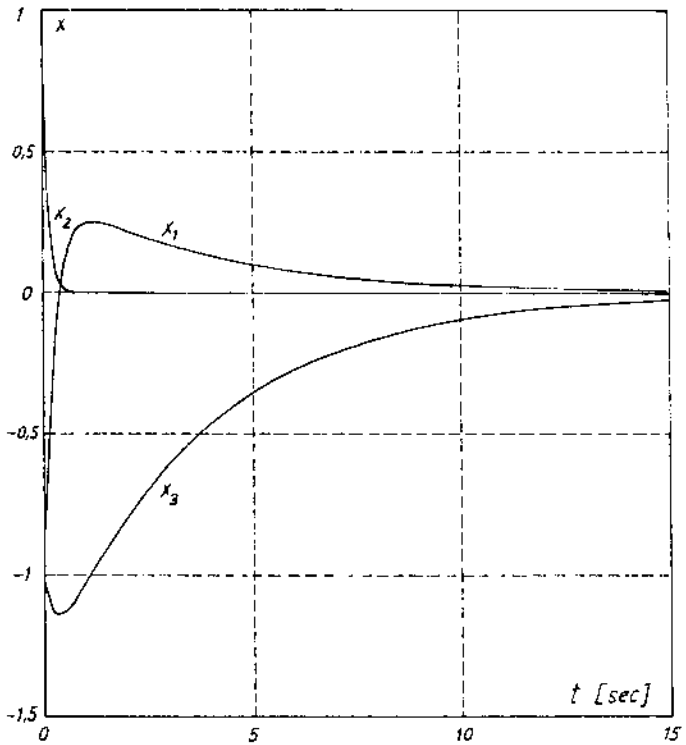
$$+ \left(2a(1 - k_{13}) + 2c\right)x_1x_3 - 2bx_2^3 - 2b\,k_{22}x_2^2 - 2bk_{23}x_2 .$$

Để $\dot{V}(x)$ bán xác định âm, chọn :

$$k_{11} = k_{12} = k_{23} = 0 \ ;$$



Hình 5.33



Hình 5.34

$$\dot{V}(x) = -8ax_1^2 - 2ax_1^2x_2^2 + \left(2b(1 - k_{21})\right) x_1x_2$$

$$+ \left(2a(1 - k_{13}) + 2c\right) x_1x_2 - 2bx_2^3 - 2bk_{22}x_2^2 .$$

$$k_{21} = 1 \; ; \; k_{13} = 1 + c/a \; ; \; a = b = c = 1 \; ; \; k_{22} = 10 \; ;$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 10 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\dot{V}(x) = -8x_1^2 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^3 - 20x_2^2.$$

Sơ đồ hệ kín như ở hình 5.33 và các đặc tính thời gian của x như ở hình 5.34.

So sánh các đặc tính ở hình 5.34 và 5.25 ta thấy, sau khi dùng hồi tiếp trạng thái hệ trở nên ổn định, k_{22} càng lớn, độ dự trữ ổn định càng cao.

Cùng với hàm Liapunov V(x) trên, có thể chọn các hệ số của K khác nhau ; Hàm Liapunov cũng có thể chọn khác với hàm đã nêu, đó là đặc điểm của phương pháp Liapunov.

Chương 6
CHẤT LƯỢNG CỦA QUÁ TRÌNH ĐIỀU KHIỂN TRONG HỆ PHI TUYẾN

Nhiệm vụ cần đạt được ở một quá trình có chất lượng cần thiết ở các hệ phi tuyến cũng như ở hệ tuyến tính là rất quan trọng. Để đánh giá chất lượng ở hệ phi tuyến, cũng dùng các chỉ tiêu như ở hệ tuyến -tính (xem mục 5 [19]).

Việc phân tích chất lượng của quá trình điều khiển ở hệ phi tuyến có khó khăn hơn so với hệ tuyến tính. Mặt khác hệ phi tuyến lại có nhiều khả năng để đạt được chất lượng cao hơn như có thể đạt được chế độ tối ưu tác động nhanh, các quá trình điều khiển tối ưu khác v.v...

Cũng như ở hệ tuyến tính, phương pháp phân tích chất lượng hệ điều khiển tự động phi tuyến tính có thể được chia làm hai loại, phương pháp trực tiếp và phương pháp gián tiếp. Phương pháp trực tiếp cơ sở trên quá trình được nghiên cứu. Phương pháp gián tiếp cơ sở trên những chỉ tiêu đánh giá gián tiếp liên quan tới quá trình. Do công nghệ máy tính phát triển nhanh chóng, việc sử dụng các phương pháp trực tiếp ngày càng chiếm ưu thế vì nó nhanh chóng và chính xác.

Thành công trong xây dựng các phương pháp phân tích chất lượng hệ phi tuyến gắn liền với tên tuổi các tác giả như Popov E. P., Paltov I. P., Ya. Z. Naymov B. N., Bachkirov D. A., Bacharin A. V. cũng như Bokcep, Taler và những người khác.

6.1. CÁC PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN ĐỂ XÂY DỰNG QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRONG HỆ PHI TUYẾN

Nội dung cơ bản của phương pháp sai phân là thay thế phương trình vi phân phi tuyến tính bằng phương trình sai phân mà bản thân nó là những phép tính lặp, xác định quá trình một cách tuần tự, từng điểm. Phương pháp tính này được thực hiện trên máy tính, nhất là với những chương trình mẫu. Dạng đơn giản nhất là phương pháp Euler.

6.1.1. PHƯƠNG PHÁP EULER

Ví dụ với phương trình vi phân :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \qquad (6\text{-}1)$$

có hai phương pháp Euler để xấp xỉ đạo hàm trên : phương pháp Euler hiện và phương pháp Euler ẩn.

6.1.1.1. Phương pháp Euler hiện

Nếu dùng phương pháp xấp xỉ sai phân tiến đối với đạo hàm ở (6-1) ta có :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{t(k+1) - t(k)} \qquad (6\text{-}2)$$

với k mô tả bước gián đoạn thứ k của tích phân.

Giả thiết f(x) được đánh giá tại x(k) và hàm ấy là f(x(k)). Vậy (6-1) và (6-2) có thể được viết dưới dạng :

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{t(k+1) - t(k)} = f\big(x(k)\big). \qquad (6\text{-}3)$$

Thông thường gia số của thời gian là $\Delta t = t(k+1) - t(k)$ và (6-3) có dạng :

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} = f\big(x(k)\big). \qquad (6\text{-}4)$$

Phương trình Euler hiện là :

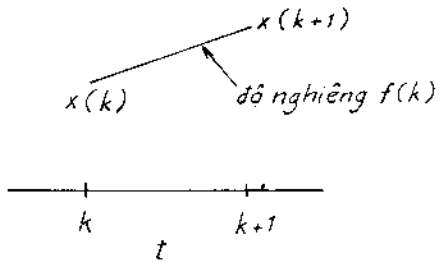
$$x(k+1) = x(k) + \Delta t f(x(k)) \qquad (6\text{-}5)$$

Có thể xem (6-5) là dự báo của x tại k + 1 dựa trên đại lượng x tại k và độ nghiêng tại k như ở hình 6.1.

Phương trình (6-5) là phương trình Euler hiện cho trường hợp đơn biến. Trong trường hợp đa biến :

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \qquad (6\text{-}6)$$

với $\mathbf{x}(k)$ là vectơ biến trạng thái tại bước k, còn $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$



Hình 6.1

là vectơ hàm tại bước k. Các phương trình (6-5) và (6-6) là hiện vì biến trạng thái tại bước k + 1 là hàm của biến ấy tại bước k. Phương pháp này rất đơn giản trong lập trình nhưng để tính toán được chính xác cần dùng bước tính bé nên ít được dùng trong thực tế.

6.1.1.2. Phương pháp Euler ẩn

Phương pháp Euler ẩn dùng xấp xỉ sai phân lùi đối với đạo hàm ở (6-1). Hàm (hay vectơ hàm) được xác định tại bước k + 1 thay vì k :

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} = f\big(x(k+1)\big). \qquad (6\text{-}7)$$

Do đó phương trình Euler ẩn sẽ là :

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t f\big(x(k+1)\big). \qquad (6\text{-}8)$$

Phương trình (6-8) là ẩn vì đại lượng x(k + 1) cần biết để tính x(k + 1). Do đó, nói chung là phải dùng đến các phương pháp đại số phi tuyến tính như phương pháp Newton để giải. Đối với hệ tuyến tính, phương trình (6-8) có thể đưa về dạng :

$$x(k+1) = g\big(x(k)\big) .$$

6.1.1.3. Vấn đề ổn định của hai phương pháp Euler

Để so sánh, dùng phương trình mô tả hệ :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau} x = \lambda x = f(x). \qquad (6\text{-}9)$$

Nghiệm giải tích của phương trình trên là :

$$x(t) = x(0)\, e^{-t/\tau} = x(0)\, e^{\lambda t} . \qquad (6\text{-}10)$$

Ở phương pháp Euler hiện, hàm f(x) ở bước k là :

$$f\big(x(k)\big) = -\frac{1}{\tau} x(k) .$$

Biến trạng thái ở bước tiếp theo là :

$$x(k+1) = x(k) + \left(-\frac{\Delta t}{\tau} x(k)\right) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) x(k) . \qquad (6\text{-}11)$$

Dưới dạng điều kiện đầu :

$$x(k+1) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^{k+1} x(0) .$$

Điều kiện để ổn định là $\left|1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right| < 1$. Kết quả vẫn như vậy nếu dùng cách mô tả khác :

$$x(k+1) = g\big(x(k)\big) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) x(k) .$$

Điều kiện ổn định là $|g'| < 1$, phương trình Euler hiện sẽ ổn định nếu :

$$-1 < 1 - \frac{\Delta t}{\tau} < 1$$

và sẽ dao động nếu :

$$-1 < 1 - \frac{\Delta t}{\tau} < 0 .$$

Chỉ tiêu này dẫn đến điều kiện ổn định đối với phương pháp Euler hiện là :

$$0 < \Delta t < 2\tau.$$

trong khi nghiệm sẽ dao động ổn định nếu :

$$\tau < \Delta t < 2\tau$$

và ổn định phi chu kỳ nếu :

$$0 < \Delta t < \tau.$$

Ở phương pháp Euler ẩn hàm f(x) ở bước k+1 là :

$$f\big(x(k+1)\big) = -\frac{1}{\tau} x(k+1)$$

và biến trạng thái ở bước k+1 là :

$$x(k+1) = x(k) + \left(-\frac{\Delta t}{\tau} x(k+1)\right) . \qquad (6\text{–}12)$$

Ở bài toán tuyến tính không cần dùng đến phương trình đại số phi tuyến tính đối với (6–12). Từ phương trình trên có thể viết :

$$x(k+1) = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} x(k) , \qquad (6\text{–}13)$$

với điều kiện đầu x(0) có thể viết :

$$x(k+1) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}}\right)^{k+1} x(0) .$$

Nghiệm sẽ ổn định nếu $\left|1/\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right)\right| < 1$. Nếu dùng cách mô tả khác, ta có :

$$x(k+1) = g\left(x(k)\right) = \left(\frac{1}{1+\frac{\Delta t}{\tau}}\right) x(k).$$

và điều kiện ổn định là $|g'| < 1$.

Chú ý rằng phương pháp Euler ẩn ổn định với mọi Δt (nếu dấu của Δt là đúng) và sẽ không dao động.

Ví dụ 6-1. Với $x(0) = 4$, $\tau = 5$, $\Delta t = 1$, ở bảng 6-1 có kết quả của nghiệm chính xác (6-10) để so sánh với phương pháp Euler hiện (6-11) và phương pháp Euler ẩn (6-13).

Bảng 6-1

t	x chính xác	x Euler hiện	sai số	x Euler ẩn	sai số
0	4,0000	4,000		4,0000	
1	3,2749	3,2000	−2,3%	3,3333	1,8%
2	2,6813	2,5600	−4,5%	2,7778	3,6%
3	2,1952	2,0480	−6,7%	2,3148	5,4%
4	1,7979	1,6384	−8,9%	1,9290	7,3%
5	1,4715	1,3107	−10,9%	1,6075	9,2%

Kết quả ở bảng 6-1 được mô tả bằng ba đường cong như ở hình 6-2 (đường *1* ứng với Euler hiện, đường *2* ứng với Euler ẩn).

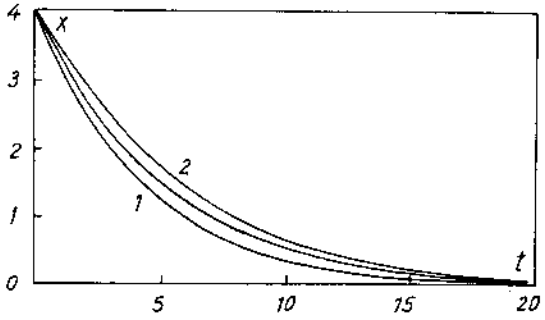
Theo biểu thức (6-11), nếu $\Delta t = \tau$ thì $x = 0$ với mọi thời điểm. Nghiệm sẽ dao động nếu $\Delta t > \tau$.

Ở bảng 6-2 có kết quả tính toán cho trường hợp ở ví dụ 6-1 với $\Delta t = 6$.

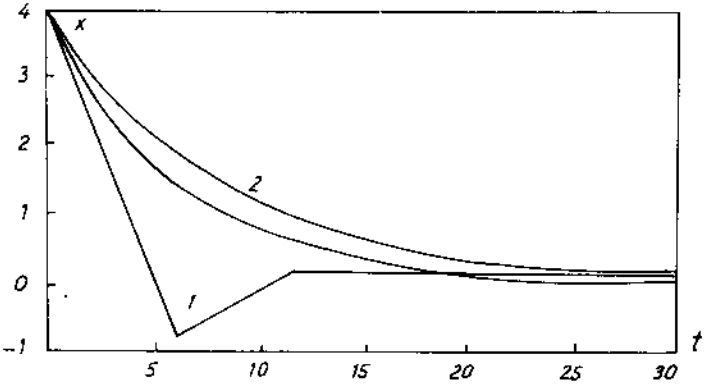
Bảng 6-2

t	x chính xác	x Euler hiện	x Euler ẩn
0	4,0000	4,0000	4,0000
6	1,2048	−0,8000	1,8182
12	0,3629	0,1600	0,8264
18	0,1093	−0,0320	0,3757
24	0,0329	0,0064	0,1708

Ở hình 6.3 có các đường cong của ba trường hợp như ở bảng 6-2. Như vậy phương pháp Euler ẩn có độ chính xác cao, không dao động và có thể dùng với bước tích phân Δt lớn. Các ví dụ 6-1 và 6-2 là trường hợp hệ tuyến tính. Ở ví dụ tiếp theo dùng cho trường hợp hệ phi tuyến và phương pháp Euler ẩn đòi hỏi dùng phương pháp lặp ở mỗi bước thời gian.



Hình 6.2



Hình 6.3

Ví dụ 6-2

Phương trình vi phân của hệ có dạng :

$$\frac{dx}{dt} = -a\sqrt{x} \ . \qquad (6\text{-}14)$$

Nghiệm giải tích là :

$$x(t) = [\sqrt{x(0)} - at/2]^2. \qquad (6\text{-}15)$$

Phương pháp Euler hiện có phương trình sau :

$$x(k+1) = x(k) - \Delta t\, a\sqrt{x}(k) \ . \qquad (6\text{-}16)$$

Phương pháp Euler ẩn có phương trình :

$$x(k+1) = x(k) - \Delta t a\sqrt{x(k+1)} \ . \qquad (6\text{-}17)$$

Khi hệ là tuyến tính như ở ví dụ 6–1, phương trình đã được viết lại để tính biến trạng thái ở bước tiếp theo. Ở đây không thể làm như vậy được. Đưa (6 –17) về dạng :

$$x(k+1) + \Delta ta\sqrt{x(k+1)} - x(k) = 0 . \qquad (6\text{–}18)$$

Ta thấy (6–18) đòi hỏi phương pháp lặp để giải. Ở bước k + 1 phải dùng phương pháp số để giải phương trình đại số phi tuyến tính, có thể dùng phương pháp Newton để giải. Nếu dùng y là đại lượng của x ở bước k + 1 mà ta cần tìm nghiệm, phương trình (6– 18) bây giờ có dạng :

$$y - b\sqrt{y} - c = 0 \qquad (6\text{–}19)$$

với $y = x(k+1)$; $b = \Delta ta$; $c = x(k)$. Dùng phương pháp Newton [2] ta có thể viết :

$$g\left(y(i)\right) = y(i) + b\sqrt{y(i)} - c . \qquad (6\text{–}20)$$

với i là chỉ số chỉ bước lặp thứ i theo phương pháp Newton :

$$y(i+1) = y(i) - \frac{g\left(y(i)\right)}{g'\left((y(i)\right)} \qquad (6\text{–}21)$$

trong đó

$$g'(y(i)) = 1 + \frac{b}{2\sqrt{y(i)}} . \qquad (6\text{–}22)$$

Ta có thể viết (6–20), (6–21) và (6–22) như sau :

$$y(i+1) = y(i) - \left[\frac{y(i)^{1.5} + by(i) - c\sqrt{y(i)}}{\sqrt{y(i)} + \frac{b}{2}}\right] . \qquad (6\text{–}23)$$

Phương trình (6–23) sẽ lặp và hội tụ.

Bằng cách cộng tích phân ở bước k + 1, có thể dùng phương pháp lặp để tìm đại lượng x ở bước k + 1

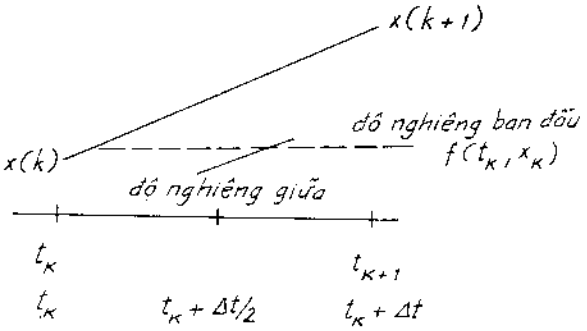
Như vậy (6–23) được giải bằng phương pháp lặp để tìm x(k+ 1) ở biểu thức (6–18).

6.1.2. PHƯƠNG PHÁP RUNGE - KUTTA

Phương pháp Runge –Kutta là phương pháp mở rộng của Euler. Đạo hàm của bước k được dùng để dự báo nghiệm ở bước k + 1. Phương pháp Runge–Kutta dùng phương pháp Euler để dự báo đại lượng x ở những bước trung gian, sau đó dùng trung bình của những độ nghiêng ở các bước trung gian để dự báo chung kể từ lúc bắt đầu của bước thời gian.

6.1.2.1. Phương pháp Runge – Kutta bậc hai

Phương pháp này còn được xem như là phương pháp dùng điểm giữa của Euler.



Hình 6.4

Phương pháp Euler trước hết dùng để dự báo trạng thái ở $\Delta t/2$. Đạo hàm được xác định ở điểm giữa và được dùng để dự báo x ở cuối bước Δt như ở hình 6.4. Dùng m_1 để mô tả độ nghiêng ở điểm ban đầu và m_2 là độ nghiêng (dx/dt) ở điểm giữa :

$$m_1 = f\big(t(k)\ ,\ x(k)\big), \tag{6-24}$$

$$m_2 = f\left(t(k) + \frac{\Delta t}{2}\ ,\ x(k) + \frac{\Delta t}{2}\ m_1\right)\ , \tag{6-25}$$

$$x\,(k+1) = x\,(k) + m_2\Delta t \tag{6-26}$$

Đối với hệ ôtônôm, có thể loại trừ t và ta có hệ phương trình tương ứng :

$$m_1 = f\big((k)\big)\ ; \tag{6-27}$$

$$m_2 = f\left(x(k) + \frac{\Delta t}{2}\ m_1\right)\ ; \tag{6-28}$$

hay

$$m_2 = f\left(x(k) + \frac{\Delta t}{2}\ f\big(x(k)\big)\right). \tag{6-29}$$

Phương trình (6 –26) có thể đưa về dạng :

$$x(k+1) = x(k) + \Delta t f\left(f\left(x(k) + \frac{\Delta t}{2} f\big(x(k)\big)\right)\right) \tag{6-30}$$

hay $$x(k+1) = g\big(x(k)\big) .$$

Cần nói rằng phương pháp Runge–Kutta bậc hai là chính xác với bậc của Δt^2, còn phương pháp Euler hiện chỉ chính xác với bậc của Δt.

Ví dụ 6–3 Với ví dụ 6–1 hệ (6–9) dùng phương pháp Runge–Kutta.

Phương trình của quá trình bậc một :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = -\frac{1}{\tau}\,x \; ; \qquad (6\text{–}31)$$

$$m_1 = f\big(x(k)\big) = \Big(-\frac{1}{\tau}\,x(k)\Big) = \frac{-1}{\tau}\,x(k) \quad ; \qquad (6\text{–}32)$$

$$m_2 = f\Big(x(k) + \frac{1}{2}\,m_1\Delta t\Big) = \frac{-1}{\tau}\Big[\Big(x(k) - \frac{\Delta t}{2\tau}\,x(k)\Big)\Big] . \qquad (6\text{–}33)$$

với $\Delta t = 1$; $\tau = 5$ và $x(0) = 4{,}0$;

$$m_1 = \frac{-1}{5}\,x(0) = \frac{-4}{5} \; ;$$

$$m_2 = \frac{-1}{5}\Big(1 - \frac{1}{10}\Big)\,x(0) = \frac{-1}{5}\Big(1 - 0{,}1\Big)\,4 = = -\frac{3{,}6}{5} .$$

Theo (6–30) : $x(1) = x(0) + m_2\Delta t$

$$= 4{,}0 - 0{,}72 = 3{,}2800$$

So sánh với kết quả của phương pháp giải tích $4e^{-1/5} = 3{,}2749$ có sai số là 0,16%. Phương pháp Euler từ bảng 6–1 có sai số –2,3%. Cùng một bước thời gian như nhau, phương pháp Runge–Kutta chính xác hơn phương pháp Euler chuẩn.

6.1.2.2. Phương pháp Runge – Kutta bậc bốn

Phương pháp Runge – Kutta bậc bốn có độ chính xác cao hơn phương pháp Euler hiện hay Runge – Kutta bậc hai. Nội dung là sử dụng độ nghiêng ban đầu (m_1) tạo nên giả định thứ nhất cho biến trạng thái ở điểm giữa của bước lấy tích phân. Dùng giả định thứ nhất để tìm độ nghiêng ở điểm giữa (m_2). Độ nghiêng "hiệu chỉnh" của điểm giữa (m_3) được xác định dựa theo m_2. Độ nghiêng cuối cùng (m_4) được xác định dựa vào m_3. Trọng số trung bình của các độ nghiêng được dùng để tính tích phân. Angôrít như sau :

$$m_1 = f\big(t(k), x(k)\big) \quad ; \qquad (6\text{–}34)$$

$$m_2 = f\Big(t(k) + \frac{1}{2}\,\Delta t, x(k) + \frac{1}{2}\,m_1\Delta t\Big) \quad ; \qquad (6\text{–}35)$$

$$m_3 = f\left(t(k) + \frac{1}{2}\Delta t\,,\, x(k) + \frac{1}{2} m_2 \Delta t\right) \;; \qquad (6\text{-}36)$$

$$m_4 = f\left(t(k) + \Delta t\,,\, x(k) + m_3 \Delta t\right) \;; \qquad (6\text{-}37)$$

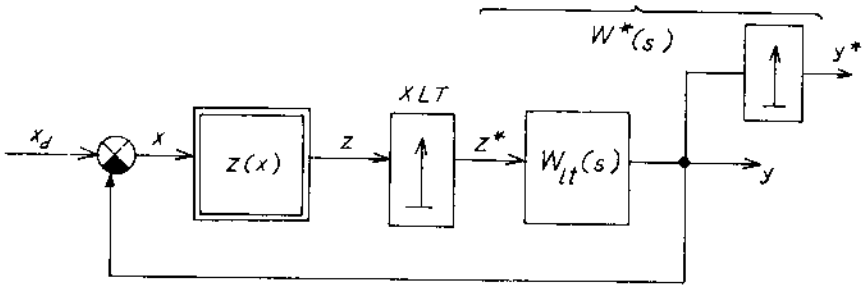
$$x(k+1) = x(k) + \left[\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{3} + \frac{m_3}{3} + \frac{m_4}{6}\right]\Delta t\,. \qquad (6\text{-}38)$$

Ở cuối chương, mục 6.4 sẽ đề cập đến các chương trình sử dụng MATLAB.

6.1.3. PHƯƠNG PHÁP DÙNG Ở HỆ XUNG

Phương pháp biến đổi phương trình vi phân phi tuyến thành phương trình sai phân phi tuyến có thể được thực hiện bằng cách thay thế hệ điều khiển phi tuyến liên tục bằng hệ xung. Hệ phi tuyến xung được mô tả như ở hình 6.5, khâu phi tuyến với đặc tính Z(x) đặt trước phần tử xung lý tưởng (XLT). Phần liên tục quy đổi có hàm truyền $W_{lt}(s)$ tương ứng với hàm truyền gián đoạn :

$$W^*_t(s) \equiv \frac{Y^*(s)}{Z^*(s)} = \frac{b_m e^{mst} + b_{m-1} e^{(m-1)st} + \ldots + b_0}{a_n e^{nst} + a_{n-1} e^{(n-1)st} + \ldots + a_0}\,.$$



Hình 6.5

Dung sai phân (theo II.7 [20]) tương ứng với :

$$a_n y\left[(l+n)T\right] + a_{n-1} y\left[(l+n-1)T\right] + \ldots + a_0 y(lT) =$$
$$= b_m z\left[(l+m)T\right] + b_{m-1} z\left[(l+m-1)T\right] + \ldots b_0 z(lT) \qquad (6\text{-}39)$$

chuyển sang dạng phương trình lặp :

$$y[(l+n)T] = \frac{1}{a_n}\Big\{b_m z[(l+m)T] + \ldots + b_0 z(lT) - \qquad (6\text{-}40)$$

$$- a_{n-1} y\Big[(l+n-1)T\Big] - \ldots - a_0 y(lT) .$$

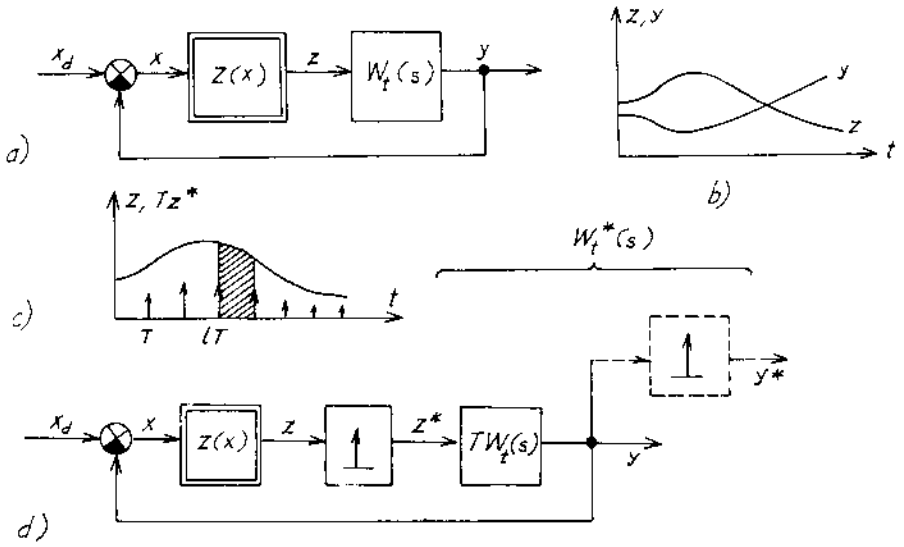
với : $$Z(iT) = Z\Big[x(iT)\Big] = Z\Big[x_d(iT) - y(iT)\Big] . \qquad (6\text{-}41)$$

Các biểu thức (6-40) và (6-41) cho phép tính các trị rời rạc của quá trình ở hệ xung phi tuyến với tín hiệu vào bất kỳ $x_d(lT)$ bắt đầu từ $l = -n$ cũng như ở hệ xung tuyến tính. Khác nhau duy nhất là ở phương trình (6-40) có quan hệ phi tuyến tính.

Phương pháp thứ hai để xây dựng quá trình quá độ trong các hệ phi tuyến xung là dùng hàm trọng lượng của phần liên tục quy đổi $w_{lt}(t)$.

$$y(lT) = \sum_{i=0}^{l-1} Z\Big[x_d(iT) - y(iT)\Big]\, w_{lt}\Big[(l-i)T\Big] . \qquad (6\text{-}42)$$

Chuỗi trị số rời rạc y(lT) được tính bắt đầu từ $l = 1$ vì $w_{lt}(0) = 0$ (khi $m < n$). Cũng với lý do trên, cận trên của tổng được lấy bằng l-1. Nếu không có hàm trọng lượng $w_{lt}(t)$, có thể tìm nó bằng cách xác định đáp ứng của phần liên tục quy đổi với tín hiệu xung đơn vị hoặc dựa vào hàm truyền $W^*_t(s)$. Các biểu thức (6-40) ... (6-42) có thể được dùng để lập trình trên máy tính (với thời gian tính T bé).



Hình 6.6

Bây giờ nói đến các phương pháp chuyển đổi gần đúng hệ liên tục sang hệ xung. Ở hình 6.6a có sơ đồ khối hệ xung phi tuyến gồm phần tử phi tuyến và phần tử liên tục. Với tín hiệu vào x_d có các đáp ứng z(t) và y(t) như ở hình 6.6b. Thay thế tín hiệu liên tục ở đầu ra của phần tử phi tuyến z (t) bằng chuỗi xung có chu kỳ, sao cho y(t) không thay đổi. Diện tích mỗi xung bằng trị số z(t) tại thời điểm xung ấy tác động nhân với chu kỳ T. Khi T bé, diện tích của các xung đột biến gần như bằng diện tích các xung có hình dạng biến đổi mà thời điểm lấy mẫu đã phân chia. Ở hình 6.6c có gạch dọc một diện tích ở thời điểm lấy mẫu (lT). T bé là điều để có tác động như nhau đối với phần tuyến tính của hệ thống đối với xung thực và xung đột biến sao cho y(t) hầu như không thay đổi. T càng bé, mức độ xấp xỉ càng chính xác.

Thay thế tín hiệu liên tục bằng một chuỗi xung tức thời đã điều biên tương đương với việc chuyển từ hệ liên tục sang hệ xung (hình 6.6d). Ở sơ đồ này $Z^*(s) \approx \frac{1}{T} Z(s)$, phần liên tục quy đổi có hàm truyền $W_{lt}(s) = TW_t(s)$, vậy T đóng vai trò hàm truyền của cơ cấu định hình, T có cùng đơn vị với mọi hằng số thời gian trong hệ. Để xác định $W^*_t(s)$ tương ứng với $TW_t(s)$, có thể dùng các phương pháp đã nêu ở [20]. Sau đó, để tính toán quá trình quá độ ở hệ xung phi tuyến có thể dùng một trong các phương pháp nêu trên.

Ví dụ 6-4 Xác định hàm truyền $W^*_t(s)$ và phương trình lặp của y(t) mà phần tuyến tính liên tục có dạng :

$$W_t(s) = \frac{k}{s(1 + sT_1)} .$$

Theo bảng 2-2 [20] ta có :

$$W^*_t(s) = \frac{kT(1 - e^{-T/T_1})\, e^{sT}}{(e^{sT} - 1)\left(e^{sT} - e^{-T/T_1}\right)}$$

$$= \frac{kT\left(1 - e^{-T/T_1}\right) e^{sT}}{e^{2sT} - \left(1 + e^{-T/T_1}\right) e^{sT} + e^{-T/T_1}} . \qquad (6\text{-}43)$$

hay theo biến đổi z :

$$W_t(z) = \frac{kT\left(1 - e^{-T/T_1}\right) z}{(z-1)\left(z - e^{-T/T_1}\right)} =$$

$$= \frac{kT\left(1 - e^{-T/T_1}\right) z}{z^2 - \left(1 + e^{-T/T_1}\right) z + e^{-T/T_1}} .$$

Phương trình sai phân tương ứng có dạng :

$$y\left[(l+2)T\right] - \left(1 + e^{-T/T_1}\right) y\left[(l+1)T\right] + e^{-T/T_1} y(lT) = \quad (6\text{-}44)$$
$$= kT\left(1 - e^{-T/T_1}\right) z\left[(l+1)T\right] .$$

Từ đó :

$$y\left[(l+2)T\right] = kT\left(1 - e^{-T/T_1}\right) Z\left[(l+1)T\right] + \left(1 + e^{-T/T_1}\right) x$$
$$y\left[(l+1)T\right] - e^{-T/T_1} y(lT) ; \quad (6\text{-}45)$$
$$z\left[(l+1)T\right] = z\left\{x_d\left[(l+1)T\right] - y\left[(l+1)T\right]\right. . \quad (6\text{-}46)$$

Hàm trọng lượng của phần liên tục quy đổi có thể có được dưới dạng các trị rời rạc của đáp ứng phần tuyến tính $TW_t(s)$ đối với tác động xung đơn vị. Tương tự như (6-43), ta xác định được :

$$w_{lt}(lT) = kT\left(1 - e^{-lT/T_1}\right) . \quad (6\text{-}47)$$

Đặt (6-47) vào (6-42) :

$$y(lT) = \sum_{i=o}^{l-1} \left[x_d(iT) - y(iT)\right] kT\left[1 - e^{-(l-i)T/T_1}\right] . \quad (6\text{-}48)$$

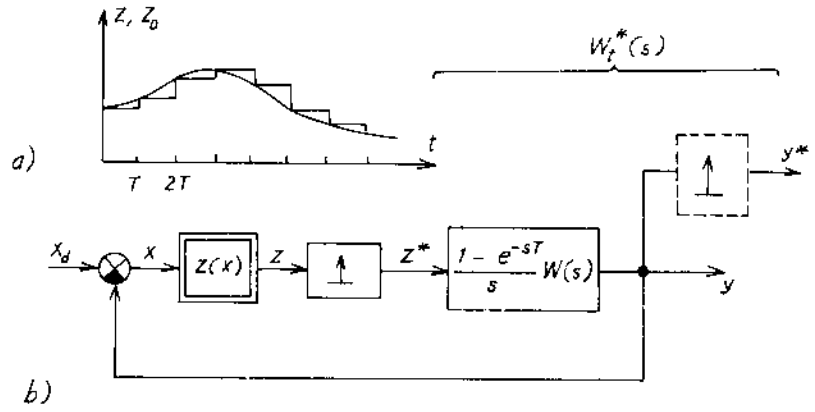
Việc thay thế tín hiệu thực z(t) bằng một chuỗi xung tức thời là hợp lý nếu bậc của mẫu số hàm truyền $W_t(s)$ lớn hơn bậc của tử số ít nhất là 2. Trong trường hợp ngược lại mẫu và tử số của $Wt^*(s)$ bằng nhau (m = n). Điều đó có nghĩa là vế phải của (6-40) tín hiệu z và y có cùng thời điểm và biểu thức lặp biến thành phương trình phi tuyến tính.

Trong trường hợp ấy, biểu thức (6-42) cũng trở nên phức tạp vì $w_{lt}(0) \neq 0$ khi m = n.

Thay vì dùng xung tức thời khi thay thế tín hiệu liên tục, có thể dùng xung có hình dạng phức tạp để bảo đảm độ chính xác của phương pháp xấp xỉ. Ở hình 6.7a có trường hợp xung tức thời được thay thế

bằng xung bậc thang (phần tử lấy mẫu và xung duy trì bậc không – ZOH) và khâu định hình có hàm truyền :

$$W_{dh}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$



Hình 6.7

Như vậy phần liên tục quy đổi của hệ xung :

$$W_{lt}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} W_t(s) \quad . \qquad (6\text{–}49)$$

Ví dụ 6–5 Xác định hàm truyền $W^*_t(s)$ và phương trình lặp của y(t) ở ví dụ 6–4 với phương pháp xấp xỉ dạng bậc thang.

Phần liên tục quy đổi :

$$W_{lt}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{k}{s(1 + sT_1)} \quad . \qquad (6\text{–}50)$$

Hàm truyền $W^*_t(s)$ được xác định :

$$W^*_t(s) = k \frac{\left[T - T_1\left(1 - e^{-T/T_1}\right)\right] e^{sT} + T_1\left(1 - e^{-T/T_1}\right) - T e^{-T/T_1}}{e^{2sT} - \left(1 + e^{-T/T_1}\right) e^{sT} + 2 e^{-T/T_1}} \quad . \qquad (6\text{–}51)$$

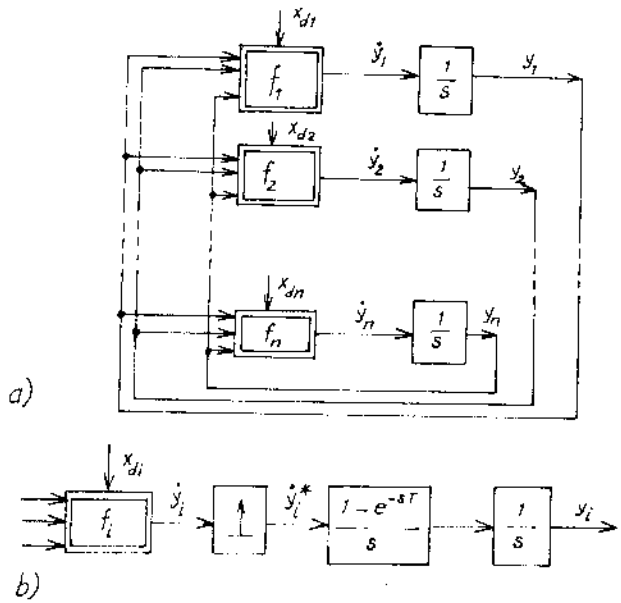
hay theo biến đổi z :

$$W_i(z) = k\,\frac{\left[T - T_1\left(1 - e^{-T/T_1}\right)\right] z + T_1\left(1 - e^{-T/T_1}\right) - T e^{-T/T_1}}{z^2 - \left(1 + e^{-T/T_1}\right) z + 2 e^{-T/T_1}}$$

Từ đó :

$$y\left[(l+2)T\right] = k\left[T - T_1\left(1 - e^{-T/T_1}\right)\right] z\left[(l+1)T\right] +$$
$$+ k\left[T_1\left(1 - e^{-T/T_1}\right) - Te^{-T/T_1}\right] z(lT) + \qquad (6\text{-}52)$$
$$\left(1 + e^{-T/T_1}\right) y\left[(l+1)T\right] - e^{-T/T_1} y(lT)\ .$$

z (iT) xác định từ (6–41).



Hình 6.8

Bây giờ hãy so sánh phương pháp chuyển đổi từ phương trình vi phân sang phương trình sai phân phi tuyến tính của Euler với phương pháp thay thế gần đúng hệ liên tục bằng hệ xung. Dạng chuẩn của phương trình chuyển động của hệ theo Euler (2–3) :

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i\,(y_1, y_2, \ldots y_n, t)\ ;\ i = \overline{1, n}. \qquad (6\text{-}53)$$

tương ứng với sơ đồ cấu trúc gồm các khâu tích phân nối với khâu phi tuyến nhiều đầu vào, liên hệ chéo và tín hiệu vào như ở hình 6.8a.

Dạng lặp của (6-53) là :

$$y_i\left[(l+1)T\right] = y_i(lT) + f_i\left[y_1(lT), y_2(lT), \ldots, y_n(lT)\right]T \quad (6\text{-}54)$$

với T được thay thế cho Δt.

Biểu thức (6-54) tương ứng với khâu phần tử xung và cơ cấu định hình được mắc thêm vào hệ như ở hình 6.8b.

Như vậy, phương pháp Euler được xem như tổng quát hóa của phương pháp được khảo sát ở ví dụ 6-4, cho trường hợp có cấu trúc phức tạp hơn.

Ví dụ 6-6 Vẽ đặc tính quá độ cho hệ tùy động rơle như ở hình 6.9a với phần tuyến tính :

$$W_t(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)} .$$

với $k = 4\ sec^{-1}$, $T_1 = 1$ sec. Đặc tính phi tuyến như ở hình 6.9,b. Tín hiệu vào có dạng $x_d = 10 . 1(t)$. Khi tính toán dùng cả hai dạng xung (tức thời và chữ nhật) để so sánh.

Để xác định biểu thức lặp dùng kết quả ở ví dụ 6-4 và ví dụ 6-5. Dùng $T = 0{,}1T_1 = 0{,}1$ sec, đối với hệ có xung tức thời, theo (6-45) và (6-46) ta có :

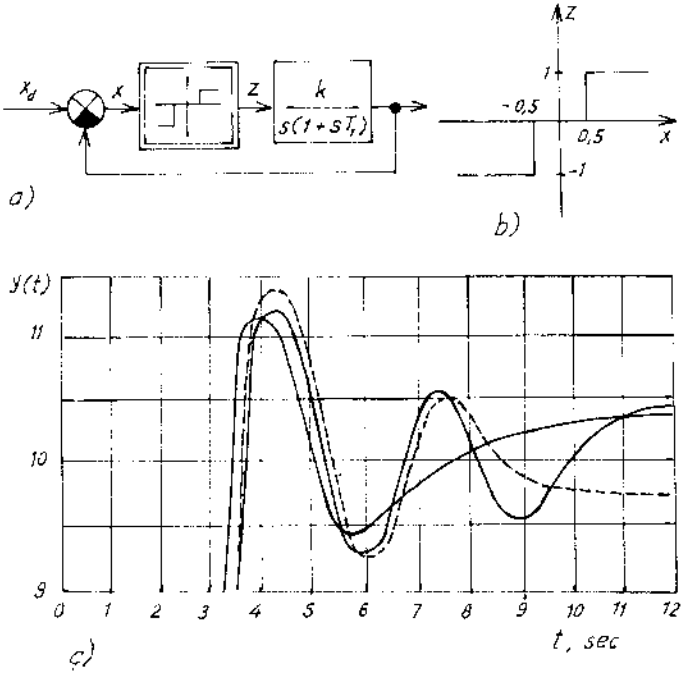
$$\begin{aligned} y\left[(l+2)T\right] &= 0{,}03808\, z\left[(l+1)T\right] + \\ &+ 1{,}9048\, y\left[(l+1)T\right] - 0{,}9048\, y(lT) , \end{aligned} \quad (6\text{-}55)$$

$$\begin{aligned} z\left[(l+1)T\right] &= z\left\{x_d\left[(l+1)T\right] - y\left[(l+1)T\right]\right\} = \\ &= z\left\{10 . 10\left[(l+1)T\right] - y\left[(l+1)T\right]\right\} . \end{aligned} \quad (6\text{-}56)$$

Đối với hệ có xung chữ nhật với T = 0,1 sec, từ (6-52) ta có :

$$\begin{aligned} y\left[(l+2)T\right] &= 0{,}0192\, z\left[(l+1)T\right] + 0{,}01888\, z(lT) + \\ &+ 1{,}9048\, y\left[(l+1)T\right] - 0{,}9048\, y(lT) \end{aligned} \quad (6\text{-}57)$$

mà $$z(iT) = z\left[x_d(iT) - y(iT)\right] = z\left[10 \cdot 1(iT) - y(iT)\right] \quad (6-58)$$
$$(i = 1, 1+1)$$



Hình 6.9

Ở hình 6.9c có các đặc tính quá độ (đoạn đầu tương ứng với hệ khởi động, không được mô tả) thực hiện trên máy tính. Đường đậm nét là đặc tính chính xác có cùng điều kiện, đường nét nhạt là đặc tính quá độ với xung tức thời còn đường nét đứt là với xung chữ nhật. Đặc tính với xung tức thời, vượt trước các đặc tính khác vì chuỗi xung tức thời (hình 6.6c) tác động ngay khi xuất hiện xung thực z(t). Để giảm sai lệch giữa chúng, ta dịch chuyển hàm quá độ này bằng độ trễ $\frac{1}{2}$T. Quá trình với xung chữ nhật và quá trình chính xác trùng nhau trong vùng $9,5 \leq y \leq 10,5$.

Sự gia tăng sai lệch theo thời gian giữa quá trình thực và tính toán theo thời gian xác minh cho sai số tích lũy, đặc trưng cho các phương pháp sai phân. Để tăng độ chính xác cần giảm thời gian lấy mẫu T. Việc

chọn chu kỳ lượng tử hóa thích hợp xem ở [20]. Để cho các sơ đồ khối ở hình 6.6a và 6.6d tương đương nhau, cần chú ý đến định lý Kachenicov (II.6, [20] :

$$\omega_c + \omega_{cl} \leq \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (6\text{-}59)$$

với ω_c là tần số giới hạn phổ $z(j\omega)$ của tín hiệu liên tục $z(t)$ và ω_{cl} là giới hạn dải thông tần của đặc tính tần phần liên tục quy đổi $W_{lt}(j\omega)$.

Để khỏi phải phân tích phổ của $z(t)$ (nói chung là bài toán phức tạp) và xây dựng đặc tính tần $W_{lt}(j\omega)$, có thể dùng phương pháp sau : Xây dựng các quá trình với chu kỳ lượng tử hóa T bé hơn gấp nhiều lần (ví dụ 10 lần) hằng số thời gian lớn nhất trong hệ. Sau đó xây dựng lại các quá trình với T bằng một nửa giá trị ban đầu. Nếu các quá trình ấy gần giống nhau thì việc chọn T là đúng.

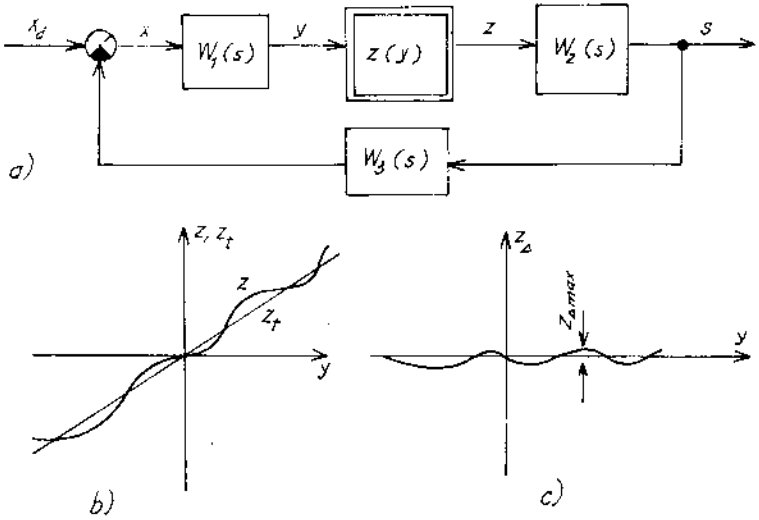
6.2. ĐÁNH GIÁ ẢNH HƯỞNG CỦA TÍNH CHẤT PHI TUYẾN ĐỐI VỚI QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ CỦA HỆ

Ở chương này sẽ khảo sát phương pháp xác định ước lượng giới hạn trên của chênh lệch giữa quá trình quá độ ở hệ phi tuyến và ở hệ tuyến tính tương đương. Phương pháp này có thể áp dụng cho hệ liên tục cũng như hệ xung. Sơ đồ khối được dùng để khảo sát như ở hình 6.10a là dạng tương đối tổng quát. Khâu phi tuyến $Z(y)$ được mắc giữa hai khâu tuyến tính $W_1(s)$ và $W_2(s)$, còn tín hiệu ra không phải được trực tiếp so sánh với tín hiệu đặt x_d mà thông qua khâu $W_3(s)$. Đặc tính phi tuyến ở hình 6.10b được thay thế bằng hai khâu nối song song : khâu tuyến tính $z_t(y) = k_t y$ (hình 6.10b) và khâu phi tuyến với đặc tính là sai lệch $z_\Delta(y) = z(y) - k_t y$ (hình 6.10c). Sai lệch cực đại (theo trị số tuyệt đối) là $z_{\Delta max}$. Đặc tính tuyến tính được chọn sao cho sai lệch cực đại $z_{\Delta max}$ là nhỏ nhất.

Ở hình 6.11a có sơ đồ nối song song hai khâu nói trên và hình 6.11, b là một phần của hệ mà liên hệ phi tuyến giữa y và z_Δ đã cắt đứt, như thế có nghĩa là sau đó sẽ không quan tâm đến đặc tính thực của tín hiệu $z_\Delta(t)$ biến đổi theo thời gian, và xem như tín hiệu ấy về trị số tuyệt đối luôn nhỏ hơn $z_{\Delta max}$.

Như vậy có thể đưa sơ đồ ở hình 6.11a về dạng tương đương như

ở hình 6.11c. Đó là hệ tuyến tính mà ngoài tín hiệu vào $x_d(t)$ còn có tín hiệu phụ $S_\Delta(t)$ phản ảnh ảnh hưởng của khâu phi tuyến z(y) đến quá trình động học của hệ. Ảnh hưởng ấy được đánh giá bằng thành phần $S_\Delta(t)$ của tín hiệu ra do tác động của tín hiệu phụ $z_\Delta(t)$, dựa vào nguyên lý xếp chồng. Đánh giá đầy đủ thành phần này là không thể được vì tính chất biến đổi của $S_\Delta(t)$ là không biết, nhưng có thể đánh giá nó theo đại lượng tuyệt đối vì nó là đáp ứng của tín hiệu vào được giới hạn theo đại lượng tuyệt đối. Đó là bài toán tích lũy của Bulgakov B. V.



Hình 6.10

Cho rằng $x_d = 0$ (nguyên lý xếp chồng) và hệ có điều kiện đầu bằng 0. Cũng cho rằng hệ tuyến tính ổn định thì ảnh của tín hiệu ra có dạng :

$$S_\Delta(s) = W_{K\Delta}(s)\, Z_\Delta(s) \qquad (6\text{-}60)$$

với :

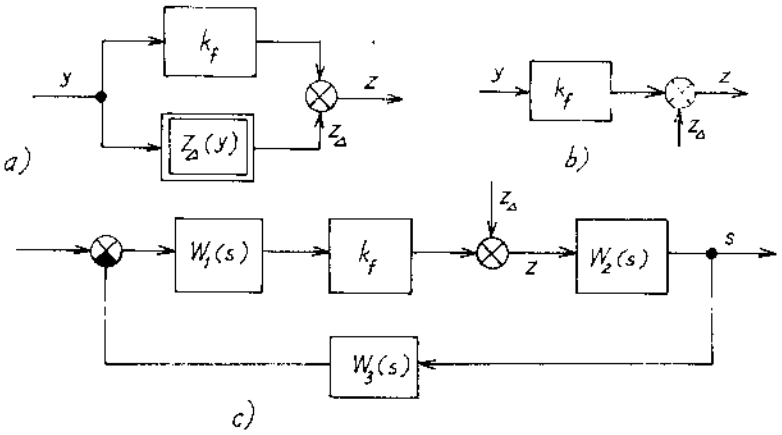
$$W_{K\Delta}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W(s)}, \qquad (6\text{-}61)$$

$$W(s) = k_f W_1(s)\, W_2(s)\, W_3(s). \qquad (6\text{-}62)$$

Theo (6 -60) có thể xác định hàm gốc theo định lý cuộn :

$$s_\Delta(t) = \int_0^t w_{K\Delta}(\tau)\, z_\Delta(t - \tau)\, d\tau\ . \qquad (6\text{-}63)$$

trong đó $w_{K\Delta}(\tau)$ là hàm trọng lượng hay hàm gốc của $W_{K\Delta}(s)$.



Hình 6.11

Lấy trị tuyệt đối của (6–63) ở cả hai vế, ta có bất đẳng thức :

$$|s_\Delta(t)| = \left| \int_0^t w_{K\Delta}(\tau)\, z_\Delta(t-\tau)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int_0^t |w_{K\Delta}(\tau)| \,.\, |z_\Delta(t-\tau)|\, d\tau \leq z_{\Delta max} \int_0^t |w_{K\Delta}(\tau|\, d\tau \,. \qquad (6\text{–}64)$$

Thay thế hàm trọng lượng $w_{K\Delta}(\tau)$ bằng đạo hàm của hàm quá độ $h_{K\Delta}(\tau)$ ở (6–64) :

$$z_{\Delta max} \int_0^t |w_{K\Delta}(\tau)|\, d\tau = z_{\Delta max} \int_0^t \left| \frac{dh_{K\Delta}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau \,. \qquad (6\text{–}65)$$

Nếu không có dấu trị số tuyệt đối dưới tích phân thì ở mỗi thời điểm nó bằng $h_{K\Delta}(t)$. Do đó (6–65) cần được tách ra từng đoạn có dấu không đổi của đạo hàm ($\nu \to 0$; hình 6.12a) :

$$\int_0^t \left| \frac{dh_{K\Delta}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau = \int_0^\nu \frac{dh_{K\Delta}(\tau)}{d\tau}\, d\tau - \int_\nu^{t_1} \frac{dh_{K\Delta}(\tau)}{d\tau}\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{dh_{K\Delta}(\tau)}{d\tau}\, d\tau - \ldots = h_0 - (h_1 - h_0) + (h_2 - h_1) - \ldots$$

Trong trường hợp chung, tích phân (6–65) được mô tả bởi hiệu những

cực trị cạnh nhau của $h_{K\Delta}(t)$:

$$\int_0^1 \left| \frac{dh_{K\Delta}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau = |h_0| + |h_1 - h_0| + |h_2 - h_1| + \ldots + |h_{K\Delta}(t) - h_r| \quad (6\text{-}66)$$

với h_r là cực trị cuối của hàm quá độ ở thời điểm khảo sát t.

Như vậy ở mọi thời điểm t, ảnh hưởng của tính phi tuyến không vượt quá trị tuyệt đối của ước lượng :

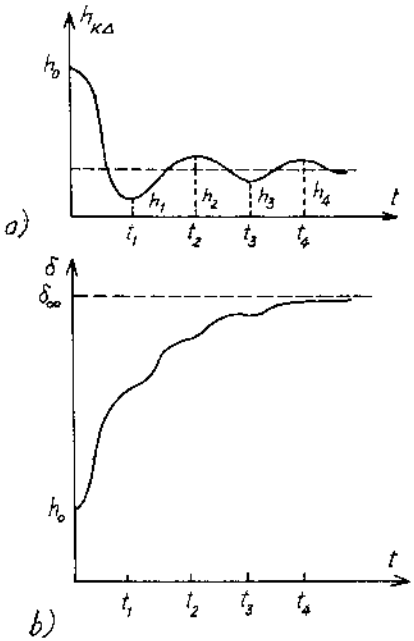
$$\delta(t) = z_{\Delta max}\left[|h_0| + |h_1 - h_0| + |h_2 - h_1| + \ldots + |h_{K\Delta}(t) - h_r| \right] \quad (6\text{-}67)$$

Đồ thị của (6–67) như ở hình 6.12b. Đồ thị tăng dần một cách đơn điệu ; điều đó có nghĩa là ảnh hưởng phi tuyến tính có thể được tích lũy theo thời gian và tiến đến giới hạn δ_∞ là ước lượng giới hạn trên ở bất kỳ thời điểm nào :

$$\delta_\infty = z_{\Delta max}\sum_{i=1}^{\infty}\left[|h_0| + |h_i - h_{i-1}| \right] . \quad (6\text{-}68)$$

Do đó bài toán mang tên là bài toán tích lũy. Ước lượng δ_∞ có thể xác định theo đồ thị của hàm quá độ $h_{K\Delta}(t)$ như ở hình 6.12a) bằng cách cộng trị tuyệt đối của các hiệu cực trị. Trong một số trường hợp ước lượng được thể hiện thông qua thông số của hệ dưới dạng khép kín.

Phương pháp nêu trên cho phép đánh giá sai lệch giữa quá trình động học của hệ phi tuyến và hệ tuyến tính hóa bằng cách thay thế đặc tính phi tuyến bằng đặc tính tuyến tính. Nếu sai lệch bé thì có thể dùng các phương pháp tuyến tính để khảo sát hệ đã được tuyến tính hóa.



Hình 6.12

Ước lượng xác định theo (6-67), (6-68) là bé trong trường hợp $z_{\Delta max}$ bé, nghĩa là đặc tính phi tuyến không khác đặc tính tuyến tính. Đó là các đặc tính kiểu khe hở, từ dư, biến áp có dây quấn hay các bộ biến đổi tương tự (hình 1.9, 1.11, 1.13). Trị số của tổng ở (6-67), (6-68) phụ thuộc vào lượng quá điều chỉnh và mức độ dao động của hệ.

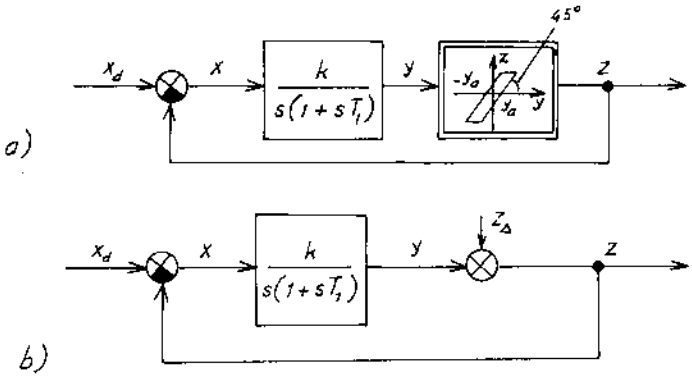
Ví dụ 6-7 Đánh giá ảnh hưởng của khe hở ở quá trình quá độ của hệ tùy động như ở hình 6.13a. Ở hình 6.13b có sơ đồ tương đương sau khi thay thế khâu phi tuyến bằng khâu khuếch đại $k_f = 1$ với tín hiệu $z_\Delta = y_a$ theo đặc tính phi tuyến z (y). Hàm truyền đạt theo (6-61) và (6-62) có dạng :

$$W_{K\Delta}(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{k}{s(1 + sT_1)}} = \frac{s(1 + sT_1)}{s(1 + sT_1) + k} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \dfrac{1}{k}s + \dfrac{T_1}{k}s^2} . \qquad (6\text{-}69)$$

Hàm quá độ theo (2-52) [19] có dạng :

$$h_{K\Delta}(t) = e^{-\frac{1}{2T_1}}\left[\cos\frac{\sqrt{4kT_1 - 1}}{2T_1}t + \frac{1}{\sqrt{4kT_1 - 1}}\sin\frac{\sqrt{4kT_1 - 1}}{2T_1}t\right] \qquad (6\text{-}70)$$



Hình 6.13

Ở hình 6.14a có đặc tính quá độ của $h_{K\Delta}(t)$ với $k = 14{,}14\ sec^{-1}$, $T_1 = 0{,}1$ sec. Ở hình 6.14b có hàm quá độ của hệ tùy động có thông số trên với tín hiệu vào bậc thang $x_d = 5$ và điều kiện đầu bằng 0. khe

hở $2y_a = 0,5$. Đường *1* ở hình 6.14b là đặc tính xấp xỉ và đường *2* là hàm quá độ hệ thực (chính xác). Ở hình 6.14c có chênh lệch của đường *2* và *1* (nghĩa là $z_\Delta(t)$ và ước lượng $\delta(t)$ và $-\delta(t)$ được xây dựng theo 6.14a với $Z_{\Delta max} = y_a = 0,25$.

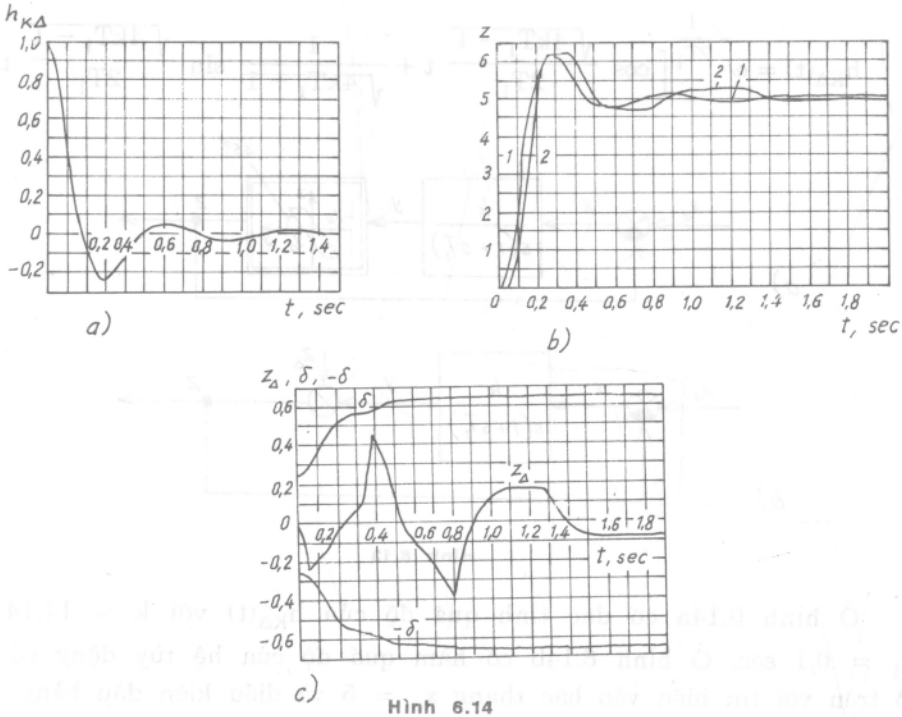
Như vậy $\delta(t)$ ở ví dụ này cho phép đánh giá chính xác được chênh lệch cực đại theo trị tuyệt đối do phần tử phi tuyến tạo nên.

Đại lượng δ_∞ có thể được xác định ở ví dụ này dưới dạng khép kín. Đối với hàm quá độ (6–70), các thời điểm có cực trị t_1, t_2, t_3,... tương ứng với $\frac{2\pi T_1}{\sqrt{4kT_1 - 1}}$, $\frac{4\pi T_1}{\sqrt{4kT_1 - 1}}$, $\frac{6\pi T_1}{\sqrt{4kT_1 - 1}}$. Trị số ban đầu của hàm quá độ bằng 1, các cực trị là :

$$h_1 = -e^{-t_1/2T_1} = -\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{4kT_1 - 1}}\right);$$

$$h_2 = e^{-t_2/2T_1} = \exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{4kT_1 - 1}}\right);$$

$$h_3 = -e^{-t_3/2T_1} = -\exp\left(-\frac{3\pi}{\sqrt{4kT_1 - 1}}\right).$$



Hình 6.14

Môđun của chúng tạo nên chuỗi cấp số nhân giảm dần với thành phần đầu tiên là 1 và mẫu số là $\exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{4kT_1 - 1}}\right)$.

Ước lượng cực tại δ_∞ tương ứng với (6-68):

$$\delta_\infty = z_{\Delta max}\left[h_0 + (h_0 - h_1) + (h_2 - h_1) + (h_2 - h_3) + \ldots\right] =$$

$$= 2z_{\Delta max}\sum_{i=0}^{\infty} |h_i| \quad (6\text{-}71)$$

Ước lượng cực đại được tính theo tổng các thành phần của cấp số:

$$\delta_\infty = 2z_{\Delta max}\frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{4kT_1 - 1}}\right)} \quad (6\text{-}72)$$

với $k = 14{,}14\ sec^{-1}$, $T_1 = 0{,}1$ sec, $z_{\Delta max} = 0{,}25$ ta có

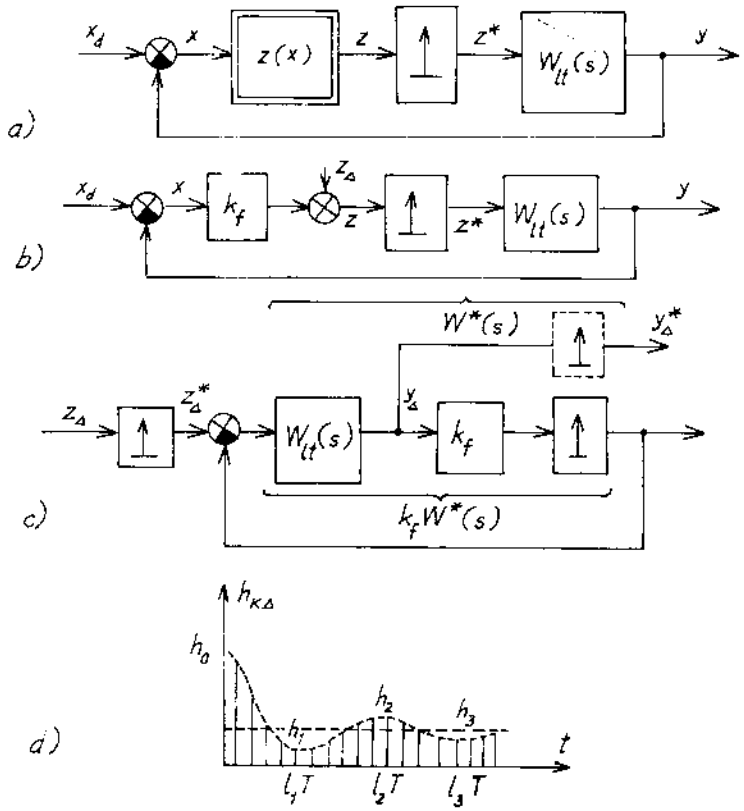
$$\delta_\infty = 0{,}67 = 2{,}68\ y_a.$$

có nghĩa là ảnh hưởng tương đối của khe hở được xác định bởi hệ số 2,68 là không lớn lắm.

Phương pháp đánh giá này cho phép cho một số kết luận về tính chất của hệ phi tuyến ôtônôm (không có tác động từ ngoài) với đặc tính gần như tuyến tính. Nếu hệ tuyến tính tương ứng là ổn định, điều đó có nghĩa là ở hệ phi tuyến không có quá trình phân kỳ. Nếu trong hệ có tự dao động thì biên độ không vượt quá δ_∞.

Bây giờ hãy khảo sát hệ xung phi tuyến như ở hình 6.15a. Ở đây khâu phi tuyến đứng ngay sau cơ cấu so sánh và trước phần tử xung. Những trường hợp khác nên dùng phép biến đổi để đưa về sơ đồ khối như trên để thuận tiện hơn trong phân tích khảo sát hệ. Sau khi thay khâu phi tuyến bằng hệ số tuyến tính hóa k_f và tín hiệu nhiễu z_Δ, ta có sơ đồ khối như ở hình 6.15b. Đánh giá ảnh hưởng của tín hiệu phụ (tức ảnh hưởng phi tuyến tính) được thực hiện theo sơ đồ tương đương (hình 6.15c) mà $x_d = 0$, phần tử xung lý tưởng được đưa đến đầu vào và ở mạch hồi tiếp, ngoài ra có phần tử xung hiệu dụng (đường nét đứt) ở mạch đầu ra.

Hàm truyền hệ xung tuyến tính kín (hình 6.15d) :



Hình 6.15

$$W^*_{K\Delta}(s) = \frac{W^*(s)}{1 + k_f W^*(s)} . \qquad (6\text{-}73)$$

Hàm trọng lượng tương ứng $w_{K\Delta}(lt)$ được xác định theo một trong các phương pháp đã nêu ở (II.5 [20]). Đã có hàm trọng lượng $w_{K\Delta}(lt)$, tín hiệu ra của hệ (hình 6.15d) với điều kiện đầu bằng 0 trên cơ sở nguyên lý xếp chồng :

$$y_\Delta(lT) = \sum_{i=1}^{l} w_{K\Delta}(iT)\, z_\Delta\left[(l - i)T\right] .$$

Ước lượng của tín hiệu ra theo giá trị tuyệt đối ở dạng chuỗi bất đẳng thức :

$$\left|y_\Delta(lT)\right| = \left|\sum_{i=0}^{l} w_{K\Delta}(iT)\, z_\Delta\left[(l-i)T\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{l} \left|w_{K\Delta}(iT)\right| \left|z_\Delta\left[(l-i)T\right]\right| \qquad (6\text{-}75)$$

$$\leqslant z_{\Delta max} \sum_{i=o}^{l} \left|w_{K\Delta}(iT)\right| = \delta(lT)$$

Biểu thức cuối cùng tương tự với (6 -64) đối với hệ liên tục vì rằng :

$$\sum_{i=1}^{l} w_{K\Delta}(iT) = h_{K\Delta}(lT) \ .$$

nên, như trường hợp hệ liên tục, ước lượng $\delta(lT)$ có thể được thể hiện qua cực trị của hàm quá độ hệ kín (hình 6.15d) :

$$\delta(lt) = z_{\Delta max}\Big[\ |h_0| + |h_1 - h_0| + |h_2 - h_1| + \ldots + |h_{K\Delta}(lT) - h_r|\Big] \qquad (6\text{-}76)$$

h_r là cực trị cuối cùng ở thời gian lấy mẫu lT.

Cho $l \to \infty$ ta có ước lượng giới hạn trên với mọi thời điểm :

$$\delta_\infty = z_{\Delta max} \sum_{i=1}^{\infty} \Big[\ |h_0| + |h_i - h_{i-1}|\Big] \ . \qquad (6\text{-}77)$$

Ước lượng này dễ dàng có được theo đồ thị của hàm quá độ hệ kín (hình 6.15c), mặt khác có thể xác định h_i theo một trong những phương pháp đã nêu ở (III, [20]).

Các chú thích khi dùng phương pháp ước lượng cho hệ phi tuyến với tín hiệu vào liên tục đều đúng đối với hệ xung phi tuyến.

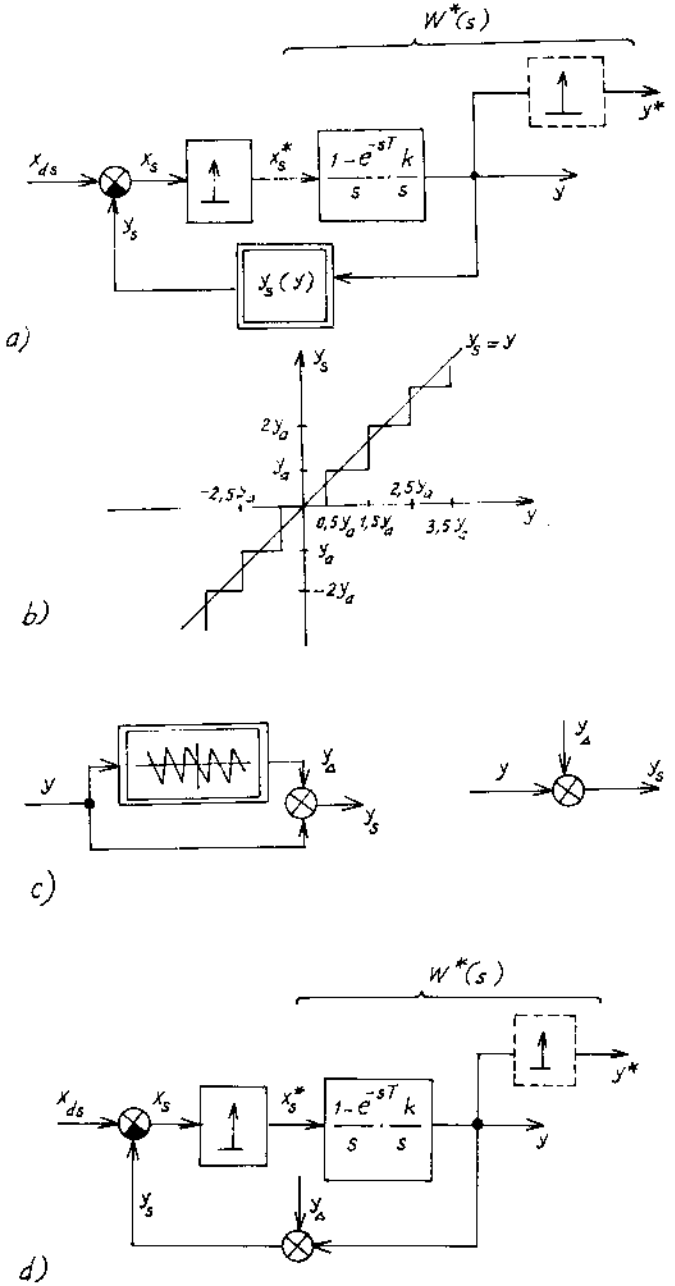
Ví dụ 6–8 Hãy đánh giá ảnh hưởng của lượng tử hóa theo mức đối với quá trình quá độ của hệ tùy động số (hình 6.16a). Phần liên tục là một khâu tích phân, còn dạng xung là chữ nhật có hệ số lấp đầy $\gamma = 1$.

Hàm truyền của phần liên tục quy đổi :

$$W_{lt}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{k}{s} \ ,$$

có dạng gián đoạn :

$$W^*(s) = \frac{kT}{e^{sT} - 1} \quad . \tag{6-78}$$



Hình 6.16

Đặc tính phi tuyến đặc trưng cho cơ cấu biến đổi AD ở máy tính số có dạng bậc thang như ở hình 6.16b. Do đó lượng tử hóa theo mức có thể xem như tổng của đặc tính tuyến tính y và phần đặc tính phi tuyến có giới hạn y_Δ (hình 6.16c) :

$$y_s = y + y_\Delta$$

với
$$|y_\Delta| \leq \frac{y_a}{2}$$

Ở sơ đồ tương đương (hình 6.16d) khâu phi tuyến đã được thay thế bởi khâu khuếch đại $k_f = 1$ và nhiễu lượng tử hóa $y_\Delta(t)$ với $y_{\Delta max} = 0{,}5y_a$. Hàm truyền đối với nhiễu đầu vào :

$$W^*_{K\Delta}(s) = -W^*_K(s) = -\frac{W^*(s)}{1 + W^*(s)} = -\frac{kT}{l^{sT} - 1 + kT} \cdot \qquad (6\text{-}79)$$

Hàm trọng lượng $w_{K\Delta}(lT) = -w_k(lt)$ được xác định theo phương (III. [20]). Phương trình đặc trưng của hệ có một nghiệm xác định bởi phương trình :

$$e^{sT} = 1 - kT. \qquad (6\text{-}80)$$

Cho nên :
$$w_{K\Delta}(lT) = -\left[kT(1 - kT)^{l-1}\right] . \qquad (6\text{-}81)$$

Trị số tuyệt đối của $w_{K\Delta}(lt)$ tạo nên chuỗi cấp số với $l = 1, 2, 3 \ldots$ là :

$$kT\ ,\ kT\,|1 - kT|\ ,\ kT\,|1 - kT|^2\ , \ldots$$

Tổng của chúng là :

$$\delta_\infty = y_{\Delta max}\frac{kT}{1 - |1 - kT|} \cdot \qquad (6\text{-}82)$$

Với $y_{\Delta max} = 0{,}5y_a$, $kT = 1{,}5$ (trị số $kT < 2$ rút ra từ điều kiện ổn định của hệ), ta có $\delta_\infty = 1{,}5y_a$. Ở hệ thực, giá trị lượng tử y_a rất bé nên ảnh hưởng của lượng tử hóa theo mức đối với quá trình động học là không đáng kể.

6.3. ĐÁNH GIÁ MỨC ĐỘ TÁC ĐỘNG NHANH CỦA HỆ PHI TUYẾN BẰNG CHỈ TIÊU ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI

Vấn đề ổn định ở hệ phi tuyến được đánh giá bằng sự chuyển đổi từ một trạng thái ban đầu nào đó đến trạng thái cân bằng hay chế độ

cưỡng bức ổn định. Đối với hệ tuyến tính, đánh giá ấy là chính xác. Ở hệ phi tuyến chỉ có thể xác định được giới hạn của các ước lượng.

Ước lượng về *mức độ tác động nhanh* hay *mức độ ổn định* của hệ phi tuyến là không kém hơn một đại lượng cho trước λ_0 :

$$\lim_{t \to \infty} \eta(t)\, e^{\lambda_0 t} = 0, \qquad (6\text{-}83)$$

η là chênh lệch giữa quá trình không bị kích thích và bị kích thích hay giữa trạng thái ban đầu và trạng thái cân bằng hoặc một chế độ cưỡng bức ổn định nào đó. Biểu thức (6-83) có nghĩa là $\eta(t)$ theo thời gian giảm nhanh hơn hàm mũ $e^{-\lambda_0 t}$.

Nhân với hàm gốc một đại lượng $e^{\lambda_0 t}$ có nghĩa là chuyển dịch toán tử s ở ảnh của nó một đại lượng $-\lambda_0$, cho nên việc tìm điều kiện ổn định tuyệt đối có mức độ ổn định λ_0 thực chất là dùng đặc tính tần chuyển dịch $W_t(j\omega - \lambda_0)$ thay vì $W_t(j\omega)$ của phần tuyến tính. Nếu nói đến vị trí cân bằng thì điều kiện đủ để cho hệ mô tả ở hình 5.9a ($x_d = 0$) có mức độ ổn định λ_0 là thỏa mãn bất đẳng thức :

$$\mathrm{Re}\,(1 + jq\omega)W_t(j\omega - \lambda_0) + \frac{1}{k} > 0. \qquad (6\text{-}84)$$

Nếu dùng đặc tính tần dịch chuyển biến dạng :

$$\widetilde{W}_t(j\omega - \lambda_0) = P(j\omega - \lambda_0) + j\omega Q(j\omega - \lambda_0). \qquad (6\text{-}85)$$

thì ta có *tiêu chuẩn tác động nhanh dạng đường thẳng* : Hệ phi tuyến có phần tuyến tính ổn định và đặc tính phi tuyến nằm trong góc [0, k] có độ tác động nhanh không kém hơn λ_0 nếu đặc tính tần dịch chuyển biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega - \lambda_0)$ không cắt đường thẳng (q, k).

Tiêu chuẩn tác động nhanh dạng parabôn

Hệ phi tuyến có phần tuyến tính trung tính hay không ổn định và đặc tính phi tuyến nằm trong góc [r, k] có độ tác động nhanh không kém hơn λ_0 nếu đặc tính tần dịch chuyển biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega - \lambda_0)$ không cắt parabôn (q, k, r).

Như vậy khảo sát độ tác động nhanh của hệ phi tuyến dẫn đến việc dùng tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối của trạng thái cân bằng mà đặc tính tần biến dạng được thay thế bằng đặc tính tần dịch chuyển biến dạng. Lưu ý rằng đặc tính phi tuyến z(x) nằm trong góc [r, k], nghĩa là hệ số tuyến tính hóa tĩnh :

$$k^t(x) = \frac{z(x)}{x}$$

nằm trong miền [r, k].

Nếu đường thẳng (q, k) hay parabôn (q, k, r) được vẽ sao cho tiếp xúc với đặc tính tần dịch chuyển biến dạng $\widetilde{W}_t(j\omega - \lambda_0)$ tại điểm cắt với trục thực và $\widetilde{W}_t(j\omega - \lambda_0)$ nằm ở bên phải thì độ tác động nhanh và biên giới ổn định của hệ phi tuyến đã biến đổi và trùng với hệ tuyến tính hóa, nghĩa là hệ phi tuyến có độ tác động nhanh λ_0 như ở hệ tuyến tính hóa.

Như vậy độ tác động nhanh của hệ phi tuyến không vượt quá độ tác động nhanh cực đại của hệ tuyến tính hóa.

Để xác định mức độ ổn định của một hệ phi tuyến nào đó cần xây dựng họ đặc tính $W_t(j\omega - \lambda_0)$ với những giá trị λ_0 khác nhau. mức độ ổn định được xác định bởi đặc tính cắt tất cả mọi đường thẳng hay parabôn khác ngoại trừ nó có một hay vài điểm tiếp xúc. Bài toán có thể được đặt ngược lại : Xác định các thông số của hệ bảo đảm mức độ ổn định không kém hơn trị số cho trước.

Ví dụ 6-8 Hãy xác định vùng có mức độ ổn định không kém hơn trị số cho trước trong miền thông số của hệ với hàm truyền :

$$W_t(s) = \frac{k(1 + sT_1)}{(1 + sT_2)^2} \quad (6\text{-}86)$$

Đặc tính phi tuyến có dạng khe hở.

Sau khi vẽ đặc tính tuyến tính biến dạng $W_t(j\omega)$, ta xác định được điều kiện ổn định tuyệt đối của hệ phi tuyến có đặc tính kiểu khe hở là :

$$\mathrm{Re}\left[W_t(j\omega) + 1\right] > 0 . \quad (6\text{-}87)$$

Như vậy điều kiện đối với đặc tính dịch chuyển là :

$$\mathrm{Re}W_t(j\omega - \lambda_0) > -1. \quad (6\text{-}88)$$

Thay thế $s = j\omega - \lambda_0$, với $T_2 = 1$ sec, ta xác định phần thực của (6-86) :

$$\mathrm{Re}W_t(j\omega - \lambda_0) = \frac{k\left[\omega^2(2T_1 - T_1\lambda_0 - 1) - T_1\lambda_0^3\right] + k\left[\lambda_0^2(2T_1 + 1) - \lambda_0(2 + T_1) + 1\right]}{\left[(1 - \lambda_0)^2 + \omega^2\right]^2} \quad (6\text{-}89)$$

Cân bằng không đạo hàm của (6–89) theo ω, ta xác định được ω_0 mà (6–89) cực tiểu :

$$\omega_0^2 = \frac{T_1\lambda_0^3 - 3\lambda_0^2 + (6 - 3T_1)\lambda_0 - 3 + 2T_1}{2T_1 - T_1\lambda_0 - 1} . \qquad (6\text{–}90)$$

Thay (6–90) vào (6–89) sau đó vào (6–88) ta có điều kiện :

$$k < \frac{8(\lambda_0 - 1)^2(1 - T_1)}{\left[T_1(2 - \lambda_0) - 1\right]^2} . \qquad (6\text{–}91)$$

Ở hình 6.17b có những vùng bảo đảm mức độ ổn định khác nhau với những trị số khác nhau của T_1.

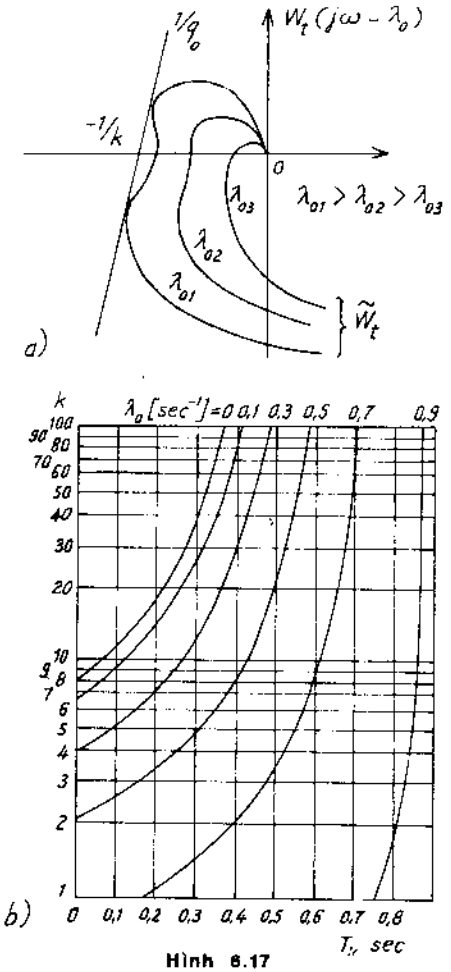
Đối với hệ phi tuyến có đặc tính phi tuyến không dừng z(x, t) như ở hình 5.14 có *tiêu chuẩn tác động nhanh dạng đường tròn.*

Độ tác động nhanh của hệ phi tuyến có phần tử phi tuyến không dừng z(x, t) nằm trong góc [r, k] với mọi t sẽ không nhỏ hơn λ_0 nếu đặc tính tần dịch chuyển $W_t(j\omega - \lambda_0)$ không cắt đường tròn (k, r) và bao vây lấy nó $\frac{l}{2}$ lần trong đó l là số nghiệm phải của phần liên tục.

Ví dụ 6–9 Với hệ có hàm truyền phần tuyến tính :

$$W_t(s) = \frac{1}{(2s + 1)(s + 1)(0{,}5s + 1)} ,$$

và độ tác động nhanh $\lambda_0 = 0{,}5$. Đặc tính tần dịch chuyển sẽ là :



Hình 6.17

$$W_t(j\omega - 0,5) = \frac{1}{2j\omega\,(\omega + 0,5)\,(0,5j\omega + 0,75)}$$

Đặc tính tần dịch chuyển biến dạng như ở hình 6.18 :

$$\tilde{W}_t(j\omega - 0,5) = -\frac{1}{0,5\omega^4 + 1,25\omega^2 + 0,28} - j\,\frac{0,375 - 0,5\omega^2}{0,5\omega^4 + 1,25\omega^2 + 0,28}$$

Vẽ tiếp tuyến với $W_t(j\omega - 0,5)$ xác định :

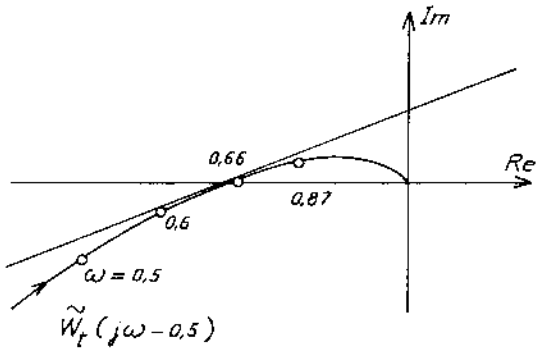
$$0 < k^{(1)}(x) = \frac{z(x)}{x} < k_g = \frac{1}{0,66} = 1,52.$$

Điều kiện đủ để có độ ổn định của quá trình trong hệ phi tuyến với đặc tính phi tuyến có đạo hàm nằm trong miền [r, k] là :

$$\mathrm{Re}\,\frac{W_t(j\omega - \lambda_0)}{1 + rW_t(j\omega - \lambda_0)} + \frac{1}{k - r} \geqslant 0\,. \qquad (6\text{–}92)$$

Khi tổng hợp cơ cấu hiệu chỉnh tuyến tính theo điều kiện (6 –84) và (6 –92), có thể dùng đặc tính tần lôgarit.

Phương pháp đánh giá chất lượng của quá trình nói trên có thể dùng cho hệ xung phi tuyến. Điều kiện đủ để đánh giá mức độ ổn định theo (5 –48) và (5 –49) có dạng :



Hình 6.18

$$\mathrm{Re}W^*_t(j\omega - \lambda_0) + \frac{1}{k} > 0 \qquad (6\text{–}93)$$

$$\mathrm{Re}\left[1 + q(1 - e^{(j\omega - \lambda_0)T})\right] W^*_t(j\omega - \lambda_0) + \frac{1}{k} > 0\,. \qquad (6\text{–}94)$$

Tiêu chuẩn ổn định tuyệt đối tần số có thể được dùng để đánh giá chất lượng hệ điều khiển liên tục và xung theo chỉ tiêu chất lượng tích phân [23].

6.4. DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG CÁC HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

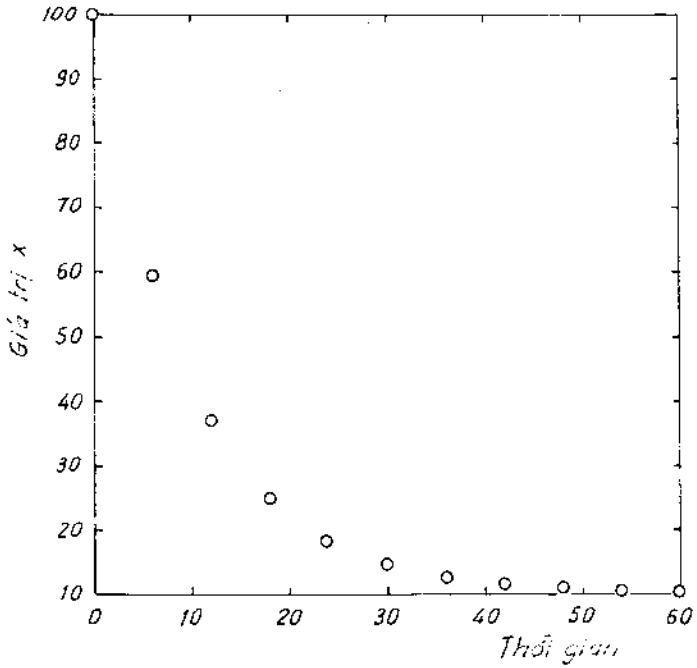
6.4.1. KHÁI NIỆM

Để làm ví dụ, mô hình của quá trình làm nguội một vật được mô tả bằng phương trình vi phân sau :

$$\frac{dx}{dt} = K(x - s) \qquad (6\text{–}95)$$

với x là nhiệt độ ở thời điểm t, s là nhiệt độ của môi trường và K là hằng số âm đối với quá trình làm nguội. Nhiệt độ ban đầu của vật là x_0 ở thời điểm t = 0. Đó là dạng phương trình vi phân bậc một mà đại lượng ban đầu được cho trước đối với biến x ở thời điểm t = 0 nên gọi là *bài toán với đại lượng ban đầu* .

Nghiệm của (6–95) có thể xác định dễ dàng theo phương pháp giải tích. Tuy nhiên có nhiều phương trình vi phân không thể dùng phương pháp giải tích hay không thể hiện rõ mối quan hệ giữa x và t. Trong trường hợp ấy phải dùng đến phương pháp số.



Hình 6.19

Để giải phương trình vi phân dạng thông thường trên, dùng các hàm chuẩn của MATLAB, ode 23 hay ode 45 (ordinary differential equation) với độ chính xác với bậc 2, 3 hay 4, 5).

Dùng ode 23 chẳng hạn để giải phương trình vi phân (6-95) bắt đầu bằng xác định hàm f501 theo MATLAB sau khi mở M- file :

```
function xprime=f501 (t,x)
xprime= -0.1* (x-10) ;
```

Ở ví dụ này dùng :

$$K = -0,1 \; ; \; s = 10 \; ; \; x_o = 100$$

Hàm trên xác định vế phải của phương trình (6-95). Ode 23 đòi hỏi ký tự f501 ; thời gian bắt đầu và kết thúc của t [0 và 60] ở dạng vectơ hàng ; giá trị ban đầu của x là 100 và dung sai tương đối là 0,5.

```
>> options=odeset ('RelTol', 0.5) ;
>> [t x]=ode23 ('f501', [0 60], 100, options);
>> plot(t,x,'*');
>> xlabel ('thoi gian'); ylabel ('gia tri x');
>> hold on;
>> plot(t,90*exp(-0.1*t)+ 10,'o');
>> hold off
```

Ở hình 6.19 có các giá trị của x theo t ứng với (6-95) nói trên. Dấu "*" ứng với giá trị được xác định theo ode 23 còn dấu "o" ứng với các giá trị chính xác xác định theo phương pháp giải tích.

6.4.2. PHƯƠNG PHÁP EULER

Với phương trình vi phân dạng :

$$dx/dt = f(t, x) . \qquad (6-96)$$

Phương pháp xấp xỉ để xác định nghiệm là phương pháp Euler dựa trên chuỗi Taylor với hai số hạng đầu. Dạng chuỗi Taylor sau đây có số hạng thứ ba là phần dư, nó mô tả tất cả các số hạng đã loại ra khỏi chuỗi Taylor :

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + x''(\theta)h^2/2. \qquad (6-97)$$

với θ nằm trong khoảng (t_0, t_1).

Với h bé có thể bỏ qua số hạng h^2 và thay $t_1 = t_0 + h$ ở (6-97) ta có :

$$x_1 = x_0 + hx'_0 .$$

Ở đây, dấu "," là đạo hàm theo thời gian và $x'_i = x'(t_i)$. Nói chung, có thể viết :

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n ; \qquad n = 0, 1, 2...$$

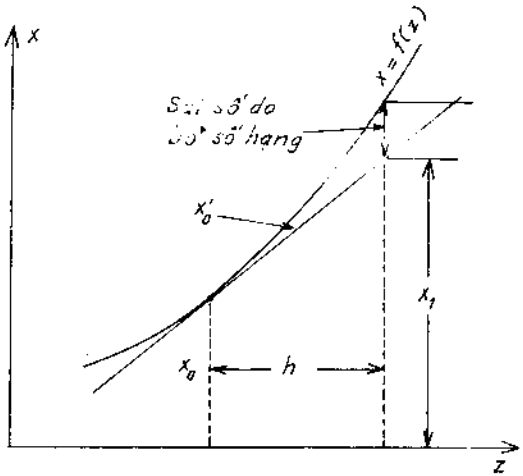
hay

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) ; \qquad n = 0, 1, 2... \qquad (6\text{-}98)$$

Để có tính tổng quát, Δt ở (6-5) được thay thế bằng h ở (6-98).

Ở hình 6.20 có mô tả hình học phương pháp Euler.

Từ (6-97) thấy rằng sai số do bỏ bớt số hạng, nghĩa là sai số của mỗi bước là thành phần của h^2.



Hình 6.20

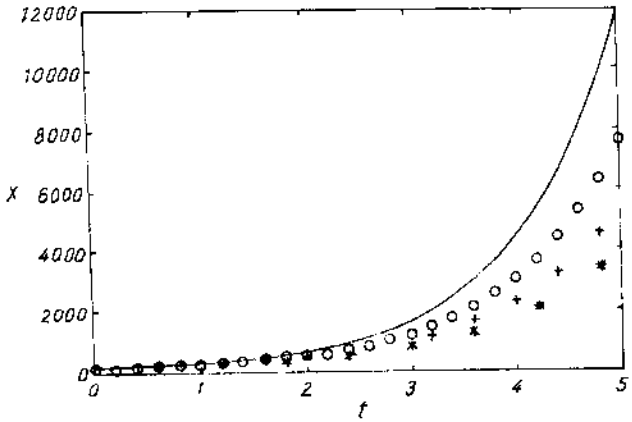
Phương pháp được thực hiện đơn giản với hàm MATLAB feuler như sau :

Dùng hàm này với phương trình (6 - 95) và K = 1, s = 20 ta có được hình 6.21 mô tả ảnh hưởng của bước tính h đối với độ chính xác của phép tính.

Đường cong chính xác xác định theo phương pháp giải tích là đường đậm nét trên hình vẽ. Dễ nhận thấy rằng, dầu phương pháp Euler rất giản đơn nhưng muốn có độ chính xác cần thiết thì bước tính h cần phải rất bé. Sai số ở mỗi bước tính có thể được tích lũy, có thể theo một hướng nào đó không dự báo trước được.

```
Function [tvals,xvals]=feuler(f,tspan,startval,step)
% Phương pháp Euler để giải phương trình vi phân
% bậc một dx/dt=f(t,x),
%
% Gọi: [tvals,xvals]=feuler(f,tspan,startval,step)
% Thời điểm bắt đầu và kết thúc của t:tspan=[start
```

```
% finish],
% Giá trị ban đầu của x: startval và bước tính: step.
% Hàm f(t,x) do người dùng xác định,
%
steps=(tspan(2)-tspan(1))/step+ 1);
x=starval; t=tspan(1);
xvals=startval; tvals=tspan(1);
fori=2:steps
        x1=x+steps*fevals(f,t,x); t1=t+step;
        % chọn giá trị cho đầu ra
        tvals=[tvals,t1]; xvals=[xvals,x1];
        t=t1; x=x1;
end
```



Hình 6.21

6.4.3. VẤN ĐỀ ỔN ĐỊNH

Để bảo đảm cho sai số không tích lũy, phương pháp giải phương trình vi phân phải ổn định. Ở phương pháp Euler, sai số ở mỗi bước tính ứng với bậc h^2, sai số ấy là sai số cục bộ do bỏ các số hạng bậc cao, nó chỉ nói lên độ chính xác của một bước tính, không phải là sai số ở một chuỗi bước tính. Sai số ở một chuỗi bước tính khó xác định vì sai số của một bước tính tác động đến độ chính xác của bước tiếp theo một cách phức tạp. Do đó ta cần phân biệt khái niệm ổn định tuyệt đối và ổn định tương đối.

Ví dụ phương trình vi phân :

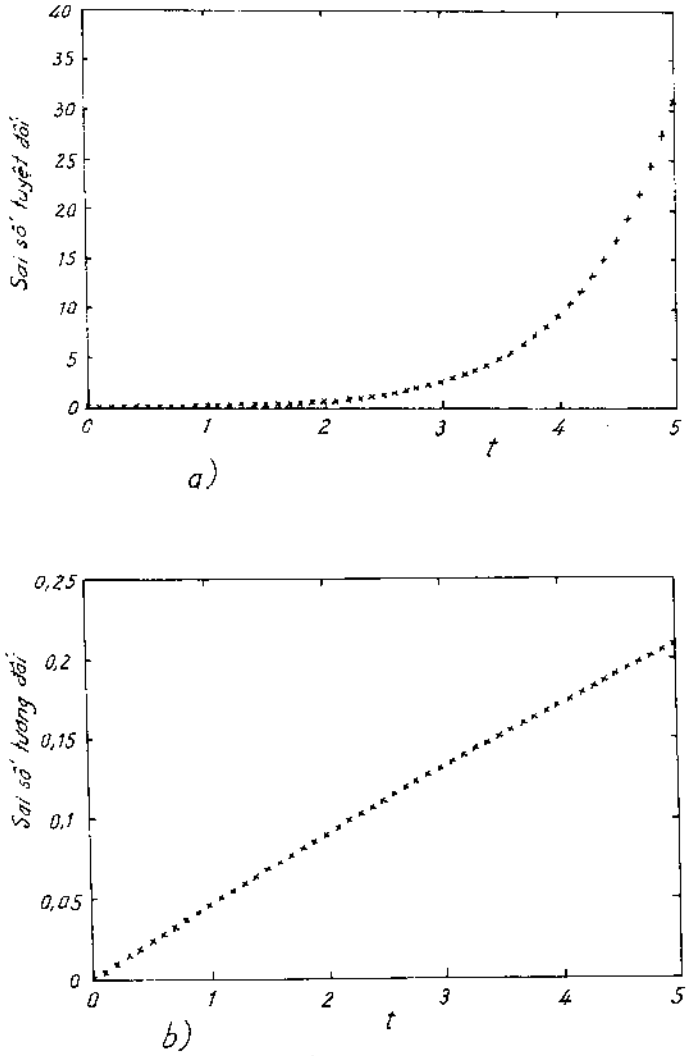
$$\frac{dx}{dt} = Kx \qquad (6\text{-}99)$$

Phương pháp Euler có dạng :

$$x_{n+1} = x_n + Kx_n \; ; \; n = 0, 1, 2. \qquad (6\text{-}100)$$

Như vậy dùng phép đệ quy lặp với giả thiết là không có sai số khi tính ta có :

$$x_{n+1} = (1 + hK)^{n+1}x_0 \; ; \; n = 0, 1, 2. \qquad (6\text{-}101)$$



Hình 6.22

Với bước tính h đủ nhỏ, đại lượng này sẽ xấp xỉ với đại lượng chính xác e^{Kt}.

Để biết được diễn biến của các sai số theo phương pháp Euler như thế nào, ta giả thiết rằng x_0 thay đổi và ký hiệu nó là x_0^a mà $x_0^a = (x_0 - e_0)$ và e_0 là sai số. Như vậy (6-101) có thể viết như sau :

$$x_{n+1}^a = (1 + hK)^{n+1} x_0^a = (1 + hK)^{n+1} (x_0 - e_0) = x_{n+1} - (1+hK)^{n+1} e_0.$$

Để sai số ban đầu tăng dần thì $|1 + hK| \geqslant 1$. Sau nhiều bước, sai số này sẽ tăng và vượt quá nghiệm. Đó là đặc điểm của tính không ổn định và trong trường hợp này, phương pháp Euler là không ổn định. Nếu $|1 + hK| < 1$ thì sai số sẽ giảm dần và phương pháp là ổn định tuyệt đối. Vậy điều kiện để ổn định tuyệt đối là :

$$-2 < hK < 0. \qquad (6\text{-}102)$$

Điều kiện này quá khắt khe và ta có thể thỏa mãn với điều kiện là sai số không tăng tỷ lệ với x. Đó là ổn định tương đối. Chú ý rằng phương pháp Euler không ổn định tuyệt đối với mọi K dương.

Điều kiện ổn định tuyệt đối có thể được tổng quát hóa đối với phương trình vi phân thông thường dạng (6-96) là :

$$-2 < h\frac{\partial f}{dx} < 0. \qquad (6\text{-}103)$$

Vì $h > 0$ nên để có ổn định tuyệt đối thì $\partial f/\partial x < 0$. Ở hình 6.22a và 6.22b có so sánh sai số tuyệt đối và sai số tương đối với $h = 0,1$ cho phương trình vi phân $dx/dt = x$ với $x = 1$ khi $t = 0$. Ở hình 6.22a sai số tăng rất nhanh mặc dù bước tính nhỏ. Ở hình 6.22b sai số tỷ lệ với nghiệm và sai số tương đối tăng tuyến tính. Phương pháp không ổn định tương đối cũng không ổn định tuyệt đối đối với bài toán đã cho.

Phương pháp Euler có thể không ổn định với một số trị số của h. Ví dụ nếu $K = -100$ thì phương pháp Euler chỉ ổn định với $0 < h < 0,02$. Như vậy, muốn giải phương trình vi phân trong thời khoảng từ 0 đến 10, cần có 500 bước tính.

6.4.4. CÁC PHƯƠNG PHÁP RUNGE - KUTTA

Phương pháp Runge – Kutta thường dùng nhất là phương pháp cổ điển, có dạng sau đây đối với mỗi bước n = 0, 1, 2...

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf\left(t_n, x_n\right) \;; \\ k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf\left(t_n + h, x_n + k_3\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}104)$$

và $$x_{n+1} = x_n + \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)/6 \qquad (6\text{-}105)$$

Sai số chung có bậc h^4. Ở 6.1.2, các biểu thức (6–34) ... (6–38) có m_i ($i = \overline{1,4}$) thay cho k_i, Δ_t thay cho h.

Dạng tổng quát của các phương pháp Runge – Kutta cho mỗi bước $n = 0, 1, 2,...$ như sau :

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n) \;; \\ k_i &= hf(t_n + hd_i \;;\; x_n + \sum_{j=1}^{i=1} c_{ij}k_j) \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}106)$$

và $$x_{n+1} = x_n + \sum_{j=1}^{p} b_j k_j \;. \qquad (6\text{-}107)$$

Phương pháp tổng quát này có bậc p.

Đối với phương pháp Runge – Kuta bậc bốn : (6–104 và 6–105), điều kiện ổn định là :

$$-2{,}78 < h\frac{\partial f}{\partial x} < 0.$$

Theo (6–106) và (6–107) cần xác định các vectơ d, b cũng như ma trận c_{ij}. Nếu đại lượng được tính k_j tạo thành vectơ k, hàm được tạo thành để xác định x như sau :

```
k(1)=feval('f',t,x);
for i=1:p
k(i)=step*feval('f',t+step*d(i),x+c(i,1:i-1)*k(1:i-1));
end
x=x+b*k;
```

Hàm của MATLAB, rkgen được cho như sau : Vì c và d dễ thay đổi, mọi dạng của phương pháp Runge –Kutta có thể được thực hiện theo hàm này. Một số dạng thường gặp như :

1. Phương pháp *Runge - Kutta - Merson* có sai số ở số hạng bậc h^5, ngoài ra cho phép đánh giá sai số do bỏ số hạng ở mỗi bước.

2. Phương pháp *Ralston - Runge - Kutta* cho phép chọn các hệ số một cách dễ dàng sao cho sai lệch do bỏ số hạng là cực tiểu.

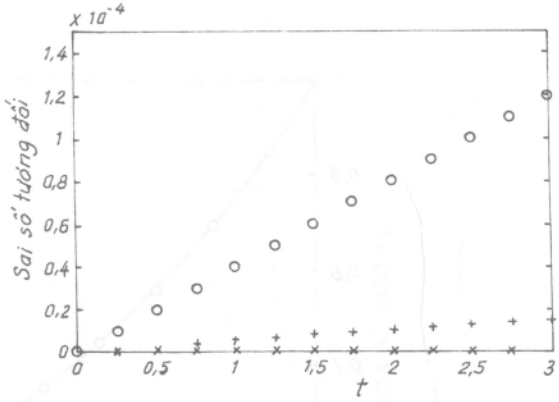
3. Phương pháp *Butcher - Rungge - Kutta* cho phép có độ chính xác cao ở mỗi bước, sai số ở thành phần bậc h^6.

```
Function [tvals,xvals]=rkgen(f,tspan,startval,step,method)
% Phương pháp Runge Kutta để giải phương trình vi phân
% bậc một dx/dt=f(t,x),
%
% Gọi: [tvals,xvals]=rkgen(f,tspan,startval,step,method)
% Thời điểm bắt đầu và kết thúc của t: tspan=[start finish]
% Giá trị ban đầu của x: startval và bước tính step,
% Hàm f(t,x) do người dùng xác định,
% Phương pháp (1,2,3) ứng với phương pháp cổ điển,
% Butcher hay Merson R. K. do người dùng chọn,
%
b=[ ]; c=[ ]; d=[ ];
if method <1 method>3
        disp ('Method number unknown so using Classical') ;
        method=1;
end ;
if method==1
        order=4;
        b=[1/6 1/3 1/3 1/6]; d=[0 .5 .5 1];
        c=[0 0 0 0; 0.5 0 0 0; 0 0.5 0 0; 0 0 1 0];
        disp('Classical method selected');
elseif method==2
        order=6;
        b=[0.0777777778 0 0.355555556 0,13333333
        0.355555556 0.0777777778];
d=[0 .25 .25 .5 .75 1];
```

```
    c(1:4,:)=[0  0  0  0  0  0;  0.25  0  0  0  0  0;  0.125.
            0.125  0  0  0  0;  0  -0.5  1  0  0  0];
    c(5,:)=[.1875  0  0  0.5625  0  0];
    c(6,:)=[-4285714 0.2857143 1.714286 -1.714286
            1.1428571  0];
    disp('Butcher  method  selected');
else
            order=5;
            b=[1/6  0  0  2/3  1/6];  d=[0  1/3  1/3  1/2  1];
            c=[0  0  0  0  0;  1/3  0  0  0  0;  1/6  1/6  0  0  0;  1/8  0  3/8
            0  0;  1/2  0  -3/2  0];
    disp('Merson  method  selected')
end;
steps=(tspan(2)-tspan(1))/step+1;
    x=startval;  t=tspan(1);
    xvals=startval;  tvals=tspan(1);
    for  j=2:steps
    k(1)=step*feval(f,t,x);
    for  i=2:order
        k(i)=step*feval(f,t+step*d(i),x+c(i,1:i-1)*k(1:i-1)');
    end;
    x(1)=x+b*k';  t1=t+step;
    %  chọn giá trị cho đầu ra
    tvals=[tvals,  t1];  xvals=[xvals,  x1];
    t=t1;  x=x1;
end;
```

Có thể dùng phương pháp chọn thích nghi các bước tính. Khi hàm trơn, có thể chọn bước tính lớn. Khi trong miền có sự biến đổi nhanh của x, cần bước tính bé. Ngoài ra với các hàm mà cả hai miền biến đổi nhanh và chậm cùng tồn tại, tốt nhất là cũng dùng bước tính bé. Phương pháp tự thích nghi thay đổi bước tính là cần thiết. Phương pháp này không đề cập ở đây và có thể xem ở các phương pháp Runge – Kutta ở hàm MATLAB ode 23 và ode 45.

Ở hình 6.23 có sai số tương đối tương ứng với phương trình vi phân dx/dt = −x theo phương pháp cổ điển (dấu "o"), phương pháp Merson (dấu "+") và phương pháp Butcher (dấu "*") theo chương trình MATLAB sau :



Hình 6.23

```
Char=['o' '*' '+'] ;
For meth=1:3
   [t,z]=rkgen{'f502',[0 3],1,.25,meth);
   re=(z-exp(-t)./exp(-t);
   plot(t,re,char(meth));
   axis([ 0 3 0 1.5e-4])
   xlabel('t'); ylabel('relative error');
   hold on;
end;
hold off
```

Hàm f502 được định nghĩa như sau :

```
function xprime=f502(t,x)
xprime=-y;
```

Như vậy phương pháp Butcher là tốt nhất và cả hai phương pháp Butcher và Merson là tương đối chính xác hơn phương pháp cổ điển.

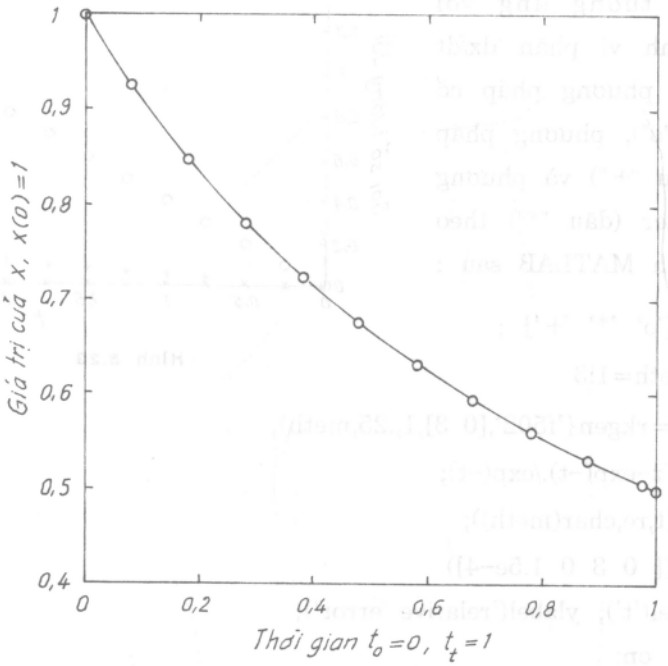
BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài tập 6-1 Giải phương trình vi phân sau :

$$\begin{cases} x' = -x^2 ; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Đáp án :

Sau khi mở M-file, tạo hàm xprim1 và lưu giữ, dùng ode 23 để giải, ta có đặc tính như hình ở 6.24.



Hình 6.24

Bài tập 6 – 2 Giải phương trình vi phân sau :

$$\begin{cases} x' = x^2 ; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Đáp án :

Như ở bài tập 6–1 nhưng ở hàm xprim2, chẳng hạn dấu đứng trước x^2 là dấu "+". Kết quả như ở hình 6.25.

Bài tập 6 –3 Giải phương trình vi phân :

$$\begin{cases} x' = x^2 ; \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

Đáp án :

Khác với bài tập 6–2, ở bài tập 6–3 điều kiện đầu x (0) = –1. Kết quả mô phỏng như ở hình 6.26.

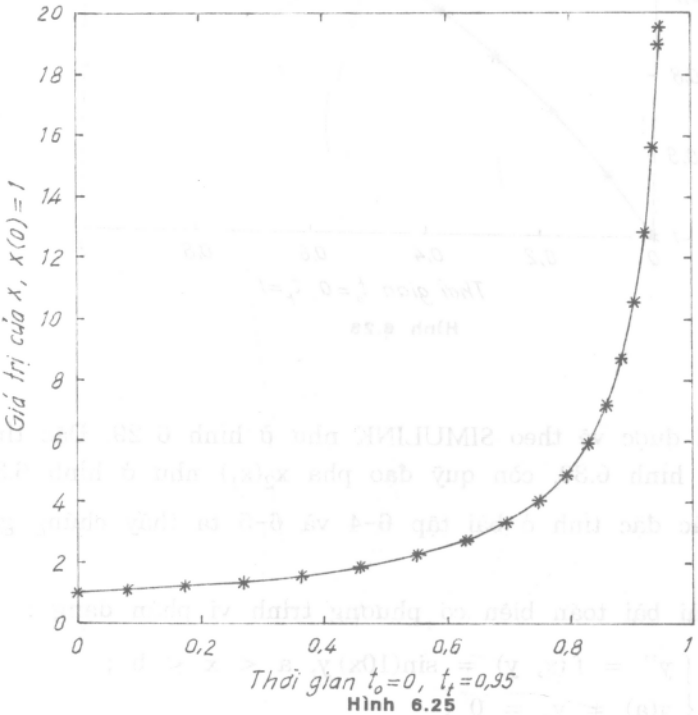
Bài tập 6 –4 Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - 0{,}1\, x_1x_2 + 0{,}01t \ ; \\ x'_2 = -x_2 + 0{,}02\ x_1x_2 + 0{,}04t \ ; \\ x_1(0) = 30 \ ; \\ x_2(0) = 20. \end{cases}$$

Đáp án :

Theo hệ phương trình đã cho, hàm xprim3.m được mô tả như sau :

```
function xprim =xprim3(t,x)
xprim(1)=x(1)-0.1*x(1)*x(2)+ 0.01*t;
xprim(2)=-x(2)+ 0.02*x(1)*x(2)+ 0.04*t;
```



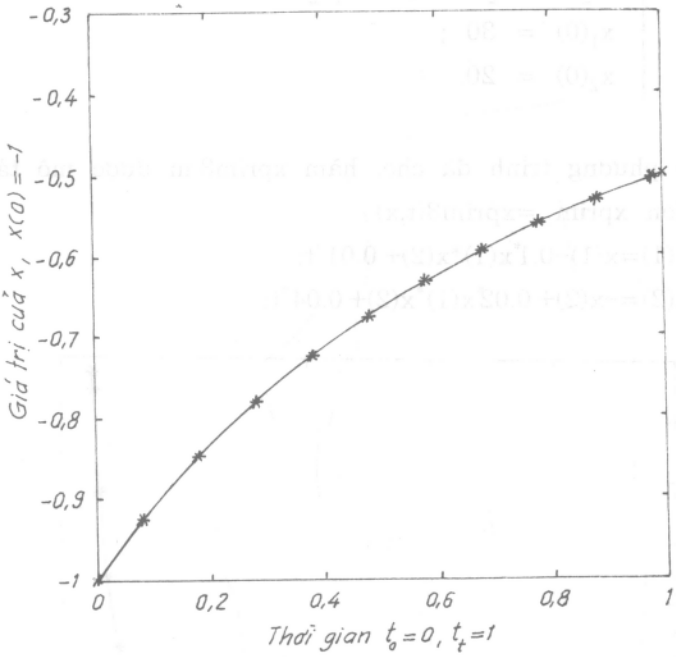
Hình 6.25

Ở hình 6.27 có các hàm $x_1(t)$ và $x_2(t)$ với điều kiện của bài toán. Trong trường hợp dùng quỹ đạo pha ta có lệnh vẽ như sau :

```
>> plot (X(: ,2), X(: ,1));
```

còn quỹ đạo pha như ở hình 6.28.

Bài tập 6–5 Với bài toán 6–4 dùng, SIMULINK để mô phỏng hệ thống và xác định $x_1(t)$, $x_2(t)$ với điều kiện trên, đồng thời vẽ quỹ đạo pha $x_2(x_1)$.



Hình 6.26

Đáp án :

Sơ đồ khối được vẽ theo SIMULINK như ở hình 6. 29. Đặc tính $x_1(t)$ và $x_2(t)$ như ở hình 6.30, còn quỹ đạo pha $x_2(x_1)$ như ở hình 6.31.

So sánh các đặc tính ở bài tập 6–4 và 6–5 ta thấy chúng gần như nhau.

Bài tập 6–6 Giải bài toán biên có phương trình vi phân dạng :

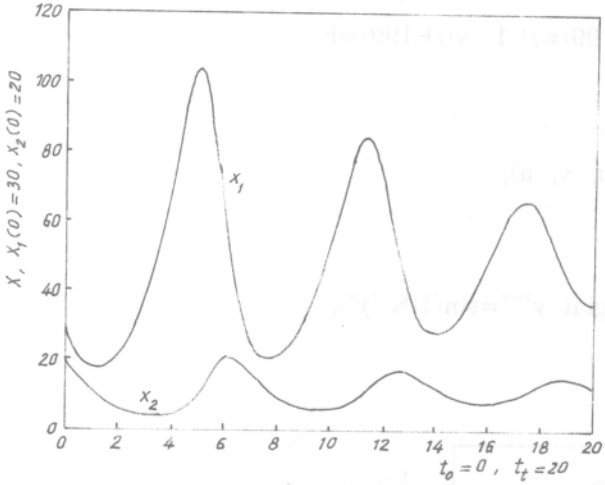
$$\begin{cases} y'' = f(x, y) = \sin(10x)\, y, \ a < x < b \ ; \\ y(a) = y_a = 0 \ ; \\ y(b) = y_b = 4. \end{cases}$$

Đáp án :

Xấp xỉ y'' bằng sai phân hữu hạn :

$$y'' = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}$$

với $$h = \frac{(b-a)}{N}.$$



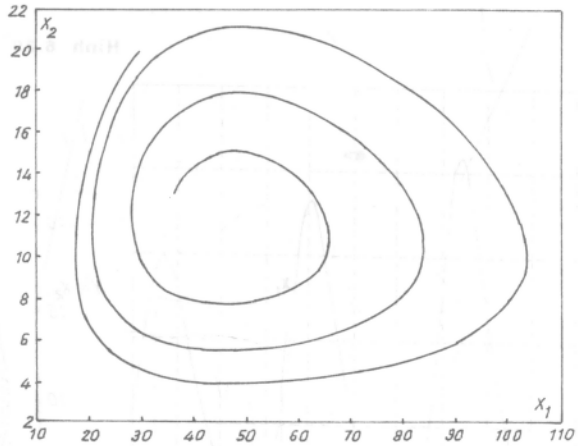
Hình 6.27

Từ đó rút ra :

$$\begin{bmatrix} -2-0{,}25^2\sin 2{,}5 & 1 & 0 \\ 1 & -2-0{,}25^2\sin 2{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & -2-0{,}25^2\sin 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

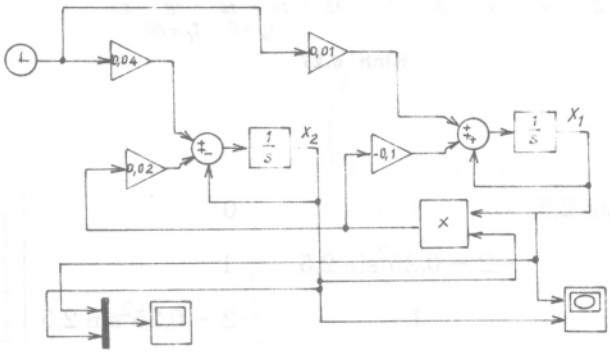
Với [a, b] = [0,1] và N = 100, ta có chương trình sau :

```
>> x=linspace(0,1);
>> h=1/100;
>> a^2=ones(1,2*99);
>> b=zeros(100, l);
>> b(100)=-4;
>> for i=1:100
     al(i)=-2-10*h*sin(10*x(i));
     u(i)=i;  v(i)=i;
  end;
>> for i=1:99
        u(i+100)=i;v(i+100)=i+1;
```

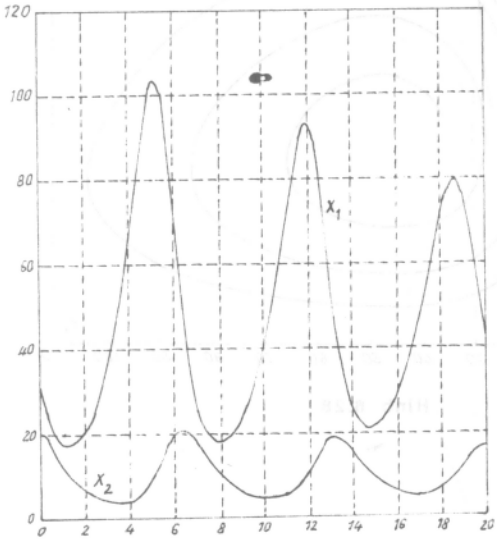


Hình 6.28

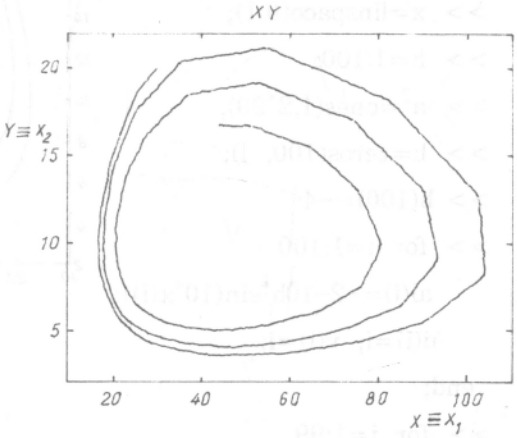
```
        u(i+199)=i+1;  v(i+199)=i;
    end;
>> a=[a1  a2];
>> A=sparse(u,  v,  a);
>> y=A\b;
>> plot(x,  y);
>> title('y(x)  giai  y''''=sin(10x)*y');
```



Hình 6.29



Hình 6.30

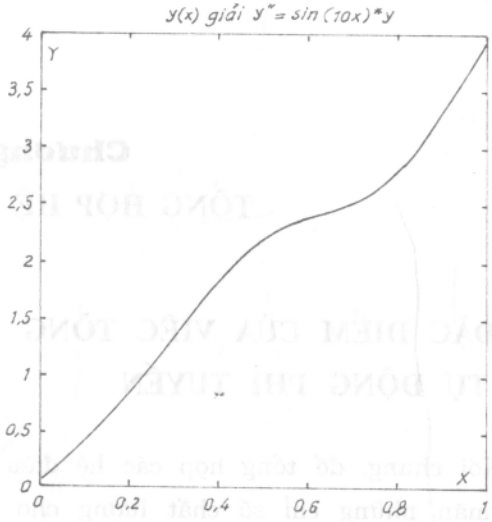


Hình 6.31

Chương trình nhằm tạo nên các ma trận A và vectơ b của phương trình : $A_y = b$. Vậy :

$$y = A\backslash b.$$

Hình 6.32 là đáp án của bài toán biên nói trên.



Hình 6.32

Bài tập 6-7 So sánh ode 23 và ode 45 về độ chính xác, dùng bài tập 6-3 với thời gian mô phỏng : $t_0 = 0$, $t_t = 5$.

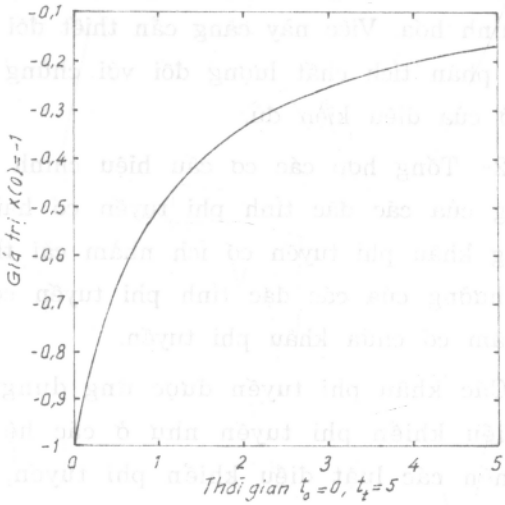
Đáp án :

Hàm xprim không có gì thay đổi, chỉ thay đổi đại lượng $t_t = 5$. Chương trình như sau :

```
>> [t,x]=ode23('xprim2',[0,5],-1);
>> plot(t,x); xlabel('thời gian t0=0, tt=5'); ylabel('gia tri x(0)=-1');
>> hold on;
>> [t, x]=ode45('xprim2',[0, 5],-1);
>> plot(t,x); xlabel('thoi gian t0=0, tt=5'); ylabel ('gia tri x(0)=-1');
>> hold off ;
```

Hai trường hợp dùng ode 23 và ode 45 như ở hình 6.33.

Theo hình 6.33, có sự khác nhau về độ chính xác nhưng sự khác nhau không lớn lắm ở bài toán này.



Hình 6.33

Chương 7
TỔNG HỢP HỆ PHI TUYẾN

7.1. ĐẶC ĐIỂM CỦA VIỆC TỔNG HỢP HỆ ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG PHI TUYẾN

Nói chung, để tổng hợp các hệ điều khiển tự động phi tuyến nhằm thỏa mãn những chỉ số chất lượng cho trước, có thể dùng các phương pháp sau :

1- Tổng hợp các khâu hiệu chỉnh ở phần tuyến tính của hệ nhằm thỏa mãn những chỉ tiêu chất lượng nào đó như chỉ số dao động M hay mức độ ổn định λ_0. Phương pháp này giống như phương pháp tổng hợp khâu hiệu chỉnh ở hệ tuyến tính (xem mục 6.2 [19]) nhưng có tính đến các đặc điểm mà phần tử phi tuyến đã tạo nên như đã nêu ở mục 6.2 và 6.3.

Sau khi đã chọn sơ đồ và thông số của khâu hiệu chỉnh, cần kiểm tra lại chất lượng của hệ bằng phương pháp trực tiếp như phương pháp mô hình hóa. Việc này càng cần thiết đối với hệ phi tuyến vì các phương pháp phân tích chất lượng đối với chúng chỉ là gần đúng hay dựa trên cơ sở của điều kiện đủ.

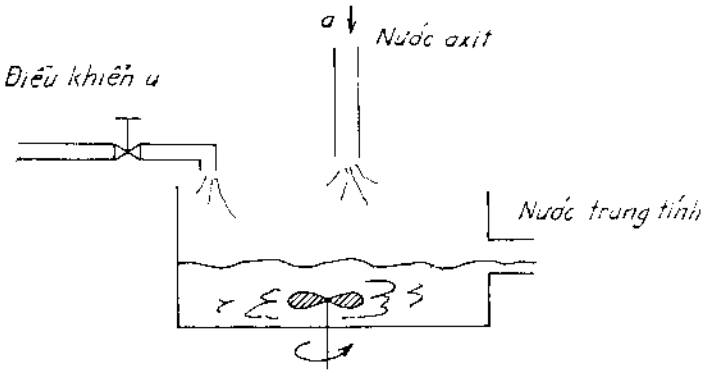
2- Tổng hợp các cơ cấu hiệu chỉnh phi tuyến nhằm làm giảm ảnh hưởng của các đặc tính phi tuyến có hại trong hệ thống hoặc đưa vào những khâu phi tuyến có ích nhằm cải thiện chất lượng của hệ. Bù trừ ảnh hưởng của các đặc tính phi tuyến có thể được thực hiện bằng hồi tiếp âm có chứa khâu phi tuyến.

Các khâu phi tuyến được ứng dụng rộng rãi trong việc tổng hợp hệ điều khiển phi tuyến như ở các hệ có cấu trúc biến đổi, ở việc tạo nên các luật điều khiển phi tuyến, nhất là ở các hệ điều khiển tối ưu [18].

7.2. PHƯƠNG PHÁP PHI TUYẾN NGHỊCH ĐẢO

Phương pháp đơn giản nhất để đưa đặc tính phi tuyến vào cơ cấu tổng hợp là phương pháp phi tuyến nghịch đảo. Ví dụ đối tượng có tín hiệu ra đo được bằng cơ cấu cảm biến quang học có đầu ra tỷ lệ với bình phương của tín hiệu được đo $y = x^2_1$ và trạng thái x_1 được hình thành ở phần tuyến tính của hệ. Một bộ điều chỉnh được thiết kế có độ chính xác cần thiết với giả thiết là biến đo được sẽ dao động trong phạm vi nhỏ (giả thiết x_1 không đổi dấu) bằng cách dùng phương pháp tuyến tính hóa. Đại lượng đặt của cơ cấu secvo đối với hệ thống sẽ gây cho người thiết kế những khó khăn do tính chất phi tuyến của nó. Một phương pháp hữu ích là tạo nên đặc tính phi tuyến ngay ở bộ điều khiển, nghĩa là điều khiển $\sqrt{y}$ thay cho y. Một trong những ưu việt của máy tính là có thể dễ dàng tạo được nhiều hàm khác nhau như hàm bậc hai ở trường hợp này.

Ví dụ 7-1 Quá trình trung tính hóa nước có axit từ một xí nghiệp chẳng hạn được mô phỏng như ở hình 7.1. Để trung tính hóa pH người ta trộn vào nước có axit dung dịch bazơ. Mô hình của ví dụ này là của Mc-Avoy, Hsu, Lowenthal (1972) cũng như Goodwin và Sim (1984).



Hình 7.1

Tín hiệu ra của hệ thống :

$$y \equiv [H^+] - [OH^-] \qquad (7\text{-}1)$$

là chênh lệch nồng độ ở trạng thái trung tính. Mục đích là điều khiển tín hiệu ra y với điểm đặt định mức $x_d = y = 0$ ở trạng thái xác lập. Đại lượng đo được là độ pH ≡ p. Mối quan hệ giữa đại lượng đo được p(t) và biến y mà ta cần điều khiển là :

$$y = 10^{-p} - 10^{p}K_w \qquad (7\text{-}2)$$

K_w là hệ số cân bằng của nước ($\approx 10^{-14}$g.ion/l).

Phương trình (7.2) có thể được rút ra từ mối quan hệ $[OH^-]\ [H^+] = K_w$ và $p = -\log[H^+]$. Ưu việt của điều khiển số là nhanh chóng biến lượng ra pH(p) thành biến điều khiển y ; đó là ứng dụng của phương pháp phi tuyến tính nghịch đảo.

Mô hình của quá trình được xác định là :

$$V.\dot{y} = F(a - y) - u(b + y). \qquad (7\text{-}3)$$

với V – dung tích của bình trộn [l]

F – tốc độ của dòng axit [l/sec],

a – nồng độ của axit [g.ion/l],

b – nồng độ của bazơ [g.ion/l],

u – tốc độ của dòng bazơ (biến điều khiển [l/sec].

Giả thiết là tất cả các thông số đều cố định và đã biết. Nhiệm vụ đầu tiên là xây dựng bộ điều chỉnh gián đoạn cho hệ (7–3). Trước khi nêu cấu trúc điều khiển, cần nghiên cứu mô hình và xác định những chất lượng cơ bản. Hệ (7–3) là tuyến tính kép, có tín hiệu ra nhân với tín hiệu vào :

$$V\dot{y} = Fa - Fy - ub - uy. \qquad (7\text{-}4)$$

Ở bước đầu tiên, tuyến tính hóa hệ thống quanh điểm làm việc định mức :

$$p_{dm} = 7.00 \text{ (trung tính)} \rightarrow y = 0,$$
$$\dot{y} = 0$$

Ta có thể tính tín hiệu vào (tín hiệu điều khiển) định mức hay ở trạng thái xác lập để $y = 0$ và $\dot{y} = 0$ (ở 7–3) rồi xác định u, $u = F\frac{a}{b}$.

Lấy đạo hàm riêng ở điểm làm việc ta có :

$$V\dot{y} = Fa - \left(F + F\frac{a}{b}\right) y - bu. \qquad (7\text{-}5)$$

Mô hình tuyến tính hóa này rất giản đơn, bậc một, với tín hiệu vào $F\frac{a}{b}$ và hệ số khuếch đại âm. Tính không xác định ở chênh lệch đầu vào có thể loại trừ bằng mạch thuận ở đầu vào sẽ dẫn đến sai lệch tĩnh của bộ điều chỉnh. Do đó cần đến bộ điều chỉnh tích phân. Chất lượng cơ

bản là thời gian quá độ của hệ thống sao cho kết thúc trong khoảng 200 sec chẳng hạn. Như vậy ta có thể chọn chu kỳ lượng tử hóa T = 10 sec. Để dễ đánh giá ta dùng các thông số cho ở bảng 7-1 :

Bảng 7-1

Thông số	Đại lượng	Đơn vị
a	0,001	mol/l
b	0,001	mol/l
F	0,100	l/sec
V	2,00	l
T	10.0	sec

Với các thông số ấy, ta có phương trình dạng gián đoạn của hệ trên :

$$y_{k+1} = 0{,}3679\ y_k - 0{,}00315\ u_k + 3{,}161 \cdot 10^{-5} d_k, \qquad (7\text{-}6)$$

mà d_k là nhiễu đầu vào với đại lượng định mức là một (1.0) có cùng đơn vị với Fa. Nếu dùng bộ điều chỉnh tích phân, ta thêm một bậc cho hệ với trạng thái mới w :

$$w_{k+1} = w_k + (x_d(k) - y(k))T \qquad (7\text{-}7)$$

Tín hiệu điều khiển được đưa vào quá trình của hệ kín để điều khiển. Mô hình của đối tượng hệ gián đoạn bây giờ là :

$$\begin{bmatrix} y_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3679 & 0 \\ -10{,}0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ w_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}00315 \\ 0 \end{bmatrix} u_k +$$

$$+ \begin{bmatrix} 3{,}161 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix} d_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} x_d(k)\ , \qquad (7\text{-}8)$$

theo đó có thể xác định luật điều khiển.

Cho rằng hệ thống đã được tuyến tính hóa, dùng phương pháp quỹ đạo nghiệm số để xác định hệ số hối tiếp K. Với thời gian quá độ $t_{qđ}$ = 200 sec, hệ số tắt dần khoảng ζ = 0,7, chọn nghiệm cực :

$$z_r = \begin{bmatrix} 0{,}93706 + 0{,}06034\,j \\ 0{,}93706 - 0{,}06034\,j \end{bmatrix}, \qquad (7\text{-}9)$$

dùng các mối quan hệ :

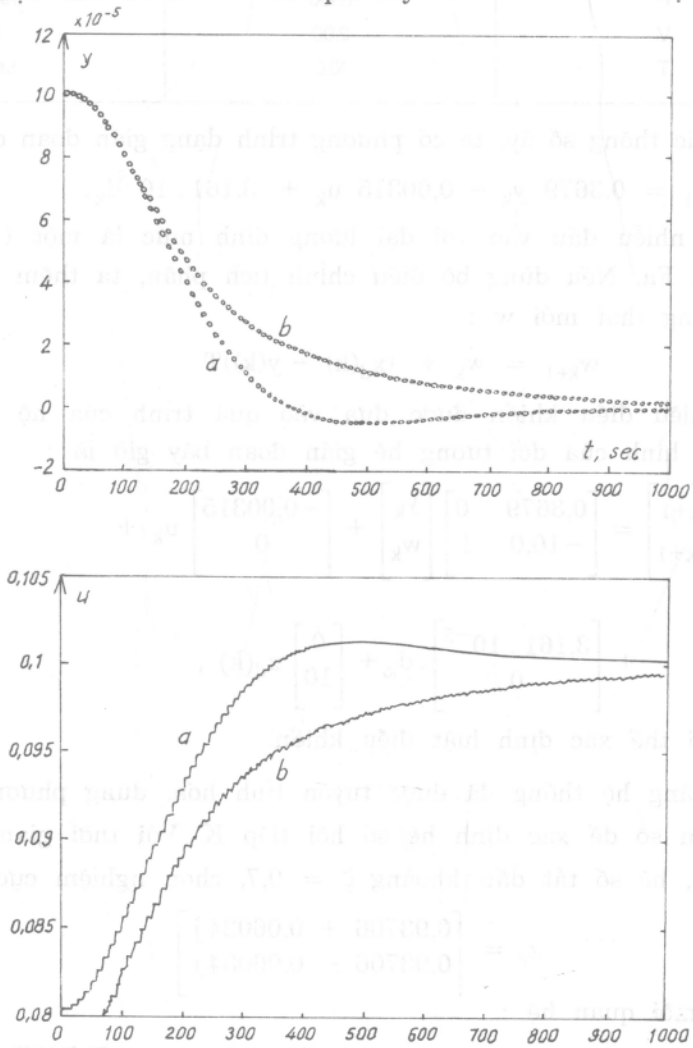
$$\omega_d \approx 1{,}8/t_{qđ}\ ;\ r = e^{-\omega_d T\zeta}\ ;\ \theta = \omega_d T\sqrt{1-\zeta^2}$$

mà z_r được xác định bởi $re^{\pm j\theta}$.

Dùng công thức Ackerman, hệ số phản hồi được xác định bằng :

$$K = \begin{bmatrix} 160,70 & 0,24133 \end{bmatrix}. \qquad (7-10)$$

Từ trạng thái cân bằng y = 0,0001 đáp ứng của bộ điều khiển tuyến tính với mô hình đối tượng tuyến tính hóa (đường *a*) cũng như đối tượng không tuyến tính (đường *b*) cho ở hình 7-2. Chú ý rằng đáp ứng bậc thang của hệ thực (mô hình đối tượng phi tuyến tính) có tốc độ chậm hơn. Ở ví dụ trên, phương pháp phi tuyến tính nghịch đảo được dùng để bù cho tính phi tuyến của cơ cấu đo thông qua (7 -2) đối với p để có tín hiệu ra y. Thực chất là đã bù tính phi tuyến ở đầu ra của dụng cụ đo.



Hình 7.2

Van điều khiển dòng bazơ là khâu phi tuyến có lưu lượng cực đại là 2 l/sec. Do đó :

$$u_k = \begin{cases} 0, & -Kx_k < 0 ; \\ -Kx_k, & 0 < -Kx_k < 2 ; \\ 2, & -Kx_k > 2. \end{cases} \qquad (7\text{-}11)$$

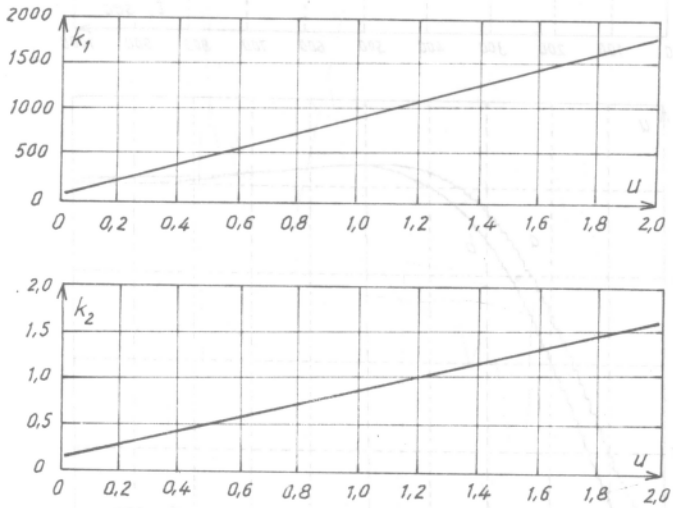
Bây giờ dùng phương pháp tuyến tính hóa để loại trừ tính phi tuyến của đối tượng. Có nhiều phương án, ở đây chỉ nêu một. Mô tả trạng thái của hệ có thể đưa về dạng :

$$V\dot{y} = -F(1 + u)y - ub + Fa$$

mà (1 + u) xem như hệ số biến đổi ở phương trình vi phân tuyến tính. Hệ có thể được gián đoạn hóa đối với những đại lượng u khác nhau ở hệ số ấy vì giữa các thời gian lấy mẫu u không đổi. Do đó có thể mô tả chính xác hành trạng của hệ từ thời gian lấy mẫu này đến thời gian lấy mẫu kế tiếp bằng cách dùng mô hình gián đoạn, nó là hàm của điều khiển được dùng. Phương pháp này là phương pháp hiệu chỉnh bậc một đối với đối tượng phi tuyến tính nên điều khiển có trễ được dùng đến và làm cho angôrit thực tế hơn. Thực chất điều khiển phi tuyến nghịch đảo làm cho ma trận :

$$\Phi_{hệ} = \Phi_{ol}(u) - \Gamma_u(u)\ K(u)$$

là hằng.

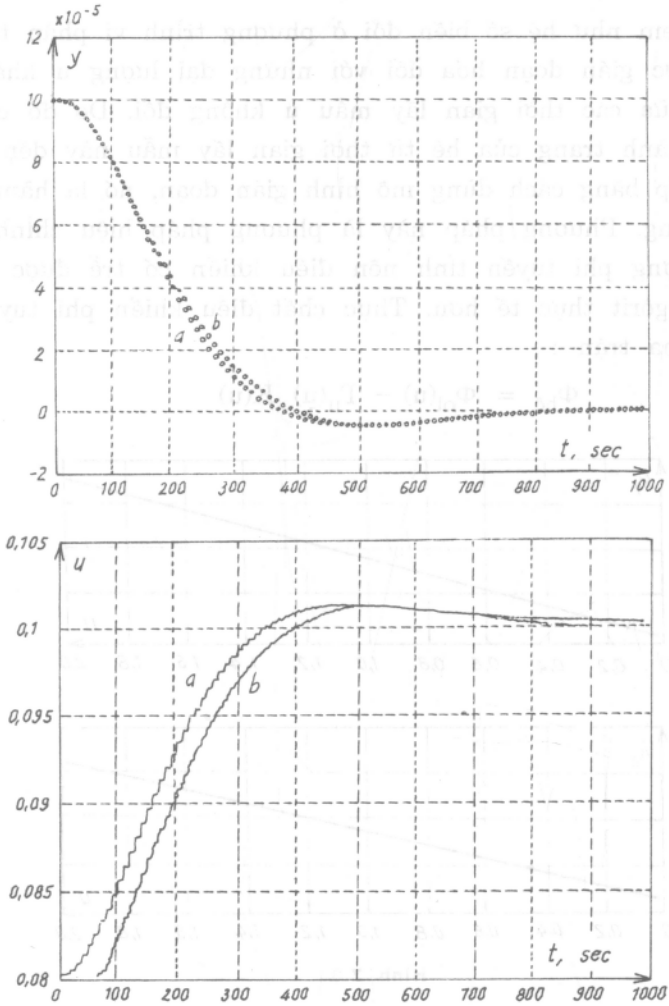


Hình 7.3

Khi tính phi tuyến của đối tượng làm cho $\Phi_{ol}(u)$ thay đổi cùng với u hệ số K(u) cũng thay đổi theo angôrít điều khiển phi tuyến tính và

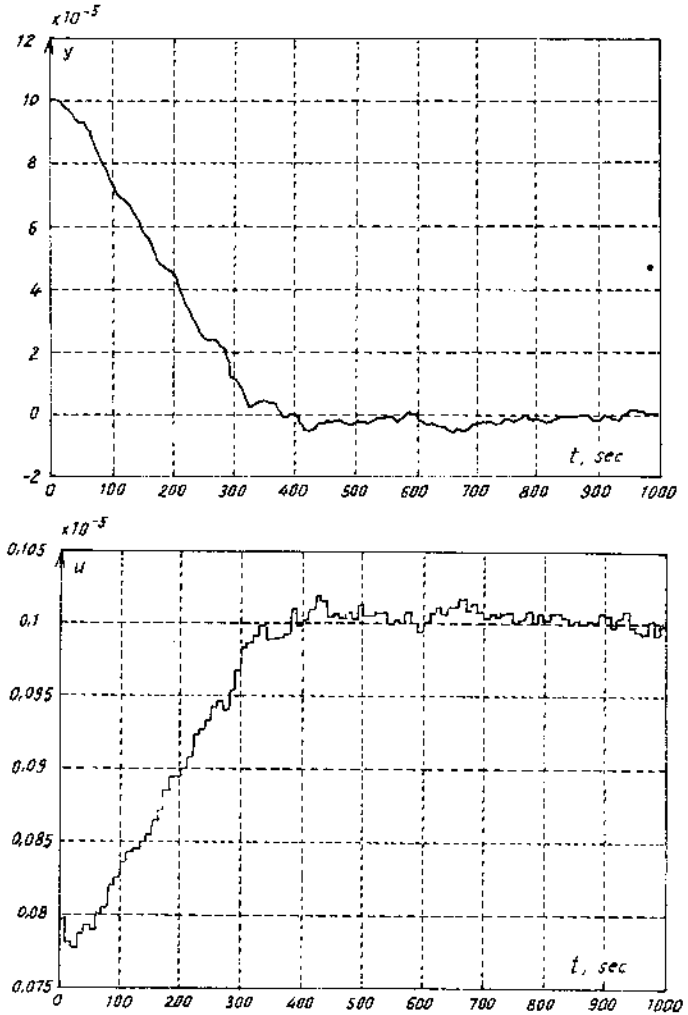
làm cho $\Phi_{hệ}$ không thay đổi. Phương pháp thực hiện tương đối giản đơn : Ma trận chuyển tiếp được tính toán cho các điểm [0, 2] của u, hệ số khuếch đại hồi tiếp được tính theo hình 7.3 và lưu giữ theo đó hệ số khuếch đại hiện tại là ngoại suy kết quả của quá trình vận hành.

Ở hình 7.4 có đặc tính của đáp ứng y cũng như điều khiển u cho trường hợp đối tượng là tuyến tính hóa, điều khiển tuyến tính (đường *a*) cũng như đối tượng là phi tuyến tính (đường *b*) điều khiển phi tuyến tính nghịch đảo. Điều khiển phi tuyến tính nghịch đảo cho kết quả gần với mục tiêu thiết kế hơn.



Hình 7.4

Ở hình 7.5 có các đặc tính y và u cho trường hợp có nhiễu tác động ở tín hiệu điều khiển đối tượng. Kết quả cho thấy bộ điều khiển phi tuyến nghịch đảo cho kết quả khá tốt – điều khiển u_{k-1} luôn là xấp xỉ tốt đối với u_k. Nếu đại lượng đo được y có nhiễu, dùng bộ ước lượng trạng thái để có mô hình gần với đối tượng thật hơn là mô hình tuyến tính. Cũng như trường hợp đối với điều khiển (không có trễ), hệ số ước lượng L (đại lượng vô hướng) là hàm của u cũng như làm cho ma trận chuyển tiếp là đại lượng hằng.



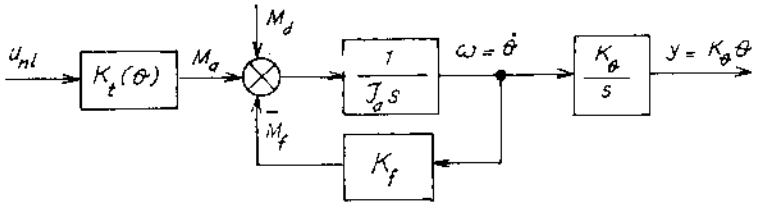
Hình 7.5

Do tính chất quan trọng của bộ điều khiển phi tuyến nghịch đảo, hãy xét một ví dụ khác có dùng phương pháp phi tuyến nghịch đảo ở bộ điều khiển và bộ ước lượng trạng thái. Dù ví dụ này không phải là người máy nhưng các nguyên lý ứng dụng cũng tương tự nhưng giản đơn.

Ví dụ 7-2 Ở hình 7.6 có sơ đồ khối của động cơ chấp hành có mômen truyền động bằng nguồn dòng, giả thiết rằng dòng bị giới hạn ở biên độ ra nhưng luôn là nguồn dòng (điện áp không bị bão hòa). Chú ý là điều khiển u_{nl} từ bộ chuyển đổi D/A và đưa đến mạch phần ứng của động cơ. Điều khiển u_{nl} là kết quả của angôrit phi tuyến tính của bộ điều khiển phi tuyến nghịch đảo, dòng ở mạch phần ứng tạo nên mômen $M_a = u_{nl}K_t(\theta)$ mà hệ số mômen $K_t(\theta)$ là :

$$K_t(\theta) = K_{tdm}(K_{t0} + K_{t1}\cos\theta) \qquad (7\text{-}11)$$

do mật độ từ trường qua các khe hở ở động cơ.

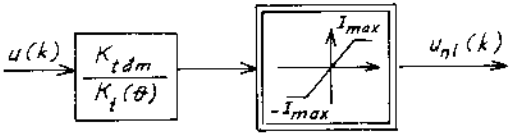


Hình 7.6

Bảng 7-2 cho thông số định mức của động cơ theo hình 7.6 còn $K_t(\theta)$ được định nghĩa theo (7-11). Thiết kế tuyến tính bắt đầu từ giả thiết :

$$K_t = K_{tdm}\,(K_{t0} + K_{t1}\cos\theta_{dm})$$

là hằng số ở lân cận góc vận hành định mức θ_{dm}. Theo bảng 7.2, hệ số mômen thay đổi 16% góc quay của động cơ, do đó dùng điều khiển phi tuyến nghịch đảo và dùng ước lượng là ưu việt.



Hình 7.7

Bước đầu tiên là loại

trừ sự biến đổi của mômen ở (7-11) và có sơ đồ khối như ở hình 7.7.

Bảng 7-2

Thông số	Đại lượng	Đơn vị
$\lvert\theta\rvert$	≤ 0.2	rad
$\lvert u_{nl}\rvert$	≤ 3.0	ampe
K_{to}	-7.00	-
K_{t1}	8,00	-
K_{tdm}	0,3	$N.m.ampe^{-1}$
J_a	0,00012	$N.m.ampe^{-1}$
K_θ	1000	$mrad.rad^{-1}$
K_f	0,001	N.sec

Chú ý rằng điều khiển có giới hạn $u \leq u_{max} = I_{max}$ là mô hình của khuyếch đại công suất. Như vậy điều khiển sẽ bão hòa sớm ở angorít điều khiển trước khi được đưa đến khuếch đại công suất thông qua DAC.

Điều khiển để tuyến tính hóa đối tượng có dạng :

$$u_{nl} = I_{max}\text{sat}\left(\frac{u\,K_{tdm}}{I_{max}\,K_t(\theta)}\right)$$

$$= I_{max}\text{sat}\left(\frac{u}{I_{max}\,\tilde{K}_t(\theta)}\right) \qquad (7\text{-}12)$$

với "sat" là ký hiệu cho trạng thái bão hòa, và $\tilde{K}_t(\theta) \equiv K_{t0} + K_{t1}\cos\theta$.

Điều khiển u được định nghĩa theo nghĩa thông thường của hồi tiếp trạng thái với tín hiệu điều khiển chuẩn ở đầu vào $u \equiv K(x_d\Gamma_{yr} - \hat{x})$.

Điều khiển phi tuyến u_{nl} được tính với thành phần biến đổi của $K_t(\theta)$, nghĩa là hệ số mômen định mức K_{tdm} vẫn có hiệu lực trong mạch.

Bằng cách dùng tính phi tuyến (vì nguồn dòng không bão hòa) cho đối tượng, tổ hợp sẽ có hành vi như đối tượng tuyến tính với tín hiệu vào u. Trước khi hình thành tín hiệu điều khiển u, hãy ước lượng các trạng thái không đo được.

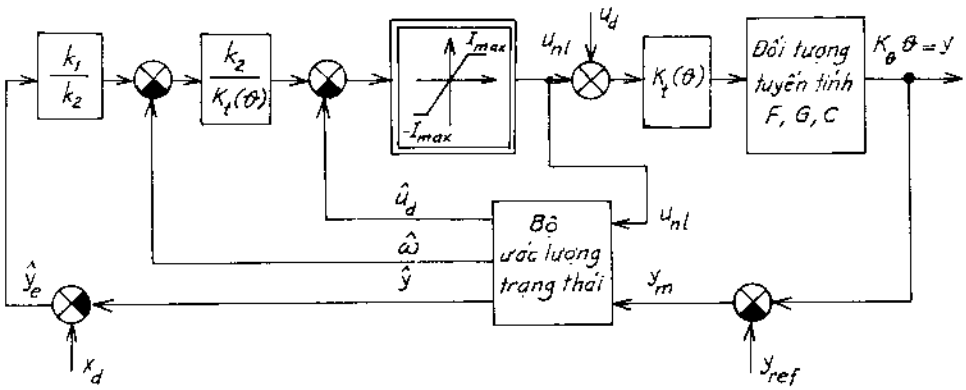
Tốc độ và nhiễu đầu vào M_d đều không đo được nên cần ước lượng. Vì chính u sẽ được dùng để bù hiệu ứng của nhiễu M_d, nên ta ước lượng độ chệch mômen và ký hiệu là u_d, gọi là nhiễu điều khiển. Cuối cùng

cần ước lượng y để loại trừ nhiễu ở tần số cao. Vậy trạng thái của ước lượng là :

$$x(k) \equiv \left[\hat{y}\ \hat{\omega}\ \hat{u}_d\right]^T .$$

Nếu nguồn dòng không bão hòa thì mô hình đối tượng là tuyến tính với tín hiệu vào là u (có hệ số mô men K_{tdm}). Khi nguồn dòng bão hòa, mô hình đối tượng sẽ chứa đựng sự biến đổi của hệ số mômen ước lượng $K_t(\hat{y}/K_\theta)$. Như vậy ở hình 7.8 có sơ đồ tổng quát với bộ ước lượng có tín hiệu vào u_{nl} và có hệ số biến đổi của mômen, mô hình đối tượng bậc hai, mô hình bộ ước lượng bậc ba. Tín hiệu vào u_d không điều khiển được, được mô hình hóa như một trạng thái ở bộ ước lượng sao cho hiệu ứng của tín hiệu vào được tính đến trong mô hình.

Vì u_d là không điều khiển được nên không đưa vào mô hình của đối tượng.



Hình 7.8

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K_\theta \\ 0 & -K_f/J_a \end{bmatrix} ; \qquad (7\text{-}13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & K_{tdm}/J_a \end{bmatrix}^T ; \qquad (7\text{-}14)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} , \qquad (7\text{-}15)$$

với trạng thái của đối tượng $[y\ \omega]^T$. Mô hình gián đoạn của đối tượng là :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0002 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad (7\text{-}16)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}00003 & 0{,}1726 \end{bmatrix}^T . \qquad (7\text{-}17)$$

với T = 0,0001 sec.

Đối với bộ ước lượng trạng thái với $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{y} & \hat{\omega} & \hat{u}_d \end{bmatrix}^T$ ta có :

$$F_e = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0002 & 0{,}00003 \\ 0 & 1 & 0{,}1726 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{bmatrix} ; \qquad (7\text{-}18)$$

$$G_e = \begin{bmatrix} 0{,}00003 & 0{,}1726 & 0 \end{bmatrix}^T ; \qquad (7\text{-}19)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (7\text{-}20)$$

Vì u_d là âm hay một hằng, hồi tiếp âm $\hat{u}_d$ hình thành khâu tích phân. Ở đây đầu ra khâu tích phân bão hòa ở phần mềm trước khi trở thành đầu vào của DAC.

Chú ý rằng những biểu thức sau là ở trạng thái xác lập :

$$M\left\{ y - \hat{y} \right\} = 0$$

ta đọc $M\{(\cdot)\}$ là "Kỳ vọng toán học của (.)"

$$M\{\hat{\omega}\} = 0 \text{ và } M\{u\} = -u_d .$$

Do đó $$M\left\{ k_1(x_d - y) - k_2\hat{\omega} \right\} = 0 ,$$

cho nên : $M\{x_d - y\} = 0$.

Vì $|u_d| < u_{max}$ nên sai số vị trí bị cưỡng bức tăng đến đại lượng bằng không bất kể là u_d như thế nào !

Dùng ước lượng hiện trạng (V.6.2 [20]) để cực tiểu hóa độ trễ điều khiển, ta có hệ phương trình sau :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= F_e\hat{x}_k + G_e u_k + L_c y_{k+1} - L_c C_e \bar{x}_{k+1} \\ &= F_e\hat{x}_k + G_e u_k + L_c y_{k+1} - L_c C_e F_e \hat{x}_k - L_c C_e G_e u_k \\ &= (F_e - L_c C_e F_e)\hat{x}_k + (G_e - L_c C_e G_e)u_k + L_c y_{k+1} \end{aligned}$$

Ký hiệu $\xi \equiv \hat{x}_k - L_c y$, $\Gamma_{yr} = C_e^T$, $M = (I - L_c C_e)$, và điều khiển : $u = K\left(\Gamma_{yr} x_d - \hat{x}\right)$. Có thể rút ra :

$$\xi_{k+1} = M(F_e - G_e K)\xi_k + M(F_e L_c C - G_e K L_c C)x_k + M G_e K \Gamma_{yr} x_d . \qquad (7\text{-}21)$$

đối với bộ ước lượng trạng thái và phương trình trạng thái của đối tượng là :

$$x_{k+1} = (F - GKL_cC)\,x_k - GK\xi + GK\Gamma_{yr}x_d(k). \qquad (7\text{-}22)$$

Định nghĩa $x_s^T \equiv \begin{bmatrix} x^T & \xi^T \end{bmatrix}$, hệ kín tổng thể bởi phương trình trạng thái :

$$x_s(k+1) = F_s x_s(k) + G_s x_d(k), \qquad (7\text{-}23)$$

và đầu ra của hệ :

$$y = C_s x_s\,, \qquad (7\text{-}24)$$

mà $C_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Như vậy hệ tổng thể là bậc năm còn ma trận của hệ là :

$$F_S = \begin{bmatrix} F - GKL_cC & -GK \\ M(F_eL_cC - G_eKL_cC) & M(F_e - GK) \end{bmatrix}, \qquad (7\text{-}25)$$

và

$$G_S = \begin{bmatrix} GK\Gamma_{yr} \\ MG_eK\Gamma_{yr} \end{bmatrix}. \qquad (7\text{-}26)$$

Nếu trừ tín hiệu ra đo được của hệ y với tín hiệu vào chuẩn của đối tượng y_{ref} :

$$y_m \equiv y - y_{ref}$$

tín hiệu vào ước lượng vị trí là y_m thay vì y. Tín hiệu vào chuẩn y_{ref} sẽ tác động vào phương trình trạng thái của hệ thông qua ma trận vào Γ_{yref} cộng vào biểu thức (7-23) một thành phần :

$$\Gamma_{yref}\, y_{ref} = \begin{bmatrix} GKL_c \\ M(G_eK - F_e)\,L_c \end{bmatrix} y_{ref}\,. \qquad (7\text{-}27)$$

Tính toán theo hàm phạt phi tuyến tính [trang 629 - tl 5] cho kết quả :

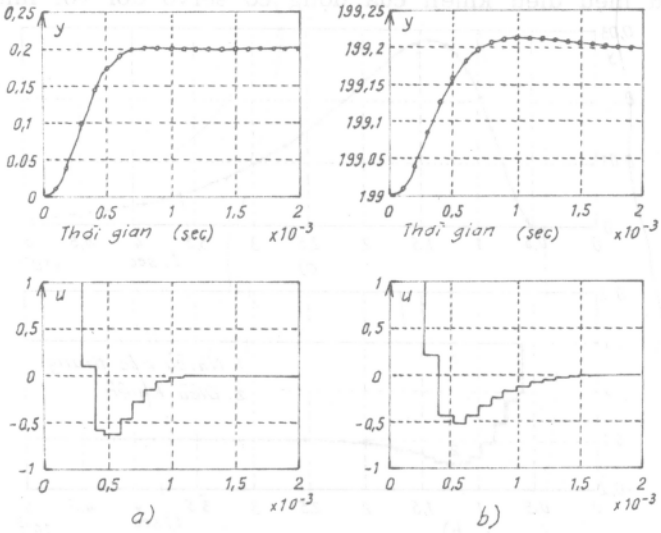
$$K = \begin{bmatrix} 11{,}80 & 3{,}23 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (7\text{-}28)$$

và

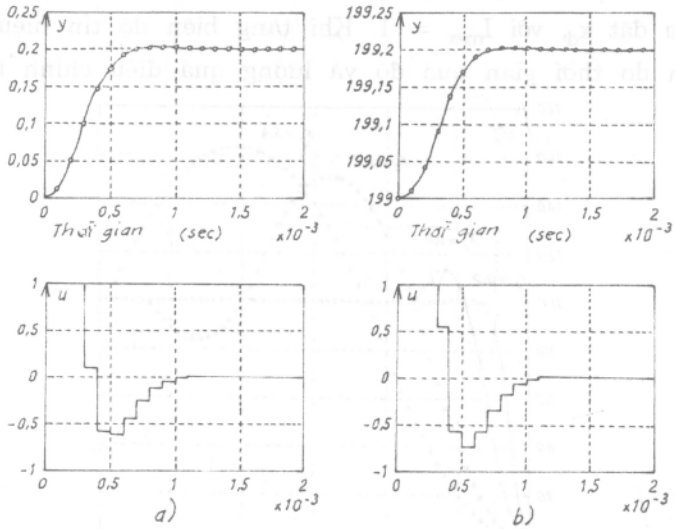
$$L = \begin{bmatrix} 0{,}728 & 1{,}848 & 0{,}493 \end{bmatrix}^T \qquad (7\text{-}29)$$

Ở hình 7.9 là chênh lệch bé của đáp ứng (với $u_d = 0$) gần $\theta = 0$ và $\theta = 0{,}20$ rad với bộ điều khiển tuyến tính, còn ở hình 7.10 có cùng điều kiện nhưng bộ điều khiển là phi tuyến tính nghịch đảo. Trường hợp (a) ứng với $x_d = 0$ và trường hợp (b) ứng với $x_d = 199$ ($I_{max} = 1$). Ở bộ

điều khiển tuyến tính, đáp ứng ở đầu ra của hệ có đặc tính với chất lượng kém hơn do hệ số mômem thay đổi theo góc quay, còn ở bộ điều khiển phi tuyến tính nghịch đảo thì tín hiệu ra không thay đổi, mặc dù hệ số mômem thay đổi. Dùng điều khiển phi tuyến nghịch đảo ở hình 7.10, đáp ứng của tín hiệu bậc thang ở hai mức độ khác nhau đều không khác nhau (so sánh trường hợp a và b).

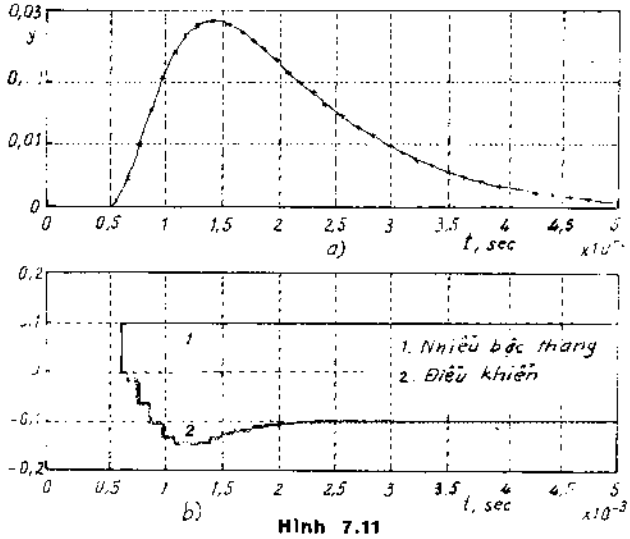


Hình 7.9



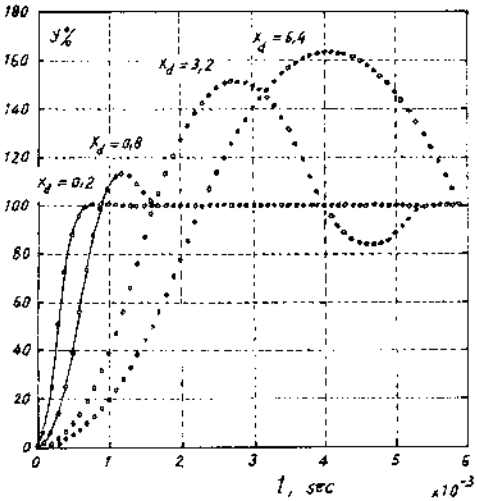
Hình 7.10

Để cải thiện ước lượng trạng thái, thiết kế phi tuyến nghịch đảo chỉnh định cho luật điều khiển, tính đến sự thay đổi của hệ số khuếch đại đối tượng do thay đổi hệ số mômem. Kết quả là đáp ứng chung sẽ không phụ thuộc vị trí trong miền thời gian và tất nhiên là hàm truyền của hệ kín sẽ không thay đổi. Độ chệch của nhiễu mômem có tồn tại cũng không gây nên sai lệch tĩnh như ở hình 7.11. Ở hình 7.11a có đáp ứng đầu ra, còn hình 7.11b là các tín hiệu nhiễu bậc thang, nhiễu ước lượng và tín hiệu điều khiển của động cơ servo đối với nhiễu bậc thang.

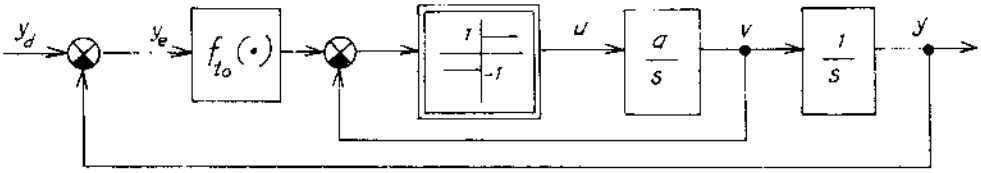


Hình 7.11

Ở hình 7.12 có đáp ứng của hệ (theo phần trăm thang đo) khi thay đổi tín hiệu đặt x_d, với I_{max} = 1. Khi tăng biên độ tín hiệu đặt thì chất lượng giảm do thời gian quá độ và lượng quá điều chỉnh tăng rõ rệt.



Hình 7.12



Hình 7.13

7.3. TỐI ƯU TÁC ĐỘNG NHANH

Ở hệ tối ưu [19] đã đề cập đến phương pháp tổng hợp hệ này dựa theo quỹ đạo pha của nó, ở đây sẽ khảo sát hệ tối ưu tác động nhanh theo một góc độ khác đối với các hệ dùng động cơ servo làm cơ cấu chấp hành, ví dụ như ở các tay máy, hoặc ở các máy vẽ.

Điều khiển tối ưu tác động nhanh gián đoạn khó thực hiện trong thực tế. Mở rộng của hệ tối ưu tác động nhanh liên tục sang các bộ điều khiển gián đoạn gần tối ưu được sử dụng trong công nghiệp. Trước tiên hãy nhắc lại cấu trúc của điều khiển tối ưu tác động nhanh đối với đối tượng gồm hai khâu tích phân.

7-3-1. HỆ TỐI ƯU TÁC ĐỘNG NHANH LIÊN TỤC

Ở hình 7.13 có sơ đồ của hệ tối ưu tác động nhanh với đối tượng là hai khâu tích phân được điều khiển bởi khối bão hòa hay khối giới hạn. Luật điều khiển tối ưu là hàm phi tuyến đối với khoảng cách và tốc độ. Ở hình 7.13, hàm phi tuyến được mô tả bởi $f_{t0}(\cdot)$. Phương trình mô tả hệ như sau :

$$\dot{y} = v \; ; \qquad (7-30)$$

$$\dot{v} = a \; \mathrm{sign}\,(f_{t0}(y_e) - v) \; ; \qquad (7-31)$$

$$f_{t0}(y_e) = \mathrm{sign}(y_e)(2a\,|\,y_e\,|)^{\frac{1}{2}} \; ; \qquad (7-32)$$

mà

$$y_e \equiv y_d - y. \qquad (7-33)$$

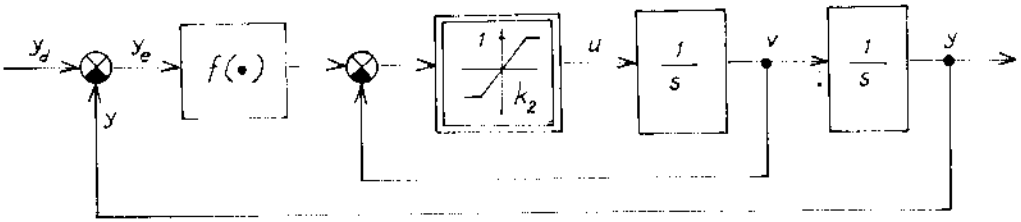
Dùng L là đại lượng sai lệch vị trí ở thời điểm đặt tín hiệu vào bậc thang $y_d(t_0)$:

$$L \equiv y_d(t_0) - y(t_0) = y_e(t_0). \qquad (7\text{-}34)$$

Luật điều khiển được cho bởi (7-31 đến 7-33) như ở hình 7.13. Nhiễu không đáng kể ở quá trình hay ở dụng cụ đo cũng làm cho điều khiển có dao động giữa đại lượng cực đại và cực tiểu. Sai lệch ở mô hình đối tượng cũng gây nên dao động có chu kỳ tới hạn (nhất là khi a không tính đúng).

Trong nhiều trường hợp điều khiển kiểu đóng mở, vùng chết hay từ trễ được dùng đến để giảm thiểu dao động.

7.3.2. HỆ XẤP XỈ TỐI ƯU TÁC ĐỘNG NHANH LIÊN TỤC



Hình 7.14

Hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh như ở hình 7.14. Hàm $f(\cdot)$ là xấp xỉ hữu hạn độ nghiêng của hàm $f_{10}(\cdot)$ ở phương trình (7-32). Hàm (7-31) được thay thế bằng hàm bão hòa cùng với trị số k_2 tạo nên xấp xỉ hữu hạn độ nghiêng. Phương trình của hệ như sau :

$$\dot{y} = v \; ; \qquad (7\text{-}35)$$

$$\dot{v} = a \; \mathrm{sat}k_2(f(y_e) - v). \qquad (7\text{-}36)$$

Hàm $f(\cdot)$ có dạng :

$$f(y_e) = \begin{cases} k_1/k_2(y_e) \; , & \text{với } |y_e| \leq y_1 \; ; \\ \mathrm{sign}(y_e)\left[\left(2a\alpha\,|y_e|\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1/k_2\right)\right] \; , & \text{với } |y_e| > y_1 . \end{cases} \qquad (7\text{-}37)$$

mà α là hệ số hiệu chỉnh gia tốc : $0 < \alpha < 1$.

Bằng cách hiệu chỉnh gia tốc từ a đến αa, cho phép tương thích tính bất định của hệ số gia tốc. Thực hiện (7-37) cho kết quả gần như hàm tối ưu tác động nhanh thực f_{10}, với một vùng đặc tính có độ nghiêng

hữu hạn tuyến tính qua gốc trục của mặt phẳng pha và hệ số hiệu chỉnh gia tốc α chỉnh định được. Nối các miền phi tuyến của f(·) sao cho f (·) và f' (·) vẫn là liên tục, ta có hạn chế liên hệ các hệ số khuếch đại k_1, k_2 với kích thước của miền tuyến tính y_l bởi :

$$k_2 = \left(\frac{2k_1}{\alpha a}\right)^{1/2}, \qquad (7-38)$$

$$y_l = \frac{1}{k_1}. \qquad (7-39)$$

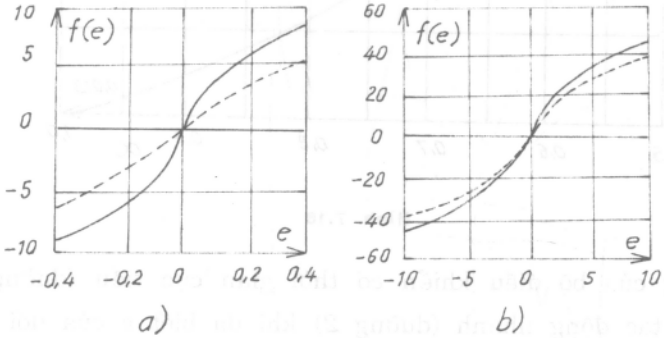
Ví dụ 7-3 Cho trước các thông số sau đối với hàm f(·) : $k_1 = 10$; $\alpha = 0{,}8$; $a = 100$.

Theo (7-38) xác định :

$$k_2 = \left(\frac{20.0}{80.0}\right)^{1/2} = 0{,}500.$$

Vùng tuyến tính được xác định bởi $y_e = 0.10$ và f(·) được xác định bởi :

$$f(y_e) = \begin{cases} 20.0\ y_e, & \text{với } |y_e| \leq 0.10 \\ \text{sign}(y_e)\left[\left(160.0)\,|y_e|\right)^{1/2} - 2.0\right], & \text{với } |y_e| > 0.10 \end{cases}$$



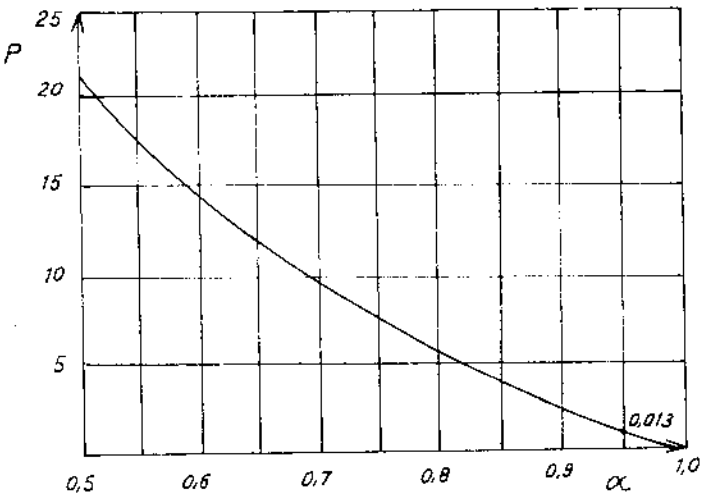
Hình 7.15

Hàm trên với hai miền trị số khác nhau của y(e) như ở hình 7.15. Đường nét đậm ứng với f_{10} còn đường đứt nét là hàm xấp xỉ. Bằng cách xấp xỉ thời gian xác định vị trí là thời gian để sai số về vị trí nằm trong miền tuyến tính, có thể xác định độ tăng theo phần trăm P của thời gian đáp ứng của hệ xấp xỉ tối ưu :

$$P \equiv 100\% \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \right) \right] . \qquad (7\text{-}40)$$

P không phụ thuộc vào biên độ tín hiệu vào (sai lệch vị trí L) nhưng sai lệch vị trí phải lớn hơn vùng tuyến tính y_l. Thực tế là vùng tuyến tính $y_l = \frac{1}{k_1}$ không phải được chọn tự do mà liên quan đến khoảng cách mà cơ cấu chấp hành trong thực tế chuyển động một cách tối ưu tác động nhanh với dải thông tần mong muốn. Mặc dầu những trị số hợp lý của α là $\alpha \in \left[0.65 \;\; 0.90 \right]$ nhưng sự phụ thuộc của P vào α như ở hình 7-16.

Từ hình vẽ thấy rằng hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh dùng f(.) xác định ở ví dụ 7-3 chuyển động chậm hơn hệ tối ưu tác động nhanh xấp xỉ 6%.



Hình 7.16

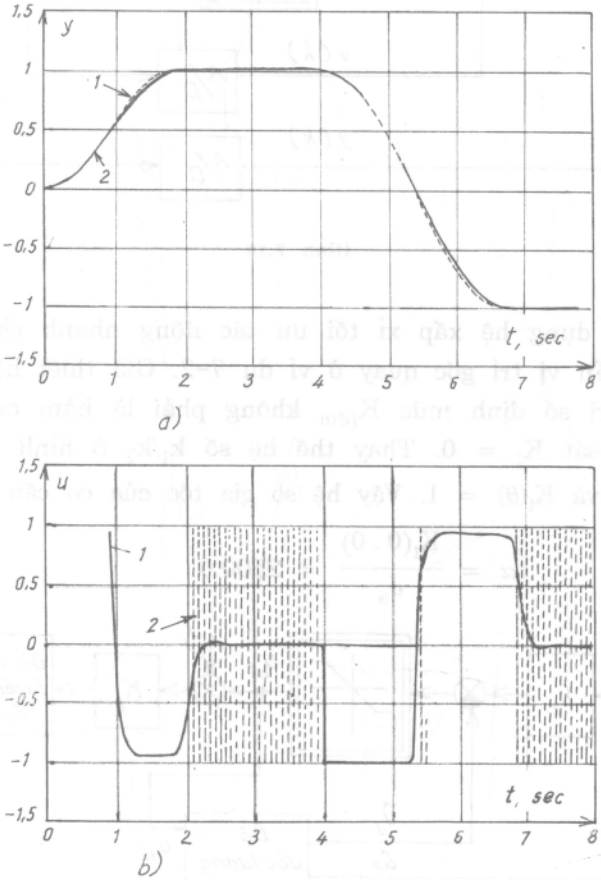
Mô phỏng của bộ điều khiển có thời gian cực tiểu (đường *1)* và hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh (đường 2) khi đã biết a của đối tượng như ở hình 7.17. Đối với trường hợp trên, hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh chậm hơn độ 1,3% nhưng hành trạng của hệ trong quá trình điều khiển tốt hơn. Cần nói thêm rằng hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh có tính bền vững tốt hơn khi có sự biến đổi nhỏ của a, khi có nhiễu đo lường, nhiễu tác động vào đối tượng.

7.3.3. HỆ XẤP XỈ TỐI ƯU TÁC ĐỘNG NHANH GIÁN ĐOẠN

Ở hình 7.18 là sơ đồ khối có bộ chuyển đổi khóa A/D hay bộ lấy mẫu và duy trì bậc không. Như ở hệ liên tục, trạng thái được chọn là vị trí và tốc độ. Giả thiết là độ trễ không đáng kể, ta có các phương trình sau :

$$x \equiv \begin{bmatrix} y & v \end{bmatrix}^T, \tag{7-41}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \alpha T^2/2 \\ \alpha T \end{bmatrix} u(k) . \tag{7-42}$$



Hình 7.17

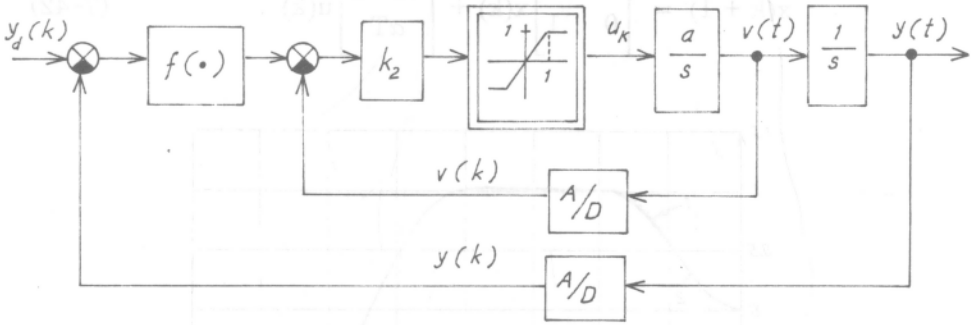
Luật điều khiển là gián đoạn lấy từ luật điều khiển hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh với một vài điều kiện khác của hàm f(·) :

$$u(k) = sat k_2\left[f\left(y_e(k)\right) - v(k)\right] . \qquad (7\text{-}43)$$

mà định nghĩa của y_e cũng là của trường hợp liên tục.

Lượng tử hóa ở các bộ chuyển đổi A/D và D/A xem như không đáng kể và đầu ra u(k) là đầu vào của đối tượng thông qua bộ chuyển đổi khóa D/A có cùng hàm trọng lượng với bộ duy trì bậc không.

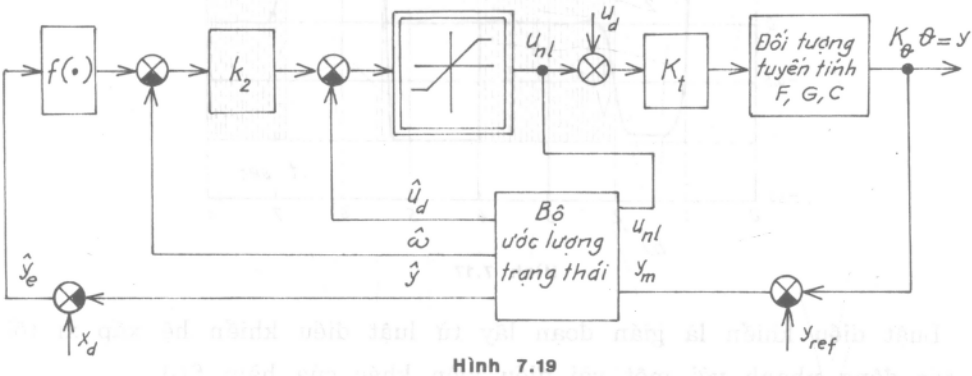
Hình 7.18 thể hiện hoàn toàn giống như hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh với hồi tiếp có bộ lấy mẫu và duy trì bậc không.



Hình 7.18

Ví dụ 7–4 Áp dụng hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh cho cơ cấu chấp hành điều khiển vị trí góc quay ở ví dụ 7–2. Giả thiết hệ số mômen K_t là hằng với trị số định mức K_{1dm} không phải là hàm của góc quay θ_1 và hệ số ma sát $K_f = 0$. Thay thế hệ số k_1/k_2 ở hình 7.8 bằng hàm phi tuyến $f(\cdot)$ và $K_t(\theta) = 1$. Vậy hệ số gia tốc của cơ cấu chấp hành là :

$$\alpha = \frac{K_t(0\,.\,0)}{J_a} = 2500.0$$



Hình 7.19

Độ dự trữ của điều khiển của trạng thái bão hòa được chọn bởi hệ số hiệu chỉnh gia tốc α bằng 0,84, vì trị số thấp nhất mà K_t bảo đảm là 16% nhỏ hơn định mức ở vị trí cuối cùng của θ. Như vậy, dùng k_2 từ điều kiện :

$$k_2 = \left(\frac{2k_1K_\theta}{\alpha\, a}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}9524k_1}\ . \qquad (7\text{-}44)$$

Biểu thức (7-44) cũng có thể được dùng như giới hạn tính toán theo hàm phạt phi tuyến [5] để có trị số tốt nhất k_1 và các hệ số ước lượng :

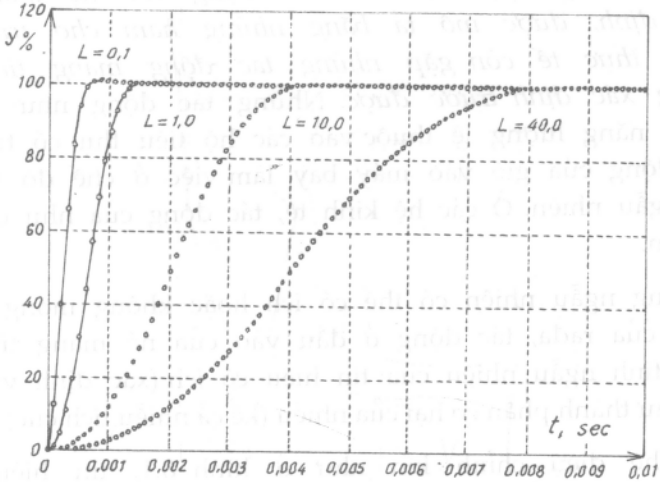
$$K = \begin{bmatrix} 11{,}80 & 3{,}3523 & 1 \end{bmatrix} ;$$

và $$L = \begin{bmatrix} 0{,}7280 & 1{,}848 & 0{,}4933 \end{bmatrix}^T .$$

Hàm điều khiển tốc độ bằng :

$$f(y_e) = \begin{cases} 3{,}520\,(y_e), \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{với } |y_e| \leq 0{,}0847 ; \\ \text{sign}(y_e)\left[\left(4\,.\,2\,|y_e|\right)^{\frac{1}{2}} - 0{,}2983\right], & \text{với } |y_e| > 0{,}847 \end{cases} \qquad (7\text{-}45)$$

được dùng ở hình 7.19.



Hình 7.20

Ở hình 7.20 có đáp ứng của hệ xấp xỉ tối ưu tác động nhanh với những đại lượng khác nhau của L : Nếu so sánh với điều khiển tuyến tính như ở hình 7.12 thì điều khiển phi tuyến tính cho chất lượng tốt hơn : điều khiển gần cực tiểu.

Phần B
HỆ NGẪU NHIÊN

Chương 8

KHÁI NIỆM CHUNG

8-1 TÍNH CHẤT CHUNG CỦA TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN TRONG CÁC HỆ ĐIỀU KHIỂN

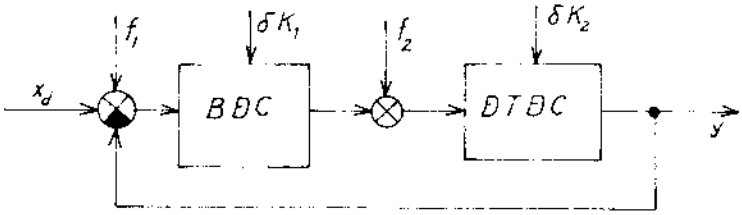
Cho đến nay, mọi tín hiệu tác động vào hệ thống đều được xem là *tiền định, được mô tả bằng những hàm cho trước theo thời gian. Trong thực tế còn gặp những tác động mang tính chất ngẫu nhiên không xác định trước được.* Những tác động như vậy như phụ tải ở các hệ năng lượng lệ thuộc vào các hộ tiêu thụ có tính chất ngẫu nhiên. Tác động của gió vào máy bay làm việc ở chế độ tự động cũng mang tính ngẫu nhiên. Ở các hệ kinh tế, tác động của nhu cầu thị trường là ngẫu nhiên.

Tác động ngẫu nhiên có thể có ích hoặc không mong muốn. Ở các hệ tuỳ động của rađa, tác động ở đầu vào của nó mang tính chất ngẫu nhiên là do tính ngẫu nhiên của tín hiệu có ích (xác định vị trí của mục tiêu) cũng như thành phần có hại của nhiễu (kể cả nhiễu tích cực).

Trong hệ điều chỉnh kín như ở hình 8.1, tín hiệu nhiễu f_1, f_2 cũng như sự thay đổi thông số của bộ điều chỉnh (BĐC) δK_1 và của đối tượng điều chỉnh (ĐTĐC) δK_2 đều là đại lượng ngẫu nhiên không thể mô tả bằng các hàm **xác** định theo t.

Để khảo sát các hệ có nhiễu ngẫu nhiên tác động, về nguyên tắc có thể dựa vào chênh lệch của đại lượng được điều chỉnh so với trị số đã cho trong trường hợp xấu nhất, nghĩa là trong trường hợp nhiễu cực đại.

Tuy nhiên xác suất xuất hiện nhiễu cực đại không lớn nên như vậy là ta đã đặt ra những điều kiện quá khắc nghiệt hơn thực tế. Cho nên những phương pháp tính đến bản chất có tính thống kê của nhiễu đặc trưng cho hành trạng trung bình của hệ khi có nhiễu tác động là phương pháp dẫn đến kết quả tốt nhất và dễ thực hiện nhất.



Hình 8.1

Quá trình ngẫu nhiên là quá trình có dạng cụ thể nhưng không xác định trước được. Để khảo sát hệ khi có tác động ngẫu nhiên, người ta khảo sát một tập hợp được ghi lại của mỗi tác động dưới dạng hàm của thời gian trong thời khoảng 2T gọi là *tập hợp các thực hiện* của tác động ngẫu nhiên. Tập hợp của các thực hiện ấy mô tả quan hệ trung bình có tính thống kê nào đó đặc trưng cho một hàm ngẫu nhiên mà bản thân mối quan hệ lại là những mối quan hệ không ngẫu nhiên.

Có hai phương pháp mô tả các tín hiệu ngẫu nhiên :

1- Phương pháp lấy *trung bình theo tập hợp* cơ sở trên việc khảo sát đồng thời sự phân bố khác nhau của các đại lượng ngẫu nhiên trong những khoảng thời gian nhất định. Trong trường hợp này tập hợp của các quá trình được đặc trưng bởi đại lượng trung bình theo tập hợp có thể là những hàm theo thời gian.

2- Phương pháp lấy *trung bình theo thời gian* cơ sở trên việc xác định những dạng khác nhau của các đại lượng thống kê trung bình, để có được ước lượng của các hàm tương quan và mật độ phân bố của quá trình theo một thực hiện trong một thời gian tương đối dài. Đối với hệ tuyến tính, các phương pháp lấy trung bình theo thời gian thường được dùng hơn, còn ở hệ phi tuyến thì phổ cập các phương pháp lấy trung bình theo tập hợp.

Việc phát triển các phương pháp xác suất và thống kê cũng như ứng dụng của chúng vào lý thuyết điều khiển được thể hiện ở các công trình

của Kolmagorov A. N., Pugatchev B. V., Solodovnicov v.v., Kazakov I. E. v.v... ở Liên Xô cũ, Winer N. ở Mỹ, Pelegrena A. M. ở Pháp v.v...

Để giản đơn, ta ký hiệu một quá trình ngẫu nhiên cũng như thực hiện của quá trình ấy là x(t). *Xác suất* để hàm x(t) nhận được ở thời điểm cố định t_1 những giá trị nằm trong khoảng (x, x + dx) phụ thuộc vào giá trị của x, thời điểm đã cho t_1 và tỷ lệ với dx bằng :

$$p_1(x, t_1)dx .$$

Xác suất để hàm x(t) nhận được ở thời điểm t_1 những giá trị nằm trong khoảng $(x_1, x_1 + dx_1)$, còn ở thời điểm t_2 những giá trị nằm trong khoảng $(x_2, x_2 + dx_2)$ phụ thuộc ở các giá trị x_1 và x_2, các thời điểm t_1, t_2 và tỷ lệ với dx_1, dx_2 bằng :

$$p_2(x_1, t_1 ; x_2, t_2)dx_1dx_2.$$

Các hàm $p_1(x, t_1)$, $p_2(x_1, t_1 ; x_2, t_2)$ là mật độ phân bố đơn và kép của quá trình ngẫu nhiên x(t). Bằng cách tương tự như thế có thể xác định mật độ phân bố bậc cao hơn. Bậc càng cao cho phép khảo sát quá trình ngẫu nhiên càng chi tiết hơn. Tuy nhiên trong thực tế chỉ giới hạn ở mật độ phân bố bậc một và hai vì mật độ phân bố xác suất bậc cao hơn phụ thuộc vào hai dạng mật độ phân bố cơ bản này.

Nếu mật độ phân bố xác suất không phụ thuộc vào việc chọn thời điểm t_1 thì quá trình ngẫu nhiên như vậy là *quá trình ngẫu nhiên dừng*. Quá trình ngẫu nhiên dừng có tính chất là đặc tính của nó không phụ thuộc vào việc chọn gốc tọa độ hay thời điểm quan sát. Với quá trình ngẫu nhiên dừng, xác suất để x nằm trong khoảng (x, x + dx) bằng :

$$p_1(x)dx,$$

Còn xác suất mà hai trị số của x nằm trong khoảng $(x_1, x_1 + dx_1)$ và $(x_2, x_2 + dx_2)$ bằng :

$$p_2(x_1, x_2, \tau)dx_1dx_2, \ \tau = t_1 - t_2.$$

Quá trình mà trung bình theo thời gian và trung bình theo tập hợp như nhau gọi là *quá trình écgôđíc*.

Mặc dù trong thực tế các quá trình ngẫu nhiên đều không dừng nhưng khi khảo sát các hệ điều khiển, để giản đơn, giả thiết rằng trong thời gian khảo sát, đặc tính thống kê của tín hiệu không thay đổi và xem như quá trình ngẫu nhiên là dừng.

Về cơ bản ta quan tâm đến các quá trình cưỡng bức, chính xác hơn là quá trình xác lập do các tác dụng ngẫu nhiên dừng gây nên. Các quá trình xác lập này cũng là quá trình ngẫu nhiên nhưng nói chung còn có những đặc tính thống kê khác.

Các phương pháp mô tả hàm ngẫu nhiên theo thời gian đều có đề cập đến ở chương trình toán học. Quá trình ngẫu nhiên và các đặc tính thống kê của tín hiệu ngẫu nhiên và phương pháp nhận dạng chúng có đề cập ở [15, 18]. Ở đây chỉ giới hạn ở việc khảo sát các phương pháp toán học khác nhau để mô tả những tín hiệu đặc trưng mang tính chất ngẫu nhiên.

Đặc trưng cho tín hiệu x, ta dùng các hàm sau : mật độ phân bố đơn $p_1(x)$, hàm tương quan theo tập hợp $K_x(\tau)$ hay theo thời gian $R_x(\tau)$ và mật độ phổ $S_x(\omega)$

8.2. VÍ DỤ VỀ TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN VÀ ĐẶC TÍNH THỐNG KÊ CỦA CHÚNG

8.2.1. TÍN HIỆU HÌNH SIN VỚI PHA NGẪU NHIÊN

$$x = X_m \sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{8-1}$$

mà pha α của tín hiệu có phân bố đều :

$$p_1(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{với } 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \\ 0 & \text{với } \alpha > 2\pi. \end{cases} \tag{8-2}$$

Theo đồ thị ở hình 8-2a, xác suất để x nằm trong khoảng dx là :

$$p_1(x)dx = \frac{d\omega_0 t}{\pi} \cdot \tag{8-3}$$

Từ (8-1) ta có :

$$\omega_0 t = \arcsin\left(\frac{x}{X_m}\right) - \alpha_0 . \tag{8-4}$$

Sau khi lấy tích phân (8-4) và đưa vào (8-3), ta có mật độ phân bố theo x :

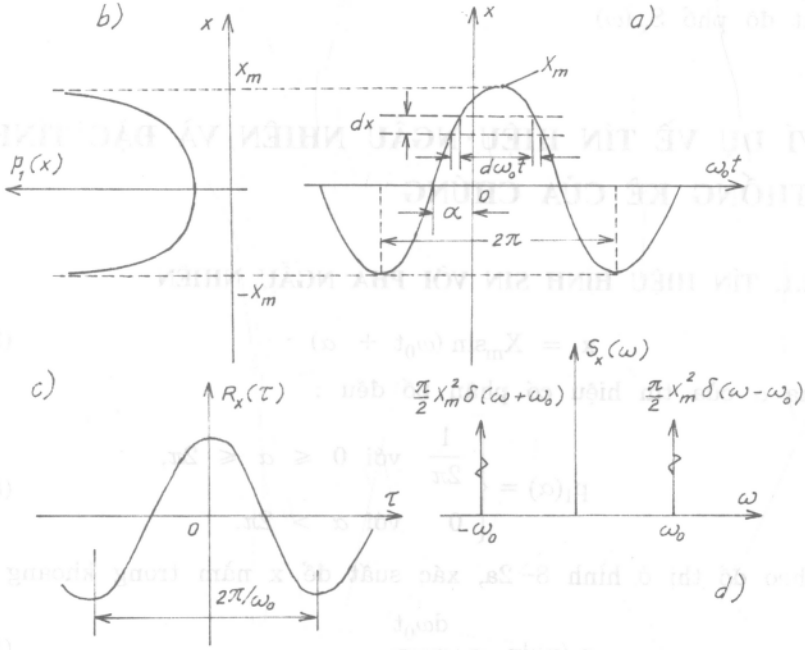
$$p_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{X_m^2 - x^2}} \cdot \tag{8-5}$$

Hàm tương quan theo thời gian được xác định theo tích phân :

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_m^2 \sin\left(\omega_0 t + \alpha\right) \sin\left[\omega_0(t+\tau) + \alpha\right] dt =$$

$$= \frac{X_m^2}{2}\cos\omega_0\tau \,. \qquad (8\text{-}6)$$

$R_x(\tau)$ không phụ thuộc đại lượng ngẫu nhiên α nên trung bình theo tập hợp của nó không thay đổi. Hàm tương quan theo tập hợp $K_x(\tau)$ đối với phân bố α đã cho trùng hợp với hàm tương quan theo thời gian $R_x(\tau)$, cho nên tín hiệu dừng được khảo sát nói trên là écgôđíc.



Hình 8.2

Để xác định mật độ phân bố, ta tìm biến đổi Fourier của $R_x(\tau)$:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_m^2}{2}\cos\omega_0\tau\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{X_m^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-j(\omega+\omega_0)\tau} + e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}\right] d\tau \qquad (8\text{-}7)$$

vì $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\pi\delta(\omega)$ nên (8- 7) có dạng :

$$S_x(\omega) = \left(\frac{\pi X_m^2}{2}\right)\left[\delta(\omega + \omega_o) + \delta(\omega - \omega_o)\right] \qquad (8\text{-}8)$$

Đồ thị $p_1(x)$, $R_x(\tau)$ và $S_x(\omega)$ như ở hình 8.2b, c, d tương ứng.

8.2.2. XUNG CHỮ NHẬT VỚI ĐỘ RỘNG T_0 CÓ THỜI ĐIỂM NGẪU NHIÊN t_0

Xung $$x = a\left[1(t - t_0) - 1(t - T_0 - t_0)\right] \qquad (8\text{-}9)$$

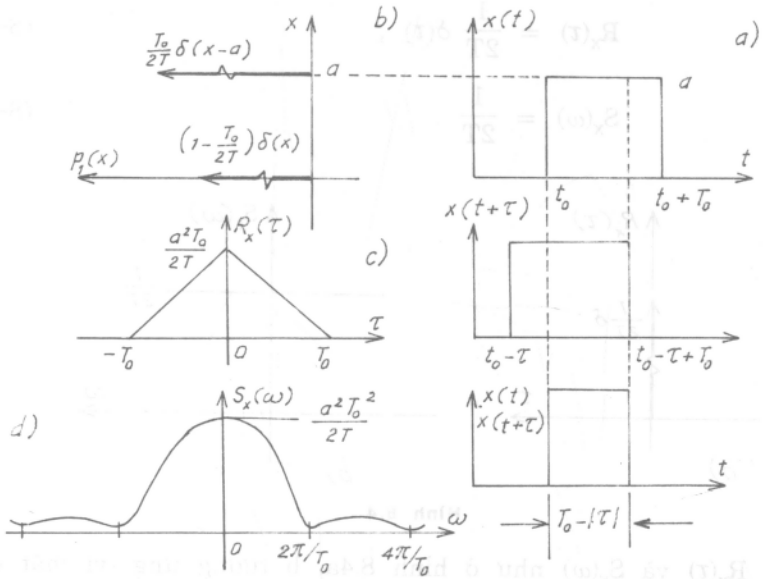
có luật phân bố đều với thời điểm t_0 trong khoảng $-T < t < T - T_0$, nghĩa là :

$$p_1(t_0) = 1/(2T - T_0). \qquad (8\text{-}10)$$

Mật độ phân bố $p_1(x)$ chỉ khác 0 ở hai điểm với $x = 0$ và $x = a$:

$$p_1(x) = \left(1 - \frac{T_0}{2T}\right)\delta(x) + \frac{T_0}{2T}\delta(x - a) . \qquad (8\text{-}11)$$

như ở hình 8.3b với $T_0 << T$, xác suất của $x \neq 0$ và $x = a$ là một đại lượng rất bé $T_0/2T$ sẽ tiến đến bằng 0 khi $T \to \infty$.



Hình 8.3

Để xác định hàm tương quan dùng phương pháp lấy trung bình theo thời gian trong khoảng từ $-T$ đến $+T$ của tích $x(t)\,x(t+\tau)$ như ở hình 8.3a. Tích này chỉ khác 0 khi $|\tau| < T_0$.

$$R_x(\tau) = \frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\,dt = \frac{a^2}{2T}\begin{cases} T_0 - |\tau| & \text{khi } |\tau| < T_0 \\ 0 & \text{khi } |\tau| > T_0 \end{cases} \qquad (8\text{-}12)$$

Biến đổi thành Fourier của (8-12) :

$$S_x(\omega) = \frac{a^2T_0^2}{2T}\left(\sin\frac{\omega T_0}{2} \Big/ \frac{\omega T_0}{2}\right)^2. \qquad (8\text{-}13)$$

Từ các biểu thức (8-11), (8-12) và (8-13) thấy rằng, đại lượng ngẫu nhiên t_0 không có ở đây, như vậy các hàm $p_1(x)$, $R_x(\tau)$ và $S_x(\omega)$ là các hàm không ngẫu nhiên của tín hiệu ngẫu nhiên.

8.2.3. XUNG LÝ TƯỞNG

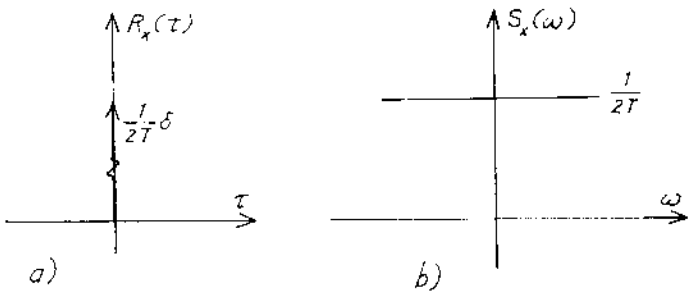
Trong trường hợp trên, nếu $a = \frac{1}{T_0}$ khi $T_0 \to 0$, ta có xung đơn vị tác động vào thời điểm ngẫu nhiên t_0 :

$$x = \delta(t - t_0) \qquad (8\text{-}14)$$

Khi $T_0 \to 0$, từ (8-12) và (8-13) ta có :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2T}\,\delta(\tau)\ , \qquad (8\text{-}15)$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2T}\ . \qquad (8\text{-}16)$$

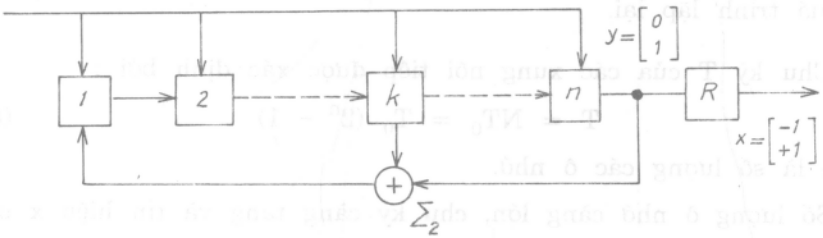


Hình 8.4

Đồ thị $R_x(\tau)$ và $S_x(\omega)$ như ở hình 8.4a, b tương ứng, vì mật độ phổ không phụ thuộc tần số nên tín hiệu như vậy tương ứng với *ồn trắng* mà năng lượng được phân bố đều cho mọi tần số.

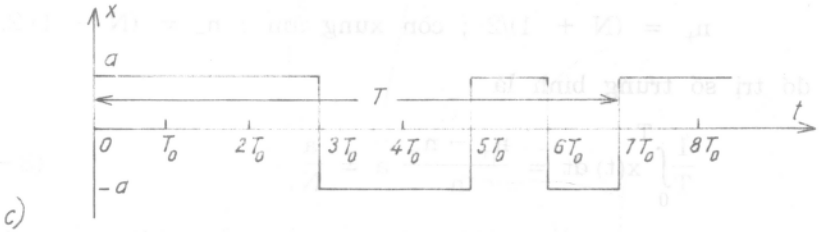
8.2.4. ỒN TRẮNG LƯỠNG TRỊ NGẪU NHIÊN GIẢ

Tín hiệu ồn trắng thường dùng trong nghiên cứu hệ ngẫu nhiên. Việc tạo nên nguồn tín hiệu như vậy có nhiều hạn chế. Nguồn tín hiệu tiền định lưỡng trị được thực hiện đơn giản nhưng về tính chất lại rất gần với tín hiệu ồn trắng lưỡng trị. Những máy phát tín hiệu như vậy làm việc theo mạch vòng ghi quay với khâu cộng theo môđun 2 như ở hình 8.5a các ô : 1, 2,... k..., n là phần tử ghi quay được ghi 0 hay 1 và sau mỗi nhịp T_0 trị số ghi ở ô i được chuyển sang ô (i + 1).



b)

	Trạng thái ở thời điểm l_{T_0}										
	l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Khối (ô)	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
	2	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
	3	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
	Σ_2	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1



Hình 8.5

Mạch vòng được khép kín ở bộ cộng theo mod 2 và ghi "0" nếu ô k và n có cùng giá trị (0 và 0 hay 1 và 1) ; ghi "1" nếu ô k và n có giá trị khác nhau (0 và 1 hay 1 và 0). Ở đầu ra, có bộ biến đổi tuyến tính R kiểu rơle hai vị trí để biến đổi tín hiệu vào y theo quy luật x = 2y − 1.

Hãy khảo sát trường hợp giản đơn : n = 3 và k = 2. Giả sử lúc đầu các ô đều ghi trạng thái 1, ở ô cộng sẽ thực hiện phép cộng mod 2 và ghi 0. Sau nhịp T_0, số 0 được chuyển vào ô 1 còn ở ô cộng mod 2 lại xuất hiện số 0 như là tổng của hai số 1 ghi ở ô 2 và ô 3. Cứ thế, sau mỗi nhịp T_0 các ô nhớ ghi trị số mới và ở ô 1 xuất hiện kết quả cộng mod 2 của các trị số ghi ở ô 2 và ô 3. Ở bảng ghi (hình 8-5b) có các trị số được ghi ở các ô 1, 2, 3 và $\sum_{mod2}$ các thời điểm 0, T_0, $2T_0$, $3T_0$... Theo bảng ghi và hình 8.5c ta thấy rằng, sau thời gian $7T_0$ thì quá trình lặp lại.

Chu kỳ T của các xung nối tiếp được xác định bởi :

$$T = NT_0 = T_0\ (2^n - 1) \qquad (8\text{-}17)$$

với n là số lượng các ô nhớ.

Số lượng ô nhớ càng lớn, chu kỳ càng tăng và tín hiệu x càng gần với ồn trắng lưỡng trị. Ở ví dụ trên :

Khi $n = 3$ ta có $T = T_0(2^3-1) = 7T_0$,

$n = 4$ $\quad T = T_0(2^4-1) = 15T_0$,

$n = 5$ $\quad T = T_0(2^5-1) = 31T_0$,

$n = 6$ $\quad T = T_0(2^6-1) = 63T_0$,

$n = 7$ $\quad T = T_0(2^7-1) = 125T_0$.

Trong một chu kỳ, số lượng xung dương bằng :

$n_+ = (N + 1)/2$; còn xung âm : $n_- = (N - 1)/2$.

Do đó trị số trung bình là :

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{n_+ - n_-}{n}\,a = \frac{a}{N}\,. \qquad (8\text{-}18)$$

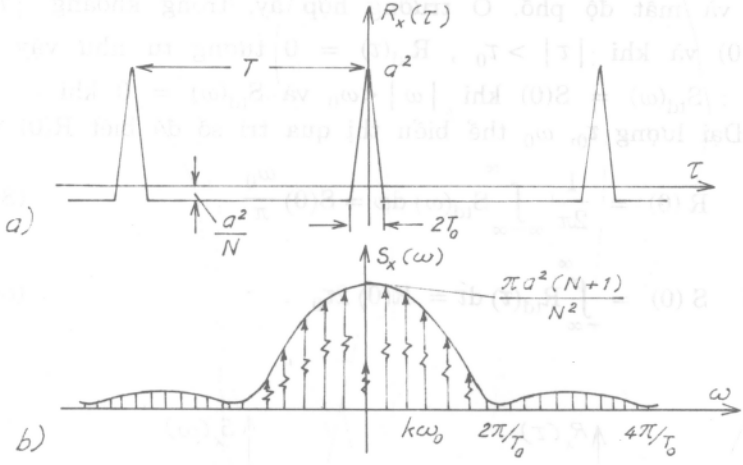
Hàm tương quan của tín hiệu lưỡng trị ngẫu nhiên giả có dạng những xung tam giác đối xứng qua trục tung cách nhau một chu kỳ T như ở hình 8.6a.

Trong khoảng $|\tau| < T/2$:

$$R_x(\tau) = a^2 \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{N}\right)\left(1-\left|\dfrac{\tau}{T_0}\right|\right)-\dfrac{1}{N}, & \text{với } \left|\dfrac{\tau}{T_0}\right| \leqslant 1 \; ; \\ -\dfrac{1}{N} & \text{với } 1 \leqslant \left|\dfrac{\tau}{T_0}\right| \leqslant \dfrac{N}{2} \end{cases} \qquad (8\text{–}19)$$

Sau khi phân tích thành chuỗi Fourier theo $k\omega_0$ với $\omega_0 = 2\pi/T$ ta có :

$$R_x(\tau) = \frac{a^2}{N}\left\{-1+\left(1+\frac{1}{N}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi k}{N}\Big/\frac{\pi k}{N}\right)^2 \cos k\omega_0\tau\right\} \qquad (8\text{–}20)$$



Hình 8.6

Sau khi xác định mật độ phổ của mỗi thành phần của hàm tương quan, kể cả thành phần không đổi ta có :

$$S_x(\omega) = \frac{\pi a^2}{N}\left\{\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(\sin\frac{\omega T_0}{2}\Big/\frac{\omega_0}{2}\right)^2 1^*(\omega) - \left(1-\frac{1}{N}\right)\delta(\omega)\right\}; \quad (8\text{–}21)$$

trong đó $\qquad 1^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0)\;;\; \dfrac{2\pi}{N\omega_0} = T_0\,.$

Khi $N = T/T_0 >> 1$:

$$S_x(\omega) \approx \frac{\pi a^2 T_0}{T}\left\{\left(\sin\frac{\omega T_0}{2}\Big/\frac{\omega T_0}{2}\right)^2 1^*(\omega) - \delta(\omega)\right\}. \qquad (8\text{–}22)$$

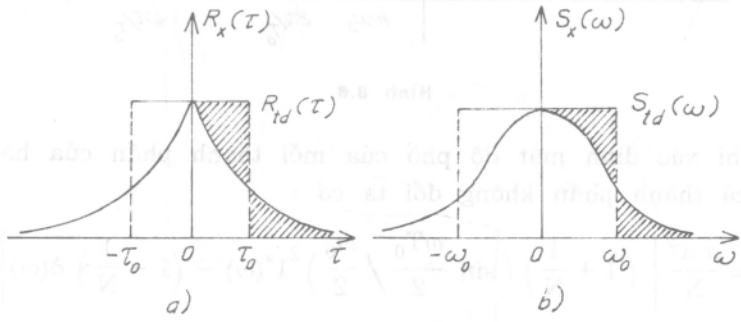
Biểu thức (8-22) là phổ gián đoạn của công suất với đường bao như mật độ phổ của xung đơn vị, độ rộng T_0 và $\omega_0 = 2\pi/(NT_0)$, với dải thông tần tương ứng với thành phần không đổi (khi k = 0 hai hàm δ trong dấu ôm bù cho nhau) ; khi $\omega T < 1$ mật độ phổ của tín hiệu như vậy với độ chính xác cần thiết (5%) tương đương với ồn trắng.

8.3. THỜI GIAN TƯƠNG QUAN TRUNG BÌNH VÀ DẢI TẦN TRUNG BÌNH CỦA TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN

Đối với những đặc tính gần đúng của tín hiệu ngẫu nhiên, đôi khi dùng đặc tính tương đương dạng chữ nhật để xác định gần đúng hàm tương quan và mật độ phổ. Ở trường hợp ấy, trong khoảng $|\tau| < \tau_0$, $R_{td}(\tau) = R(0)$ và khi $|\tau| > \tau_0$, $R_{td}(\tau) = 0$ tương tự như vậy đối với mật độ phổ : $S_{td}(\omega) = S(0)$ khi $|\omega| < \omega_0$ và $S_{td}(\omega) = 0$ khi $|\omega| > \omega_0$. Đại lượng τ_0, ω_0 thể biểu thị qua trị số đã biết R(0) và S(0)

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{td}(\omega)\,d\omega = S(0)\frac{\omega_0}{\pi}, \qquad (8\text{-}23)$$

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{td}(\tau)\,d\tau = R(0)\,2\tau_0 . \qquad (8\text{-}24)$$



Hình 8.7

Từ các biểu thức trên ta có :

$$\tau_0 = S(0)/2R(0), \qquad (8\text{-}25)$$

$$\omega_0 = \pi R(0)/S(0), \qquad (8\text{-}26)$$

với $$\tau_0\omega_0 = \pi/2 = \text{const.} \qquad (8\text{-}27)$$

Từ (8-27) thấy rằng, nếu hàm tương quan càng rộng và thoai thoải thì ngược lại đường cong của mật độ phổ càng hẹp và càng nhọn (và ngược lại).

Đó là mối quan hệ tương hỗ giữa các đường cong theo biến đổi thuận và nghịch của Fourier. Trường hợp đặc trưng như ở hình 8.4.

Ví dụ 8-1 Xác định ω_0 và τ_0 của tín hiệu x(t)

có $$R_x(\tau) = a\,e^{-\alpha|\tau|},$$

$$S_x(\omega) = \frac{2\alpha a}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Trong trường hợp này $R(0) = a$ và $S(0) = \frac{2a}{\alpha}$. Theo (8-25) và 8-26) : $\tau_0 = \frac{1}{\alpha}$ và $\omega_0 = \pi\alpha/2$. Đồ thị $R_x(\tau)$, $R_{td}(\tau)$ và $S_x(\omega)$, $S_{td}(\omega)$ như ở hình 8.7a, b.

8.4. HÀM TƯƠNG QUAN TƯƠNG HỖ VÀ MẬT ĐỘ PHỔ CỦA TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN

Khi có hai hay nhiều tín hiệu ngẫu nhiên, cần biết mối quan hệ lẫn nhau giữa chúng. Đó là mật độ phân bố hỗn hợp $p_{xy} = p_2(x_1, t_1 ; y_2, t_2)$, hàm tương quan tương hỗ $K_{xy}(\tau)$ và mật độ phổ tương quan tương hỗ $S_{xy}(j\omega)$.

Nếu hàm tương quan tương hỗ của hai tín hiệu ngẫu nhiên bằng 0, các tín hiệu ấy không tương quan nhau. Mức độ không tương quan của tín hiệu là chỉ số về sự khác nhau của bản chất sự xuất hiện và thường chứng minh cho sự độc lập theo tính thống kê thể hiện như sau :

$$p_2(x_1, t_1 ; y_2, t_2) = p_x(x_1, t_1)\; p_y(y_2, t_2). \qquad (8\text{-}28)$$

với tín hiệu ngẫu nhiên dừng :

$$x_1 = x(t_1) \;;\; y_2 = y(t_1 + \tau). \qquad (8\text{-}29)$$

Hàm tương quan tương hỗ xác định theo trung bình tập hợp theo mật độ phân bố hỗn hợp có dạng :

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p_2(x_1, y_2)\, dy_2 \quad . \qquad (8\text{-}30)$$

Hàm tương quan tương hỗ xác định theo trung bình theo thời gian đối với các tín hiệu ngẫu nhiên dừng x, y là :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\, dt \quad . \qquad (8\text{-}31)$$

Đối với các quá trình écgôđíc, (8 -30) và (8 -31) cho cùng kết quả : $R_{xy}(\tau) = K_{xy}(\tau)$.

Ví dụ 8-2 Tín hiệu ngẫu nhiên dừng x(t) của quá trình écgôđíc được ghi trên băng từ và được phục hồi lại sau thời gian t_0. Tín hiệu phục hồi ấy là $y(t) = x(t - t_0)$. Hãy khảo sát một vài tính chất của hàm tương quan tương hỗ của các tín hiệu x(t) và y(t).

Theo (8 -31) :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, y(t+\tau-t_0)\, dt = R_x(\tau - t_0) \quad . \qquad (8\text{-}32)$$

Hàm tương quan tương hỗ cũng là hàm tự tương quan được dịch sang phải một đại lượng t_0. Vì hàm tự tương quan có cực đại ở gốc trục, hàm tương quan tương hỗ có cực đại ở $\tau = t_0$.

Nếu thay đổi vị trí các hàm x và y, ta có :

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-t_0)\, x(t+\tau)\, dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau+t_0)\, dt = R_x(\tau + t_0) = R_{xy}(-\tau) \quad (8\text{-}33)$$

Hàm tương quan tương hỗ $R_{yx}(\tau)$ là hàm tự tương quan được dịch sang trái một đại lượng t_0 và cực đại của nó ở $\tau = -t_0$. Như vậy :

$$R_{xy}(\tau) \neq R_{yx}(\tau).$$

Mật độ phổ của chúng tương ứng với :

$$\left.\begin{aligned} S_{xy}(j\omega) &= e^{-j\omega t_0}\, S_x(\omega) \;; \\ S_{yx}(j\omega) &= e^{j\omega t_0}\, S_x(\omega) \end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}34)$$

Ví dụ 8-3 Khảo sát hai tín hiệu điều hòa với giá trị ban đầu của pha là ngẫu nhiên với các tần số khác nhau.

$$x = X_m \sin(\omega_1 t + \alpha),$$
$$y = Y_m \sin(\omega_2 t + \beta).$$

Theo (8-31) ta có :

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0,$$
$$S_{xy}(j\omega) = S_{yx}(j\omega) = 0.$$

Điều ấy có nghĩa là hai tín hiệu hình sin với tần số khác nhau không tương quan nhau.

Nếu biết hàm tương quan tương hỗ và hàm tự tương quan của hai tín hiệu x và y, có thể xác định được hàm tương quan của tổng hay hiệu của các tín hiệu ấy.

Nếu : $$z(t) = x(t) \pm y(t). \qquad (8-35)$$

thì sau một vài biến đổi ta có :

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \pm R_{xy}(\tau) \pm R_{yx}(\tau) ; \qquad (8-36)$$

$$\begin{aligned} S_z(\omega) &= S_x(\omega) + S_y(\omega) \pm S_{xy}(j\omega) \pm S_{yx}(j\omega) \\ &= S_x(\omega) + S_y(\omega) \pm 2R_e S_{xy}(j\omega) \end{aligned} \qquad (8-37)$$

8.5. DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ PHÂN TÍCH TÍN HIỆU VÀ XỬ LÝ SỐ LIỆU

Phân tích Fourier là tối cần trong việc phân tích tín hiệu vì nó có thể biến tín hiệu bất kỳ thành tín hiệu điều hòa với tần số khác nhau. Với véctơ của số liệu lấy mẫu, phân tích Fourier có được bằng cách dùng biến đổi Fourier gián đoạn (DFT).

Biến đổi Fourier nhanh (FFT) là angôrít hiệu dụng để tính một chuỗi biến đổi Fourier gián đoạn không phải là những biến đổi riêng biệt, đặc biệt có ích ở các quá trình dùng tín hiệu và hình ảnh, khi dùng đến lọc, chập, phân tích tần, ước lượng phổ...

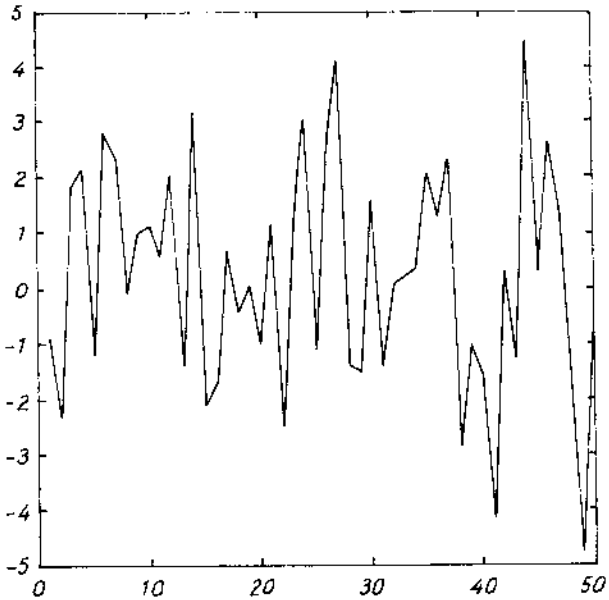
Các hàm MATLAB dùng cho phép biến đổi Fourier cho ở Phụ lục D-3.

Ví dụ cần tìm ở tín hiệu y nào đó theo thời gian những thành phần

có tần số nhất định đã bị nhiễu che khuất (ví dụ f_1 = 50 Hz và f_2 = 120 Hz, nhiễu là ngẫu nhiên có kỳ vọng toán bằng 0).

Trong trường hợp ấy ta dùng chương trình sau :

```
>> t=0:0.001:0.6;
>> x=sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*120*t);
>> y=x+ 2*randn(l, length(t));
>> plot(y(l:50))
```



Hình 8.8

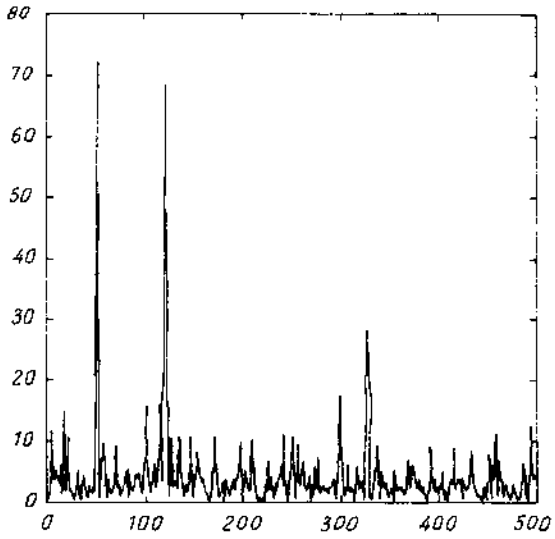
Theo hình 8.8 rất khó nhận ra được những thành phần có tần số nói trên theo tín hiệu này. Chuyển đổi sang miền tần số bằng cách dùng biến đổi Fourier gián đoạn tín hiệu có nhiễu y với 512 điểm của biến đổi Fourier nhanh :

```
>> Y=fft(y, 512);
>> Pyy=Y.*conj(Y)/512;
>> f=1000*(0:255)/512;
>> plot(f,Pyy(l:256))
```

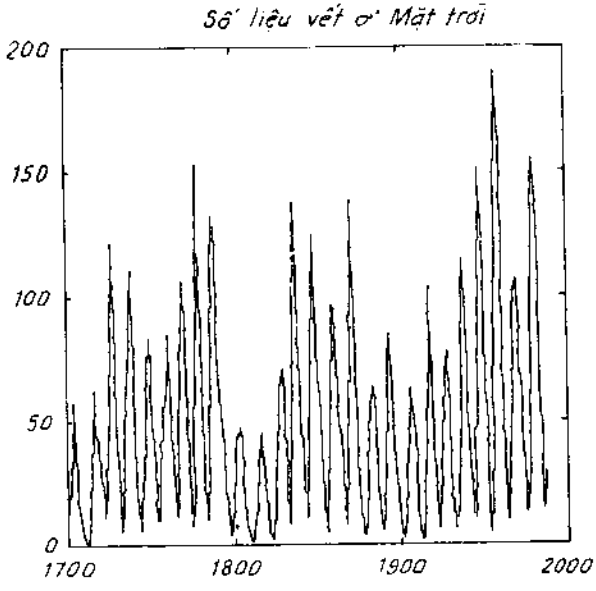
Mật độ phổ, thước đo của năng lượng tín hiệu ở những tần số khác nhau được mô tả như ở hình 8.9.

Ví dụ 8-4 Khi phân tích về sự thay đổi của tác động những vết đen ở Mặt Trời, người ta đã đi đến kết luận là tác động ấy có chu kỳ là 11 năm. Hãy dùng những số liệu ấy (số liệu Wolfer) của các nhà thiên văn học trong 300 năm để rút ra kết luận này.

```
>> load sunspot . dat
>> year=sunspot (:,1);
>> wolfer=sunspot (:,2);
>> plot(year,wolfer)
>> title('So lieu vet
        o mat troi')
```



Hình 8.9.

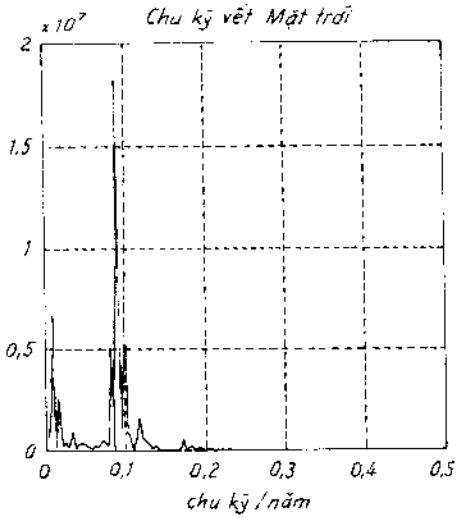


Hình 8.10

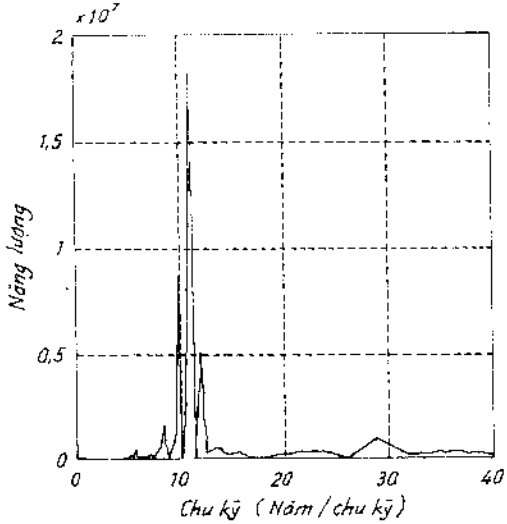
Số liệu Wolfer đã được nạp sẵn và được vẽ như ở hình 8.10.

Bây giờ dùng phép biến đổi Fourier nhanh (FFT) đối với số liệu Wolfer

và vẽ đặc tính của công suất phụ thuộc tần số theo chương trình dưới đây ; Ở hình 8.11 là biểu đồ mô tả chu kỳ vệt Mặt Trời.



Hình 8.11



Hình 8.12

```
>> Y=fft (wo lfer);
>> N=length(Y);
>> Y(1)=[ ];
>> power=abs(Y(1:N/2))^2;
>> nyquist=1/2;
>> freq=(1:N/2)/(N/2)*nyquist;
>> plot(freq, power), grid on
>> xlabel ('Chu ky/nam')
>> title ('Chu ky vet Mat Troi')
```

Để thuận tiện hơn, dùng số lượng năm/chu kỳ và mô tả năng lượng/chu kỳ như ở hình 8.12.

```
>> period=1./freq ;
>> plot (period,power),
>> axis ([0 40 0 2e7]), grid on
>> xlabel ('Chu ky (Nam/Chu ky)')
```

```
>> ylabel ('Nang luong')
```

Để xác định chu kỳ một cách chính xác, dùng lệnh :

```
>> [mp index] = max (power) ;
>> period (index)
ans =
        11.0769
>>
```

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

Bài tập 8-1 Tìm mật độ phổ của tổng hai tín hiệu dịch nhau một đại lượng t_0(x (t) và y(t) = x (t + t_0)) nếu biết $S_x(\omega)$.

Đáp án :

Theo (8-37) và tính đến (8-34) ta có được :

$$S_z(\omega) = 2S_x(\omega)\left[1 + \frac{e^{-j\omega t_0} + e^{j\omega t_0}}{2}\right] = 2S_x(\omega)\left[1 + \cos\omega t_0\right]$$

Bài tập 8-2 Tìm hàm tương quan của tổng hai tín hiệu không tương quan nhau x(t) = acos (ω_0t + α) và y(t) với hàm tương quan $R_y(\tau) = b^2e^{-\beta|\tau|}$.

Đáp án :

Theo (8-36) và tính đến (8-6) ta có được :

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) = \frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau + b^2e^{-\beta|\tau|}$$

Từ biểu thức này ta thấy, khi τ tăng, thành phần thứ hai giảm còn biên độ dao động của thành phần thứ nhất không đổi. Nếu x(t) là tín hiệu có ích còn y(t) là nhiễu, có thể thấy rằng bằng cách thay đổi hàm tương quan của tổng Z với τ lớn có thể làm xuất hiện tín hiệu có ích x trên nền của nhiễu có cường độ lớn y.

Bài tập 8-3 Xác định phổ của một chuỗi 512 điểm lấy trong 2,56 sec từ hàm :

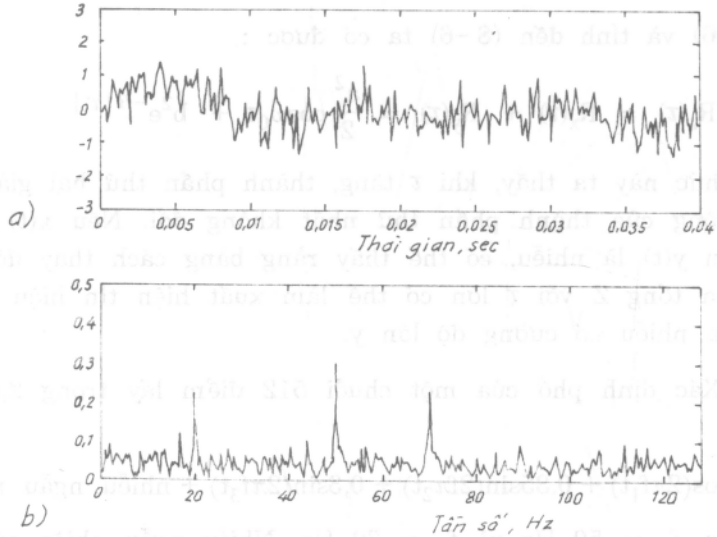
$$y = 0{,}2\cos(2\pi f_1 t) + 0{,}35\sin(2f\pi_2 t) + 0{,}3\sin(2\pi f_3 t) + \text{nhiễu ngẫu nhiên}$$

với f_1 = 20 Hz, f_2 = 50 Hz và f_3 = 70 Hz. Nhiễu ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với độ lệch chuẩn 0,5 và trị số trung bình bằng 0.

Đáp án

```
>> f1=20; f2=50; f3=70; nt=512; T=2; dt=T/nt; df=1/T;
>> fmax=(nt/2)*df; t=0:dt:nt*dt; tt=0:dt/25:nt*dt/50;
>> y=0.2*cos(2*pi*f1*t)+ 0.35*sin(2*pi*f2*t)+ 0.3*sin(2*pi*f3*t);
>> yy=0.2*cos(2*pi*f1*tt)+ 0.35*sin(2*pi*f2*tt)+ 0.3*sin(2*pi*f3*tt);
>> y=y+ 0.5*randn(size(t)); yy=yy+ 0.5*randn(size(tt));
>> f=0:df:(nt/2-1)*df;
>> figure(1);
>> subplot(211), plot(tt,yy)
>> axis ([0 0.04 - 3 3])
>> xlabel('thoi gian sec'); ylabel('y')
>> yf=fft(y); yp=zeros(1,(nt/2));
>> yp(1:nt/2)=(2/nt)*yf(1:nt/2);
>> subplot(212), plot(f,abs(yp))
>> axis ([0 fmax 0 0.5])
>> xlabel('tan so Hz'); ylabel ('tri tuyet doi (DFT)');
```

Ở hình 8.13b, các tần số 20, 50 và 70 Hz đã được làm rõ, mặc dầu có nhiễu ngẫu nhiên, khác với tín hiệu gốc ở hình 8.13a.



Hình 8.13

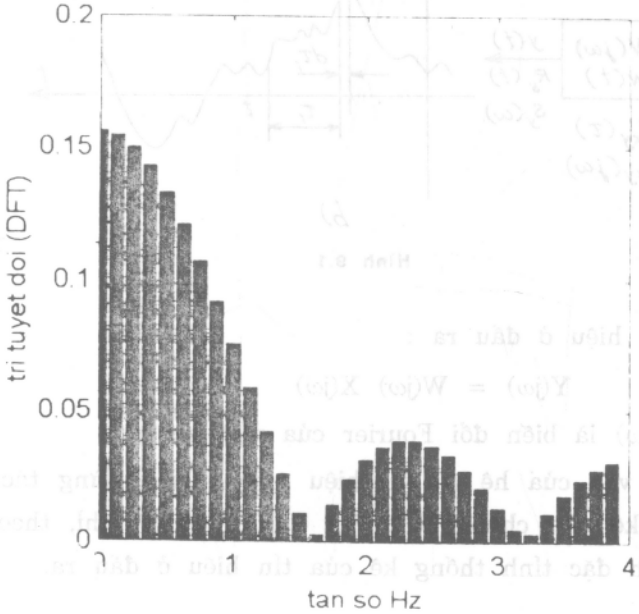
Bài tập 8 –4 Xác định DFT của một chuỗi gồm 64 điểm đã được lượng tử hóa từ tín hiệu có chu kỳ là 8 sec. Biên độ của tín hiệu bằng 1 và sau 0,5 sec nó bằng 0.

Đáp án :

Ở hình 8.14 ta thấy phổ tần là liên tục và trị số cực đại ở gần gốc trục với tần số bằng 0.

```
>> y=[ones(1,5) zeros(1,59)];
>> nt=64; T=8;
>> dt=T/nt; df=1/T;
>> fmax=(nt/2)*df;
>> f=0:df:(nt/2-1)*df;
>> yf=fft(y); yp=zeros(1,nt/2);
>> yp(1:nt/2)=(2/nt)*yf(1:nt/2);
>> figure(1); bar(f,abs(yp))
>> axis ([0 fmax 0 0.2]);
>> xlabel('tan so Hz');
>> ylabel('tri tuyet doi (DFT)');
```

Vì tín hiệu là bậc thang không chu kỳ nên biên độ của DFT phụ thuộc chu kỳ lượng tử (so sánh với hình 8.3 ở tín hiệu xung chữ nhật).



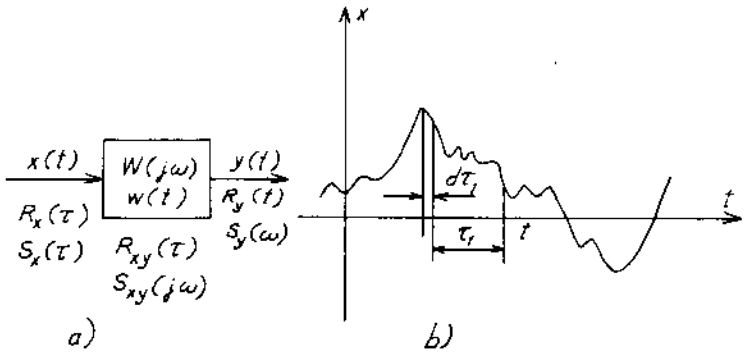
Hình 8.14

Chương 9
HỆ TUYẾN TÍNH VỚI TÁC ĐỘNG NGẪU NHIÊN DỪNG

9.1. TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN QUA KHÂU TUYẾN TÍNH

Nếu biết x(t) ở đầu vào của một khâu tuyến tính có hàm trọng lượng w(t) thì tín hiệu ra được xem như đáp ứng của khâu ấy với tổng hợp các xung $x(t - \tau_1)$ có độ rộng $d\tau_1$ như ở hình 9.1a, b. Như vậy tín hiệu ở đầu ra khâu tuyến tính là :

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau_1)x(t - \tau_1)\, d\tau_1. \qquad (9\text{–}1)$$



Hình 9.1

Phổ của tín hiệu ở đầu ra :

$$Y(j\omega) = W(j\omega)\ X(j\omega) \qquad (9\text{–}2)$$

với $X(j\omega)$ và $Y(j\omega)$ là biến đổi Fourier của x(t) và y(t).

Nếu ở đầu vào của hệ có tín hiệu ngẫu nhiên dừng tác động mà đặc tính thống kê của chúng $R_x(\tau)$ và $S_x(\omega)$ đã biết thì, theo (9–1) và (9–2) có thể tính đặc tính thống kê của tín hiệu ở đầu ra.

9.1.1. BIẾN ĐỔI HÀM TƯƠNG QUAN

Hàm tự tương quan của tín hiệu ngẫu nhiên dừng ở đầu ra của khâu tuyến tính được xác định bởi :

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t)\, y(t+\tau)\, dt.$$

Thay y(t) từ (9 -1) :

$$R_y(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} w(\tau_1)\, x(t-\tau_1)\, d\tau_1 \int_{0}^{\infty} w(\tau_2)\, x(t-\tau_2+\tau)\, d\tau_2 dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} w(\tau_1)\, d\tau_1 \int_{0}^{\infty} w(\tau_2)\, R_x(\tau+\tau_1-\tau_2)\, d\tau_2 \,. \qquad (9\text{–}3)$$

Ở đây $R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2)$ là hàm tự tương quan của tín hiệu đầu vào :

$$R_x(\tau+\tau_1-\tau_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t-\tau_1)\, x(t+\tau-\tau_2)\, dt. \qquad (9\text{–}4)$$

Hàm tương quan tương hỗ của x(t) và y(t) được xác định tương tự :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt \int_{0}^{\infty} w(\tau_1)\, x(t+\tau-\tau_1)\, d\tau_1 =$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{0}^{\infty} w(\tau_1)\, R_x(\tau-\tau_1)\, d\tau \,. \qquad (9\text{–}5)$$

Biểu thức (9 -5) có ý nghĩa thực tế rất quan trọng : Nếu ở đầu vào của khâu tuyến tính có tín hiệu là ồn trắng đơn vị thì hàm tương quan tương hỗ $R_{xy}(\tau)$ sẽ bằng hàm trọng lượng của khâu tuyến tính ấy. Thực vậy, vì nếu x(t) là ồn trắng, nghĩa là $R_x(\tau - \tau_1) = \delta(\tau - \tau_1)$ và từ (9 -5) ta có :

$$R_{xy}(\tau) = w(\tau). \qquad (9\text{–}6)$$

Ví dụ 9-1 Tìm $R_y(\tau)$ và $R_{xy}(\tau)$ ở đầu ra của khâu quán tính với :

$$w = \begin{cases} \dfrac{1}{T_o} e^{-t/T_0} & \text{khi } t \geq 0 \\ 0 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$$

nếu ở đầu vào là ồn trắng với $R_x(\tau) = a^2\delta(\tau)$.

Trong trường hợp này, theo (9 –3) :

$$R_y(\tau) = \frac{a^2}{T_0^2}\int_0^{\infty} e^{-\tau_1/T_0}\,d\tau_1 \int_0^{\infty} e^{-\tau_2/T_0}\,\delta(\tau+\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2 =$$

$$= \frac{a^2}{T_0^2}\int_0^{\infty} e^{-\tau_1/T_0}\begin{Bmatrix} e^{-\frac{\tau_1+\tau}{T_0}} & \text{nếu } \tau+\tau_1 \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } \tau+\tau_1 < 0 \end{Bmatrix} d\tau_1 =$$

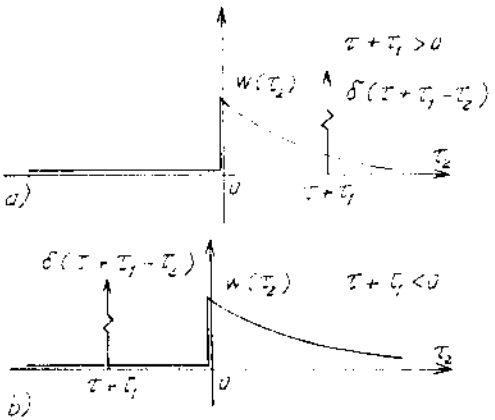
$$= \frac{a^2}{T_0^2}\begin{Bmatrix} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\tau_1+\tau}{T_0}}\,d\tau_1 & \text{khi } \tau > 0 \\ \int_{-\tau}^{\infty} e^{-\frac{2\tau_1+\tau}{T_0}}\,d\tau_1 & \text{khi } \tau < 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{a^2}{2T_0}\begin{Bmatrix} e^{-\tau/T_0} & \text{nếu } \tau > 0 \\ e^{\tau/T_0} & \text{nếu } \tau < 0 \end{Bmatrix} = \frac{a^2}{2T_0}\,e^{-|\tau/T_0|}\,. \qquad (9\text{–}7)$$

Theo (9–5) hay (9–6), xác định hàm tương quan tương hỗ $R_{xy}(\tau)$:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{a^2}{T_0}\int_0^{\infty} e^{-\tau_1/T_0}\,\delta(\tau-\tau_1)\,d\tau_1 = \frac{a^2}{T_0}\,e^{-\tau/T_0}\,. \qquad (9\text{–}8)$$

Đặc tính $\delta(\tau+\tau_1-\tau_2)$ và $w(\tau_2)$ cho trường hợp $\tau+\tau_1 > 0$ và $\tau+\tau_1 < 0$ như ở hình 9.2a, b. Như vậy đo hàm tương quan của tín hiệu ở đầu vào và ra của khâu tuyến tính khi đặt ở đầu vào tín hiệu gần với ồn trắng có thể xác định được hàm trọng lượng của khâu ấy.



Hình 9.2

9.1.2. BIẾN ĐỔI MẬT ĐỘ PHỔ

Khâu tuyến tính có đặc tính tần $W(j\omega)$ và tín hiệu đầu vào $x(t)$, có hàm tự tương quan và mật độ phổ $R_x(\tau)$ và $S_x(\omega)$. Hãy xác định mật độ phổ $S_y(\omega)$ và $S_{xy}(j\omega)$.

Biểu thức độ tản của tín hiệu x(t) được xác định bởi :

$$R_x(0) = D_x + m_x^2.$$

với m_x là trị số trung bình (kỳ vọng toán), của x.

Giả thiết $m_x = 0$ ta có :

$$D_x = R_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega. \qquad (9\text{-}9)$$

Trong thực tế, hàm x(t) dạng hữu hạn :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t)\ , & \text{khi } |t| \leq T\ ; \\ 0\ , & \text{khi } |t| > T \end{cases}$$

Với $X_T(j\omega)$ là phổ của $x_T(t)$:

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} x_T(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} x(t)\,dt\ .$$

Theo công thức Parceval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2\,d\omega\ .$$

Sau khi chia cho 2T và tăng $T \to \infty$, ta có :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}|X_T(j\omega|^2 d\omega \qquad (9\text{-}10)$$

Vế trái của (9-10) ứng với độ tản D_x khi $m_x = 0$ nên :

$$D_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}|X_T(j\omega|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}|X_T(j\omega|^2 d\omega\ .$$

So sánh (9-10) và (9-9) ta có :

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}|X_T(j\omega)|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} X_T(j\omega)\,X_T(-j\omega)\ . \qquad (9\text{-}11)$$

Như vậy mật độ phổ xác định công suất của quá trình ngẫu nhiên.

Mật độ phổ $R_{xy}(j\omega)$ tương ứng với (9-11).

$$S_{xy}(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} Y_T(j\omega)X_T(-j\omega).$$

Sau khi dùng phương pháp biến đổi giản đơn ta có :

$$S_{xy}(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{Y_T(j\omega)}{X_T(j\omega)} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} | X_T(j\omega | ^2 , \qquad (9-12)$$

mà $$\lim_{T\to\infty} \frac{Y_T(j\omega)}{X_T(j\omega)} = W(j\omega).$$

Theo (9-11) và (9-12) ta có :

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega)S_x(\omega). \qquad (9-13)$$

Mật độ phổ tương quan của tín hiệu vào ra đối với hệ tuyến tính bằng tích của mật độ phổ tín hiệu vào với đặc tính tần của hệ.

Tương ứng với (9-11) có thể viết :

$$S_y(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} | Y_T(j\omega | ^2 . \qquad (9-14)$$

Sau khi dùng một số biến đổi giản đơn ta có :

$$S_y(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{Y_T(-j\omega)}{X_T(-j\omega)} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} X_T(-j\omega)\, Y_T(j\omega) . \qquad (9-15)$$

So sánh (9-12) và (9-15) ta có :

$$S_y(\omega) = W(-j\omega)\, S_{xy}(j\omega). \qquad (9-16)$$

Mật độ phổ của tín hiệu ra của hệ tuyến tính bằng tích của mật độ phổ tương quan với đặc tính tần phức hợp của hệ.

Từ (9-11) và (9-16) nếu loại $S_{xy}(j\omega)$ ta có quan hệ giữa mật độ phổ của tín hiệu vào và ra :

$$S_y(\omega) = | W(j\omega | ^2 S_x(\omega). \qquad (9-17)$$

Mật độ phổ của tín hiệu ra của hệ tuyến tính bằng tích của mật độ phổ của tín hiệu vào với bình phương của môđun đặc tính tần phần tuyến tính của hệ.

Các biểu thức (9-13), (9-16) và nhất là (9-17) có vai trò rất quan trọng khi khảo sát các quá trình ngẫu nhiên trong các hệ tự động.

Công suất trung bình của tín hiệu ở đầu vào và đầu ra của khâu tuyến tính được xác định bởi :

$$\bar{x}^2(t) = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega \; ; \qquad (9-18)$$

$$\bar{y}^2(t) = R_y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_x(\omega)\, d\omega \quad (9\text{-}19)$$

Biểu thức (9–19) dùng để tính sai số quân phương ở các hệ tự động, trong trường hợp này $W(j\omega)$ là đặc tính tần tạo liên hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu sai lệch của hệ.

Ví dụ 9–2 Xác định $S_y(\omega)$ và $S_{xy}(j\omega)$ ở đầu ra của khâu quán tính có hàm truyền đạt $W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_0}$ nếu ở đầu vào là ồn trắng với mật độ phổ $S_x(\omega) = a^2$. Theo (9–17) và (9–13) ta có :

$$S_y(\omega) = \frac{a^2}{1 + \omega^2 T_0^2}, \quad S_{xy}(j\omega) = \frac{a^2}{1 + j\omega T_0^2}. \quad (9\text{-}20)$$

Dùng biến đổi ngược của Fourier đối với (9–20) ta có kết quả như (9–7) và (9–8). Để xác định công suất của tín hiệu, ta dùng (9–18) và (9–19) :

$$\left.\begin{aligned} x^2(t) &= R_x(0) = a^2\delta(0) \rightarrow \infty \\ y^2(t) &= R_y(o0 = \frac{a^2}{2T_0} \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}21)$$

Từ đó nhận thấy rằng công suất của ồn trắng lý tưởng là vô cùng lớn, vì rằng ồn trắng với hàm tương quan là hàm δ, là khái niệm toán học trừu tượng chỉ ít nhiều gần với các tín hiệu thực. Tuy nhiên công suất của tín hiệu sau khi cho ồn trắng đi qua khâu quán tính cũng như dải tần trung bình của nó là hữu hạn và tương ứng với các tín hiệu thực tế quan sát được.

9.1.3. BIẾN ĐỔI LUẬT PHÂN BỐ

Khi tín hiệu ngẫu nhiên đi qua khâu động học tuyến tính, không những phổ của tín hiệu ngẫu nhiên thay đổi mà mật độ phân bố của chúng cũng thay đổi. Việc xác lập luật phân bố xác suất tín hiệu ra khi biết đặc tính thống kê của tín hiệu vào nói chung rất khó khăn.

Chỉ có hai trường hợp riêng, quan trọng và thường gặp là có đáp án giản đơn :

1- Nếu x(t) có phân bố chuẩn, biến đổi tuyến tính của nó cũng có phân bố chuẩn. Thông số trong trường hợp ấy là mômen bậc một M{y(t)} được xác định bằng cách nhân mômen bậc một của tín hiệu vào M{x(t)} với hệ số khuếch đại của khâu tuyến tính mà nó đi qua, còn mômen bậc hai $M\{y^2(t)\}$ theo biểu thức (9-19).

2- Nếu x(t) là tín hiệu điều hòa có pha ngẫu nhiên. Tín hiệu ra y(t) cũng là tín hiệu điều hòa, nghĩa là dạng của mật độ phân bố không đổi nhưng chỉ thay đổi biên độ :

$$Y_m = |W(j\omega|X_m, \qquad (9\text{-}22)$$

trong đó ω là tần số của tín hiệu điều hòa có pha ngẫu nhiên $W(j\omega)$ là hệ số khuếch đại phức của khâu tuyến tính ; X_m là biên độ của tín hiệu vào.

Một đặc điểm quan trọng của biến đổi tuyến tính là :

Định lý cuộn (2-11 [19]) có dạng :

$$y(t) = \int_0^\infty w(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau .$$

Tích phân trên được chia ra từng khoảng nhỏ $(0, \tau_1),\ldots, (\tau_1, \tau_2),\ldots, (\tau_k, \tau_{k+1}),\ldots$ Dùng định lý lấy trung bình ta có :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t-\tau_k^*) \sum_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} w(\tau)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \qquad (9\text{-}23)$$

mà :

$$\xi_k = x(t-\tau_k^*) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} w(\tau)\, d\tau, \qquad (9\text{-}24)$$

$$\tau_k \leqslant \tau^*_k \leqslant \tau_{k+1},\ \tau_0 = 0.$$

Phần dưới dấu tích phân được chọn sao cho đại lượng ngẫu nhiên $x(t-\tau^*_k)$ cũng như ξ_k không phụ thuộc nhau. Khi đó y(t) là tổng của một số vô cùng lớn những đại lượng ngẫu nhiên độc lập theo tính thống kê.

Từ (9-23) có thể khẳng định rằng, nếu x(t) có phân bố chuẩn thì quá trình y(t) cũng chuẩn vì tổng của các đại lượng ngẫu nhiên cũng sẽ có phân bố chuẩn.

Hơn nữa, định lý trung tâm tới hạn (định lý Liapunov) khẳng định rằng phân bố của tổng một số lớn các đại lượng ngẫu nhiên không tương quan nhau sẽ gần với phân bố chuẩn, ngay cả khi phân bố của từng đại lượng không chuẩn.

Điều kiện để định lý trên đúng là các đại lượng tổng có phân bố gần như nhau, nghĩa là độ tản của bất cứ thành phần nào cũng không vượt quá một cách đáng kể độ tản của các thành phần khác. Điều kiện đó thực hiện được nếu chọn được một số khoảng N tương đối lớn không phụ thuộc có tính thống kê với nhau ($\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$), sao cho thời khoảng từ 0 đến τ_N hàm trọng lượng không giảm quá nhanh.

Nói cách khác, khi tín hiệu có phân bố bất kỳ $p_I(x)$ đi qua khâu tuyến tính thì sẽ xảy ra quá trình chuẩn hóa phân bố của tín hiệu ra $p_I(y)$, nghĩa là $p_1(y)$ tiến đến phân bố chuẩn nếu hàm trọng lượng của đối tượng $w(\tau)$ giảm chậm, còn hàm tương quan của tín hiệu ra $R_x(\tau)$ ngược lại, giảm nhanh.

Ví dụ 9-3

Khâu quán tính : $$W(s) = \frac{1}{1 + sT_1} \qquad (9\text{-}25)$$

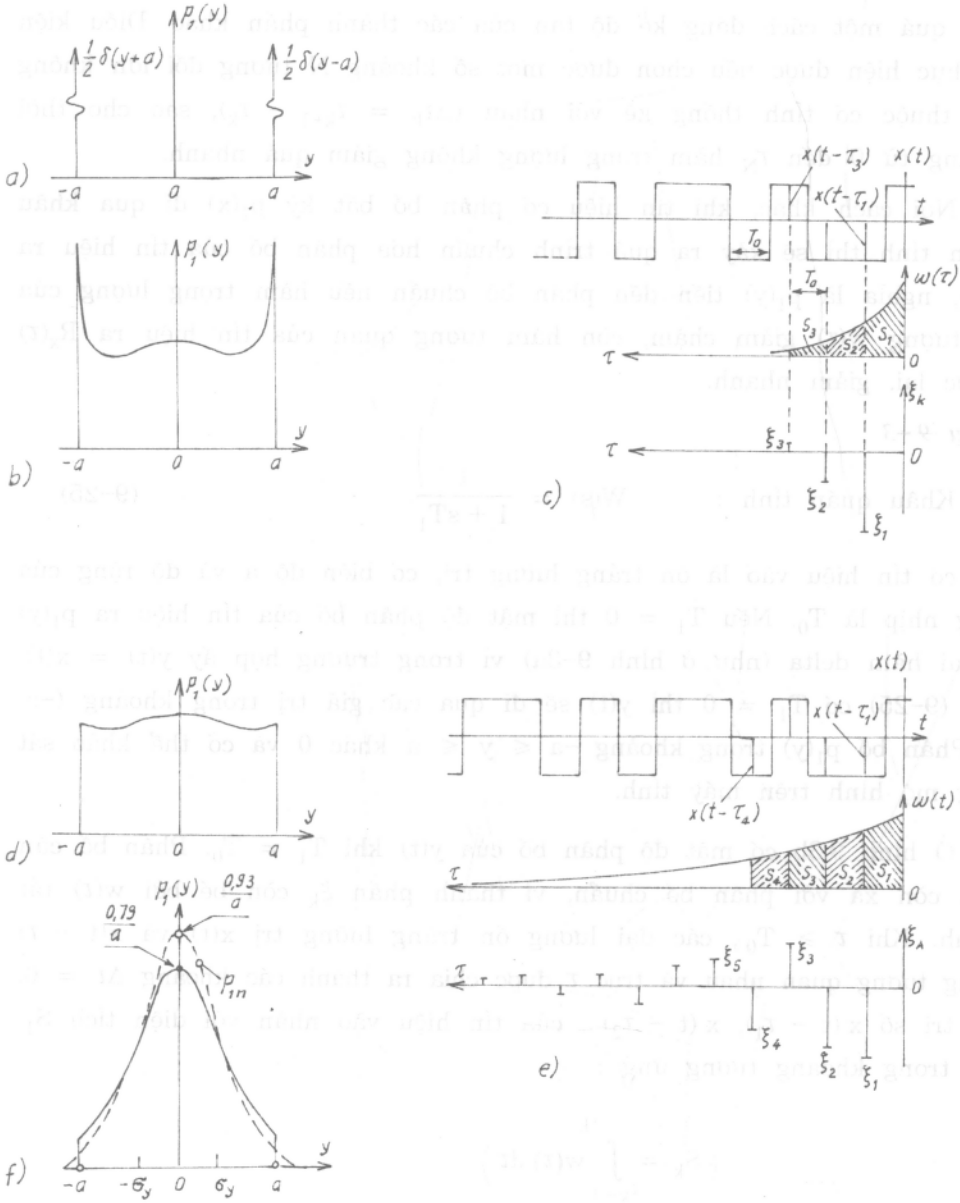
có tín hiệu vào là ồn trắng lưỡng trị, có biên độ a và độ rộng của xung nhịp là T_0. Nếu $T_1 = 0$ thì mật độ phân bố của tín hiệu ra $p_1(y)$ là hai hàm delta (như ở hình 9-3a) vì trong trường hợp ấy $y(t) = x(t)$. Nếu (9-25) có $T_1 \neq 0$ thì y(t) sẽ đi qua các giá trị trong khoảng (-a, a). Phân bố $p_1(y)$ trong khoảng $-a \leqslant y \leqslant a$ khác 0 và có thể khảo sát bằng mô hình trên máy tính.

Ở hình 9.3b có mật độ phân bố của y(t) khi $T_1 = T_0$. Phân bố cần thiết còn xa với phân bố chuẩn, vì thành phần ξ_k còn bé bởi $w(\tau)$ tắt nhanh. Khi $\tau \geqslant T_0$, các đại lượng ồn trắng lưỡng trị x(t) và $x(t - \tau)$ không tương quan nhau và trục τ được chia ra thành các khoảng $\Delta\tau = 0$. Các trị số $x(t - \tau_1)$, $x(t - \tau_2)$... của tín hiệu vào nhân với diện tích S_1, S_2... trong khoảng tương ứng :

$$\left(S_k = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} w(\tau)\, d\tau \right)$$

tạo nên thành phần ξ_1, ξ_2,... của tổng (9-23).

Ở hình 9.3c chỉ có ba thành phần ξ_1, ξ_2, ξ_3 vì môđun của những thành phần khác bé hơn thành phần thứ nhất hơn 20 lần.


a)
b)
c)
d)
e)
f)
$P_y(y)$
$\frac{1}{2}\delta(y+a)$
$\frac{1}{2}\delta(y-a)$
$P_1(y)$
$x(t-\tau_3)$
$x(t)$
$x(t-\tau_1)$
T_0
$\omega(\tau)$
S_3
S_2
S_1
ξ_k
ξ_{3T}
ξ_2
ξ_1
$x(t-\tau_4)$
S_4
ξ_A
ξ_5
ξ_3
ξ_4
$\frac{0,79}{a}$
$\frac{0,93}{a}$
P_{1n}
σ_y

Hình 9.3

Ở hình 9.3d có $p_1(y)$ với $T_1 = 4T_0$; phân bố gần như phân bố đều, số lượng ξ_K là 12 ; ξ_{13} bé hơn 5% của ξ_1.

Khi $T_1 = 8T_0$, phân bố $p_1(y)$ như ở hình 9.3f. Ở hình vẽ có trị số σy xác định theo (9–19) theo hệ số khuếch đại phức đã cho (9–25) và mật độ phổ của ồn trắng lưỡng trị (8–22) :

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty \left| \frac{1}{1 + j\omega T_1} \right|^2 a^2 T_0 \left(\sin \frac{\omega T_0}{2} \Big/ \frac{\omega T_0}{2} \right)^2 d\omega =$$

$$= \frac{a^2 \pi}{T_0} \left[T_0 - T_1 \left(1 - e^{-T_0/T_1} \right) \right]. \qquad (9-26)$$

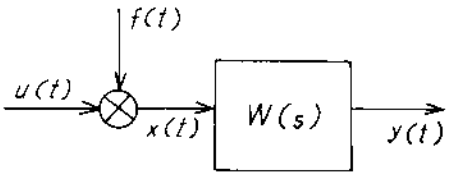
Với $T_1 = 8T_0$ theo (9–26) tính được

$$\sigma y = 0{,}43\ a. \qquad (9-27)$$

Ở hình 9.3f đường nét đứt có phân bố chuẩn. Như vậy, để chuẩn hóa mật độ phân bố của tín hiệu qua khâu tuyến tính, thì các đại lượng ξ_K ở (9–24) phải mang tính chất ngẫu nhiên. Ở ví dụ trên, tín hiệu ngẫu nhiên giả lưỡng trị sau khi qua khâu quán tính với hằng số thời gian $T_1 > 8T_0$ có thể có tín hiệu ra với phân bố chuẩn.

9.2. CÁC BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ TỔNG HỢP HỆ TUYẾN TÍNH VỚI TÁC ĐỘNG NGẪU NHIÊN DỪNG

Khảo sát một hệ tuyến tính (hình 9.4) với hàm truyền W(s), đầu vào là tín hiệu x(t) gồm có hai thành phần : u(t) là tín hiệu làm việc cơ bản của hệ và f(t) là nhiễu. Ở đầu ra của hệ có tín hiệu y(t). Đối với một hệ như vậy có thể có hai bài toán được đặt ra như dưới đây.



Hình 9.4

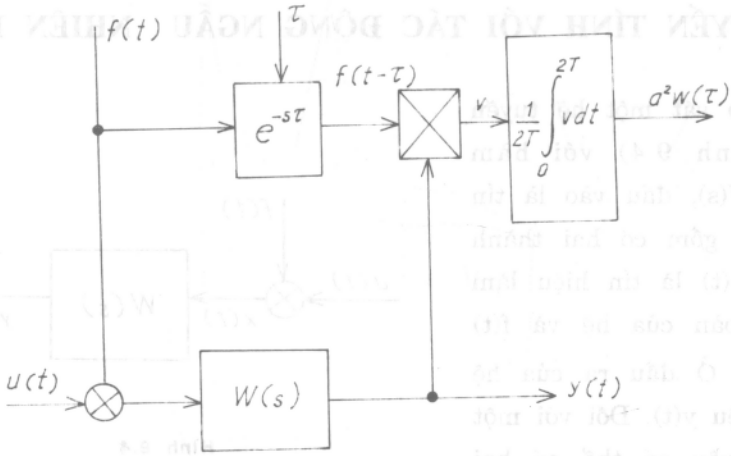
9.2.1. NHẬN DẠNG ĐỐI TƯỢNG TUYẾN TÍNH THEO PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG QUAN

Nhận dạng là xác định mô hình toán học của hệ nhằm đánh giá các đặc tính tĩnh và động của hệ. Trong trường hợp nhận dạng các đặc tính động của đối tượng, nhiệm vụ bài toán là theo f(t) đã cho và y(t), xác định W(s). Khi nhận dạng, "nhiễu" f(t) lại là tín hiệu có ích còn tín hiệu làm việc u(t) tạo nên sai số trong việc xác định thông số của hệ, cho nên khi nhận dạng càng giảm ảnh hưởng của tín hiệu làm việc u càng tốt.

Có nhiều phương pháp nhận dạng đối tượng tuyến tính [15], ở đây chỉ đề cập đến phương pháp tương quan, cơ sở trên biểu thức (9–6). Nhiều thiết bị nhận dạng được thực hiện theo hai nguyên tắc dưới đây.

9.2.1.1. Xác định trực tiếp hàm trọng lượng của đối tượng

Theo phương pháp này, nếu đưa vào hệ tín hiệu ồn trắng thì hàm tương quan tương hỗ của tín hiệu vào và ra trùng với hàm trọng lượng của hệ. Như vậy, ở phương pháp này dùng bộ tương quan như ở hình 9.5. Để loại trừ ảnh hưởng của u(t) đối với kết quả xác định W(t), điều kiện cần là ồn trắng f(t) không tương quan với tín hiệu làm việc u(t). Điều đó có thể thực hiện được với f(t) là tín hiệu ngẫu nhiên giả lưỡng trị (8.2.4 chương 8).

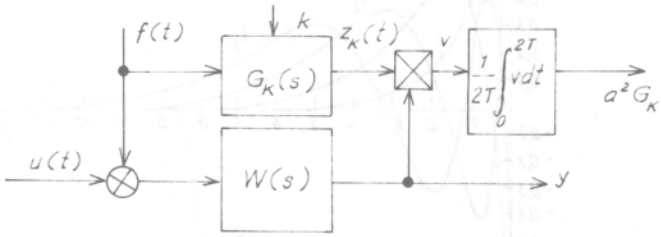


Hình 9.5

Trường hợp này f(t) hay f(t − τ) cho hai giá trị ±a nên cơ cấu nhân ở bộ tương quan khá giản đơn và được thực hiện dưới dạng rơle đổi cực của tín hiệu y(t). Độ trễ của tín hiệu lưỡng trị $\tau = kT_0$ có thể thực hiện được bằng cách lấy tín hiệu từ một của n − 1 đầu ra của phần tử trễ ở bộ ghi quay (hình 8.5a).

9.2.1.2. Xác định hàm trọng lượng của đối tượng theo hệ số của hàm trực giao

Để có hàm trọng lượng phân tích theo các thành phần trực giao, trước hết cần xác định dạng của các hàm trực giao g_k. Nếu chọn các hàm như vậy thì khi dùng các khâu $G_k(s)$ và đưa vào đầu vào những tín hiệu xung, có thể tự động xác định các hệ số C_k của w(t) theo hàm trực giao ấy như ở hình 9.6. Trường hợp này f(t) cũng là ồn trắng ngẫu nhiên giả và tích phân được thực hiện trong cả chu kỳ $2T = NT_0$.



Hình 9.6

Khi nhận dạng các đối tượng có đặc tính là các khâu quán tính, hàm trực giao được chọn là các hàm Laguerre. Hàm Laguerre bậc k : $l_k(\gamma t)$ được mô tả như sau :

$$l_k(\gamma t) = e^{-\gamma t} \sum_{i=o}^{k} \frac{2^{k-1} k!(-1)^i}{i!\,[(k-i)!]^2} (\gamma t)^{k-i}, \qquad (9\text{-}28)$$

$l_0(\gamma t) = e^{-\gamma t}$ với k = 0 ; $l_1(\gamma t) = e^{-\gamma t}[2\gamma t - 1]$ với k = 1.

ở đây γ là hệ số tỷ lệ xích.

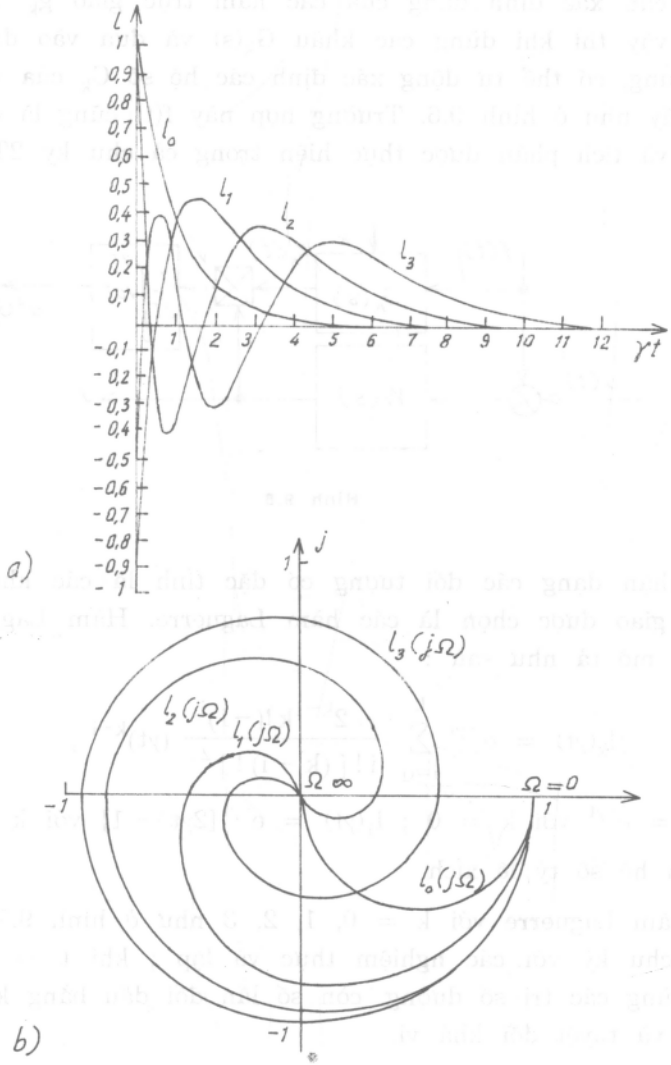
Các hàm Laguerre với k = 0, 1, 2, 3 như ở hình 9.7a, mô tả quá trình phi chu kỳ với các nghiệm thực và lặp ; khi t → ∞ chúng tiến đến 0 ở vùng các trị số dương, còn số lần đổi dấu bằng k ; chúng trực giao nhau và tuyệt đối khả vi.

Biến đổi Fourier của các hàm Laguerre (9 −28) cho :

$$L_k(j\Omega) = L_k\left(j\frac{\omega}{\gamma}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} l_k(\gamma t)e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{\gamma(\gamma - j\omega)^k}{(\gamma + j\omega)^{k+1}} = |L_0(j\Omega)|\exp\left\{(2k+1)\ \text{x}\ \text{jarg}\,L_0(j\Omega)\right\}. \quad (9\text{–}29)$$

tương ứng với khâu quán tính pha không cực tiểu bậc (k + 1). Biểu đồ $L_k(j\Omega) = |L_0(j\Omega)|\exp\left\{(2k+1)\,\text{x}\,\text{jarg}L_0(j\Omega)\right\}$ khi $0 < \Omega < \infty$ như ở hình 9.7b.



Hình 9.7

Ở hình 9.6 với $G_k(s)$ là các khâu hàm Laguerre có hàm truyền $L_k(s/\gamma)$ thì ở đầu ra sẽ nhận được các hệ số phân tích hàm trọng lượng theo các hàm Laguerre. Giả sử hàm truyền của đối tượng chưa biết dạng :

$$W(s) = \sum_{k=0}^{m} C_k L_k(s/\gamma). \qquad (9\text{-}30)$$

và hàm trọng lượng tương ứng :

$$w(t) = \sum_{k=0}^{m} C_k l_k(\gamma t). \qquad (9\text{-}31)$$

Giả thiết $f(\gamma t)$ là xung đơn vị, không tương quan với u(t) thì thành phần của y(t) là đáp ứng của x(t) cũng không tương quan với u(t) và được mô tả bởi (9-31), trong khi ấy từ $G_k(s)$ có tín hiệu $l_k(\gamma t)$ được đưa đến bộ nhân.

Do tính trực giao của hàm Laguerre ta có :

$$2\int_0^{\infty} w(t)\, l_k(\gamma t)\, dt = C_k . \qquad (9\text{-}32)$$

và do đó với thời gian lấy trung bình lớn thì tín hiệu từ bộ nhân tỷ lệ với hệ số C_k tương ứng.

Nếu tín hiệu f(t) là một tập hợp xung với mật độ phổ $S_f(\omega) = a^2$ như ồn trắng lưỡng trị thì tín hiệu lấy từ bộ nhân sau khi lấy tích phân tỷ lệ với a^2C_k. Như vậy nếu có m khâu tương ứng với k trị số khác nhau của hàm Laguerre, ta có thể nhận được sau khi lấy tích phân m hệ số C_k của hàm trọng lượng phân tích theo hàm Laguerre.

So sánh hai phương pháp nhận dạng (hình 9.5 và 9.6) ta thấy cả hai đều cho phép xác định đặc tính động học của đối tượng trong điều kiện hệ vẫn làm việc bình thường với đại lượng chuẩn u(t). Phương pháp thứ nhất cho một chuỗi tọa độ hàm trọng lượng với những trị số τ khác nhau, còn phương pháp thứ hai là các hệ số C_k của hàm trọng lượng được phân tích theo hàm Laguerre. Phương pháp này thuận tiện đối với mô hình đối tượng được mô tả bằng (9-30) khi đã xác định được các hệ số C_k.

9.2.2. LỌC NHIỄU VÀ BIẾN ĐỔI TÍN HIỆU

Ở bài toán lọc nhiễu và biến đổi tín hiệu làm việc, nhiệm vụ là chọn thông số khâu tuyến tính sao cho tín hiệu ra y(t) ít sai khác nhất so

với tín hiệu làm việc đã được biến đổi theo điều kiện bài toán. Với phổ của tín hiệu làm việc $U(j\omega)$, định luật biến đổi có thể được viết dưới dạng :

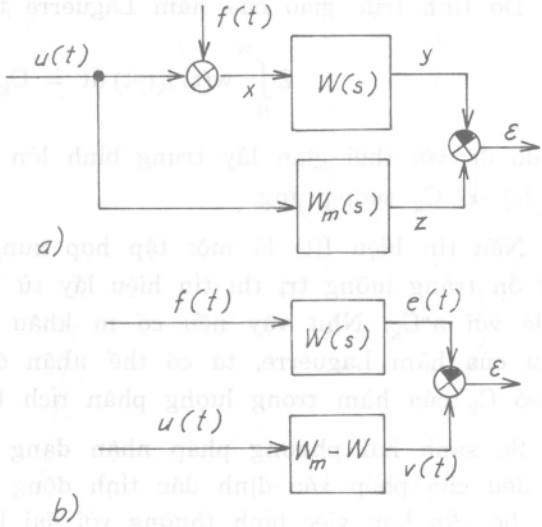
$$Z(j\omega) = W_m(j\omega)U(j\omega)$$

trong đó $Z(j\omega)$ là phổ của tín hiệu cần có ở đầu ra, còn $W_m(j\omega)$ là đặc tính tần của mẫu cho trước.

Nếu bài toán chỉ là lọc đơn thuần, không biến đổi tín hiệu thì $W_m(j\omega) = 1$. Nếu cần có đạo hàm của tín hiệu ra thì $W_m(j\omega) = j\omega$. Nếu cần có biến đổi tích phân : $W_m(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$. Để tín hiệu ra vượt trước được tín hiệu vào một thời gian τ_0 thì $W_m(j\omega) = e^{j\omega\tau_0}$.

$W_m(j\omega)$ có thể thực hiện theo nhiều định luật biến đổi khác nhau (III.4.3.4 [18])

Ở hình 9.8a có sơ đồ khối mà nhánh trên là hệ thống cần phân tích W(s), đầu vào là x(t) gồm có tín hiệu có ích u(t) và nhiễu cần lọc f(t), còn ở nhánh dưới là mô hình mẫu với đầu vào u(t) chỉ là tín hiệu có ích. Sơ đồ khối ở hình 9.8 là sơ đồ lý tưởng vì trong thực tế tín hiệu có ích u(t) không thể tách khỏi nhiễu f(t) (ngược lại nếu tách được u(t) khỏi f(t) thì đã không cần đặt ra bài toán lọc !)



Hình 9.8

Ở chương V phần tuyến tính [19] đã khảo sát trường hợp nhiễu f(t) và tín hiệu có ích u(t) là tiền định. Ở đây chúng mang tính chất ngẫu nhiên, chỉ biết được đặc tính thống kê của chúng. Có hai cách đặt bài toán tùy thuộc ở mức độ xác định của đặc tính đối tượng W(s).

9.2.2.1. Trường hợp đối tượng đã biết

Theo mô hình mẫu $W_m(s)$ và đặc tính thống kê của tín hiệu u(t) và f(t), xác định các thông số của đối tượng W(s) sao cho sai lệch quân phương $\overline{\varepsilon^2}(t)$ là cực tiểu. Trường hợp này liên quan với bài toán phân tích.

Sai lệch của hệ thống $\varepsilon(t)$ (hình 9.8a) có thể viết dưới dạng toán tử :

$$\varepsilon(s) = Z(s) - Y(s) = W_m(s)U(s) - W(s)\left[U(s) + F(s)\right] = \left[W_m(s) - W(s)\right]U(s) - W(s)F(s). \qquad (9-33)$$

Phương trình (9-33) tương ứng với hình 9.8b. Xem phổ của tín hiệu $\varepsilon(j\omega)$ (theo 9-33) như hiệu của phổ $V(j\omega) = \left[W_m(j\omega) - W(j\omega)\right]U(j\omega)$ và $E(j\omega) = W(j\omega)F(j\omega)$ tương ứng với (8-37), ta có :

$$S_\varepsilon(\omega) = S_v(\omega) + S_e(\omega) - 2\mathrm{Re}S_{ve}(j\omega). \qquad (9-34)$$

Áp dụng (9-13), (9-16) và (9-17) vào (9-33) ta tính được :

$$S_\varepsilon(\omega) = |W_m(j\omega) - W(j\omega)|^2 S_u(\omega) + |W(j\omega)|^2 S_f(\omega) - -2\mathrm{Re}\left[W_m(j\omega) - W(j\omega)\right]W(-j\omega)S_{fu}(j\omega) . \qquad (9-35)$$

Nếu u(t) và f(t) không tương quan nhau ($S_{fu}(j\omega) = 0$) thì :

$$S_\varepsilon(\omega) = S_u(\omega)\,|W_m(j\omega) - W(j\omega)|^2 + S_f(\omega)\,|W(j\omega)|^2. \qquad (9-36)$$

Thành phần thứ nhất là sự sai khác của tín hiệu bởi khâu $W(j\omega)$ so với mô hình mẫu $W_m(j\omega)$, còn thành phần thứ hai là do nhiễu.

Biểu thức (9-35) và (9-36) cho phép tính chính xác trị số quân phương của sai lệch cho bài toán biến đổi và lọc nhiễu :

$$\overline{\varepsilon}^2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(\omega)\,d\omega . \qquad (9-37)$$

Tích phân (9-37) được tính bằng cách xác định tổng của các tích phân dạng :

$$J_0 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{\infty} \frac{b(s)\,b(-s)}{a(s)\,a(-s)}\,ds \qquad (9-38)$$

cho ở Phụ lục B [19].

Ví dụ 9-4 Xác định sai số quân phương $\overline{\varepsilon}^2(t)$ khi nhiễu có phổ $S_f(\omega) = a^2$,

tín hiệu có ích $S_u(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$ và hệ có đặc tính tần $W(j\omega) = \dfrac{k}{1+j\omega T_1}$, mô hình mẫu $W_m(j\omega) = 1$ với điều kiện $S_{fu}(j\omega) = 0$.

Theo (9-36) :

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}\left|1 - \frac{k}{1+j\omega T_1}\right|^2 + a^2\left|\frac{k}{1+j\omega T_1}\right|^2 =$$

$$= \frac{[(1-k)+j\omega T_1][(1-k)-j\omega T_1]}{[(1+j\omega)(1+j\omega T_1)][(1-j\omega)(1-j\omega T_1)]} + \qquad (9\text{-}39)$$

$$\frac{a^2k^2}{(1+j\omega T_1)(1-j\omega T_1)}.$$

Thành phần thứ nhất là tích của hai phân số phức hợp với mẫu số bậc hai :

$$a_2(j\omega)^2 + a_1 j\omega + a_0 = T_1(j\omega)^2 + (T_1 + 1)j\omega + 1$$

còn tử số của thành phần thứ nhất :

$$b_1 j\omega + b_0 = T_1 j\omega + (1 - k)$$

Tích phân (9-38) của thành phần thứ nhất :

$$J_{01} = \frac{b_1^2 a_0 + b_0^2 a_2}{2a_0 a_1 a_2} = \frac{T_1^2 + (1-k)^2 T_1}{2T_1(T_1+1)} = \frac{T_1 + (1-k)^2}{2(T_1+1)} \qquad (9\text{-}40)$$

Thành phần thứ hai của (9-39) tương ứng với :

$$J_{02} = \frac{b_0^2}{2a_0 a_1} = \frac{a^2k^2}{2T_1}. \qquad (9\text{-}41)$$

Như vậy :

$$J_0 = J_{01} + J_{02} = \frac{T_1 + (1-k)^2}{2(T_1+1)} + \frac{a^2k^2}{2T_1}. \qquad (9\text{-}42)$$

Thành phần thứ nhất là sai số do quán tính của hệ mà tần số cao không qua được, còn thành phần thứ hai là do nhiễu.

Ví dụ 9-5 Với điều kiện của ví dụ 9-4, xác định T_1 và k tương ứng với sai số quân phương (9-42) là nhỏ nhất.

Vì với $k < 1$, khi tăng k thành phần thứ nhất của (9-42) giảm còn

thành phần thứ hai lại tăng, cho nên tồn tại trị số tối ưu của k mà sai số nhỏ nhất.

Trị số tối ưu k^* xác định từ (9 –42) :

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}(t)}{\partial k} = -\frac{1-k}{1-T_1} + \frac{a^2k}{T_1} = 0 \qquad (9\text{–}43)$$

vậy :

$$k = k^* = \frac{T_1}{a^2(1+T_1)+T_1} . \qquad (9\text{–}44)$$

Trị số $T_1 = T^*_1$ cũng xác định như trên :

$$\frac{\partial\overline{\varepsilon^2}(t)}{\partial T_1} = \frac{k(2-k)}{2(1+T_1)^2} - \frac{a^2k^2}{2T_1^2} = 0 \qquad (9\text{–}45)$$

vậy :

$$T_1 = T^*_1 = \frac{ak}{\sqrt{k(2-k)-ak}} . \qquad (9\text{–}46)$$

Kết hợp (9 –44) và (9 –46) và sau một vài biến đổi ta có :

$$k^* = 1 - T^*_1 ;$$

mà

$$T^*_1 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} . \qquad (9\text{–}47)$$

Trường hợp riêng, khi cường độ nhiễu và tín hiệu có ích như nhau nghĩa là khi a = 1, ta có :

$$k^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} ; \; T_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Khi không có nhiễu, a = 0 :

$$k^* = 1 ; \; T_1^* = 0$$

tương ứng với trường hợp hệ là một khâu khuếch đại với hệ số bằng 1.

9.2.2.2. Trường hợp đối tượng W(s) chưa biết

Đây là bài toán tổng hợp tối ưu theo độ chính xác khi tác động là ngẫu nhiên dừng.

Ở trường hợp thứ nhất, cấu trúc của hệ đã biết, nhiệm vụ là xác định thông số (k và T) tối ưu. Trong trường hợp này cấu trúc của hệ tuyến tính không cho trước nên là bài toán tổng quát.

Bài toán này được Kolmogorov A. N. và Winer N. đặt ra, sau đó

Bode G., Shanon K., Pougatsov V. C, Solodovnhicov v.v.., Felbaum A. A. phát triển và đưa vào ứng dụng.

Hãy khảo sát hệ điều khiển theo hình 9.8a đối với phổ $\varepsilon(j\omega)$. Theo (9 -33) ta có :

$$\varepsilon(j\omega) = W_m(j\omega)\,U(j\omega) - W(j\omega)X(j\omega). \qquad (9\text{-}48)$$

chuyển sang mật độ phổ, tương tự như ở (9 -35) ta có :

$$S_\varepsilon(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) - 2\mathrm{Re}W_m(j\omega)W(-j\omega)\,S_{xu}(j\omega) + \\ + |W_m(j\omega)|^2 S_u(\omega)\ . \qquad (9\text{-}49)$$

Bằng cách thêm và bớt ở biểu thức trên thành phần sau :

$$|W_m(j\omega)|^2 \frac{|S_{xu}(j\omega)|^2}{S_x(\omega)}$$

Sau khi biến đổi, ta có :

$$S_\varepsilon(\omega) = \left| W(j\omega) - \frac{W_m(j\omega)\,S_{xu}(j\omega)}{S_x(\omega)} \right|^2 S_x(\omega) + \\ + |W_m(j\omega|^2 \left(1 - \frac{|S_{xu}(j\omega|^2}{S_x(\omega)\,S_u\omega)} \right) S_u(\omega). \qquad (9\text{-}50)$$

Để cực tiểu hóa $S_\varepsilon(\omega)$ cũng như $\overline{\varepsilon}^2(t)$, cần xác định $W(j\omega)$ sao cho thành phần thứ nhất ở vế phải của (9-50) là cực tiểu. Thành phần thứ hai thực và dương, không phụ thuộc $W(j\omega)$ nên việc chọn $W(j\omega)$ không ảnh hưởng đến thành phần này.

Vì thành phần thứ nhất là một đại lượng thực và dương nên điều kiện cực tiểu là thành phần này bằng 0 ; từ đó rút ra điều kiện tối ưu :

$$W(j\omega) = W_{tu}(j\omega) = \frac{W_m(j\omega)\,S_{xu}(j\omega)}{S_x(\omega)}\ . \qquad (9\text{-}51)$$

Nếu nhiễu và tín hiệu có ích không tương quan nhau và $S_{fu}(j\omega) = 0$ thì $S_{xu}(j\omega) = S_u(\omega)$ và $S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_f(\omega)$. Trong điều kiện ấy, (9 -51) có dạng :

$$W(j\omega) = W_{tu}(j\omega) = \frac{W_m(j\omega)\,S_u(\omega)}{S_u(\omega) + S_f(\omega)}\ . \qquad (9\text{-}52)$$

Như vậy, nếu không có điều kiện ràng buộc nào đặt ra thì hệ $W(j\omega)$ sẽ tối ưu theo cực tiểu của sai lệch quân phương và biểu thức (9-51) hay (9-52) cho phép xác định $W_{tu}(j\omega)$. Tuy nhiên đáp án toán học ở đây lại mâu thuẫn với điều kiện thực hiện.

Ví dụ 9-6 Hãy xác định hàm truyền tối ưu $W_{tu}(j\omega)$ nếu :

$$W_m(j\omega) = 1 \; ; \; S_u(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \; ; \; S_f(\omega) = 1 \; ; \; S_{fu}(j\omega) = 0$$

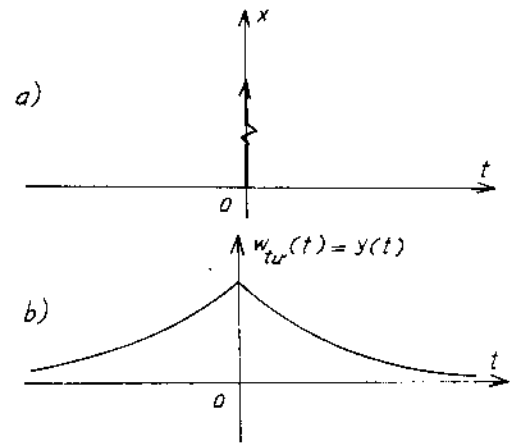
Theo (9-52) ta có :

$$W_{tu}(j\omega) = \frac{1}{2+\omega^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}+j\omega)(\sqrt{2}-j\omega)} \qquad (9\text{-}53)$$

Biểu thức này tương ứng với hai khâu quán tính nối tiếp, một trong hai khâu là không ổn định và ở các thiết bị thực tế không thực hiện được. Khả năng không thực hiện được của (9-53) thể hiện rõ khi chuyển từ $W_{tu}(j\omega)$ sang hàm trọng lượng của nó :

$$w_{tu}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+\omega^2} e^{j\omega t}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-|t|\sqrt{2}} . \qquad (9\text{-}54)$$

Đồ thị của đáp ứng $y(t) = W_{tu}(t)$ đối với xung đơn vị $x(t) = \delta(t)$ như ở hình 9.9a, b. Như ở hình 9.9b để thực hiện hàm trọng lượng như vậy, tín hiệu ở đầu ra phải xuất hiện khá lâu trước khi đặt tín hiệu xung ở đầu vào. Như vậy hậu quả có trước nguyên nhân là điều không thể thực hiện được.



Hình 9.9

Điều kiện thực hiện được của $W_{tu}(j\omega)$

Để tìm giá trị tối ưu của $W_{tu}(j\omega)$ có tính đến điều kiện thực hiện được, người ta dùng phương pháp xuất phát từ lý thuyết Kolmogorov-

Winer. Nội dung của phương pháp này là tách $W_{tu}(j\omega)$ ra làm hai thành phần : thành phần thực hiện được và thành phần không thực hiện được.

Sau đây sẽ đề cập đến phương pháp này mà không chứng minh.

Nếu biết $W_{tu}(j\omega)$ theo 9–51, còn $S_x(\omega)$ xem như tích của hai hàm liên hợp $\Psi(j\omega)$ và $\Psi(-j\omega)$ mà thành phần thứ nhất có dải tần ở nửa mặt phẳng trên, còn thành phần thứ hai ở nửa mặt phẳng dưới :

$$S_x(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega). \qquad (9\text{–}55)$$

Hàm $\Psi(j\omega)$ tương ứng với khâu tuyến tính ổn định thực hiện được, biến đổi ồn trắng ở tín hiệu x(t) ở đầu vào của hệ tuyến tính cần tổng hợp. Hàm $\Psi(-j\omega)$ tương ứng với thành phần không thực hiện được.

Quá trình biến $S_x(\omega)$ thành một tích $\Psi(j\omega)\Psi(-j\omega)$ và làm nổi bật nhân tử $\Psi(j\omega)$ gọi là *nhân tử hóa.*

Như vậy :

$$W_{tu}(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \frac{W_m(j\omega)\, S_{xu}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} . \qquad (9\text{–}56)$$

Làm nổi bật nhân tử $\frac{1}{\Psi(j\omega)}$ tương ứng với việc quy đổi ồn trắng về đầu vào và khảo sát tác động của ồn trắng đối với khâu không thực hiện được có đặc tính $\frac{W_m(j\omega)\, S_{xu}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)}$.

Bước thứ hai là *phân cách hóa,* nghĩa là phân hàm $\Psi(j\omega)W_{tu}(j\omega)$ thành hai thành phần $R(j\omega)$ và $N(-j\omega)$ có cực nằm phía trên và phía dưới của nửa mặt phẳng :

$$\Psi(j\omega)W_{tu}(j\omega) = \frac{W_m(j\omega)\, S_{xu}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} = R(j\omega) + N(-j\omega). \qquad (9\text{–}57)$$

Thành phần thứ nhất tương ứng với hàm truyền thực hiện được và phần thứ hai tương ứng với hàm truyền không thực hiện được. Bằng cách loại bỏ thành phần không thực hiện được ta có đặc tính thực hiện được của hệ :

$$W_{tu.th}(j\omega) = R(j\omega)/\Psi(j\omega). \qquad (9\text{–}58)$$

Công thức này là công thức Kolmogorov–Winer dùng để xác định hệ tối ưu với sai lệch quân phương cực tiểu. Nếu $W(j\omega)$ được chọn theo (9 – 58) thì mật độ phổ theo (9 –50) có dạng :

$$S_\varepsilon(\omega) = \left|\frac{N(-j\omega)}{\Psi(j\omega)}\right|^2 S_x(\omega) + |W_m(j\omega)|^2\left[S_u(\omega) - \frac{|S_{xu}(j\omega)|^2}{S_x(\omega)}\right] \quad (9\text{-}59)$$

Ví dụ 9 – 7 Xác định $W_{tu}(j\omega)$ từ ví dụ 9–6 có tính đến điều kiện thực hiện được :

Theo (9 –55) thực hiện bước nhân tử hóa :

$$S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_f(\omega) = \frac{2+\omega^2}{1+\omega^2} =$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}+j\omega}{1+j\omega}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-j\omega}{1-j\omega}\right) = \Psi(j\omega)\,\Psi(-j\omega) \quad (9\text{-}60)$$

Theo (9 –57) thực hiện bước phân cách hóa :

$$\frac{W_m(j\omega)\,S_{xu}(j\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \frac{(1-j\omega)}{(1+\omega^2)(\sqrt{2}-j\omega)} = \frac{1}{(1+j\omega)(\sqrt{2}-j\omega)}$$

$$= R(j\omega) + N(-j\omega) = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{\sqrt{2}-j\omega}\,. \quad (9\text{-}61)$$

Để xác định A và B, giải phương trình

$$A(\sqrt{2} - j\omega) + B(1 + j\omega) = 1 \quad (9\text{-}62)$$

Từ đó : $A = B = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$ và $R(j\omega) = \dfrac{1}{(1+\sqrt{2})(1+j\omega)}$.

Cuối cùng theo (9–58) ta có :

$$W_{tu.th}(j\omega) = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+j\omega)} = \frac{1}{(2+\sqrt{2})(1+j\frac{\omega}{\sqrt{2}})}\,. \quad (9\text{-}63)$$

So sánh với kết quả ở ví dụ 9–5 với a = 1, ta sẽ có sự trùng hợp hoàn toàn. Như vậy ở ví dụ 9–8, cấu trúc đã được giả thiết (khâu quán tính) là tối ưu đối với ví dụ này.

9.3. DÙNG MÁY TÍNH ĐỂ TỔNG HỢP HỆ

9.3.1. BỘ ĐIỀU CHỈNH LQG

Mục đích điều chỉnh là duy trì tín hiệu ra ở lân cận trị số không (chênh lệch khỏi trị số mong muốn thể hiện ở chỗ không đưa vào tín hiệu đặt như thường dùng). Đối tượng được điều khiển bởi nhiễu w của

quá trình và điều khiển u bộ điều chỉnh dựa vào nhiễu đo được $y_v = y + v$ để tạo nên tín hiệu điều khiển. Phương trình trạng thái của hệ :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw ;$$

$$y_v = Cx + Du + Hw + v,$$

w, v là nhiễu dạng ồn trắng. Bộ điều chỉnh LQG (Tuyến tính – Bình phương – Gauss) gồm có hệ số hồi tiếp tối ưu K và bộ ước lượng trạng thái Kalman.

Hàm tổn thất dạng :

$$J(u) = \int_0^\infty \{x'Qx + 2x'Nu + u'Ru)dt.$$

Q, N, R là các ma trận trọng số do người thiết kế xác định theo chỉ tiêu chất lượng và yêu cầu điều khiển.

Ở bước thứ nhất luật hồi tiếp $u = -Kx$ cực tiểu hóa hàm tổn thất J(u). Ma trận K được xác định theo phương trình Riccati (11–2–4 [18]) :

Bộ ước lượng trạng thái (VII.5.4 [19], V.6 [20]) :

$$x = Ax + Bu + L(y_v - Cx - Du).$$

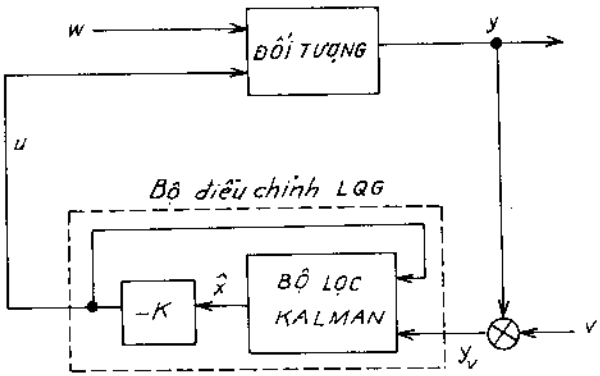
Hàm tương quan của nhiễu :

$$M\{w\,w'\} = Q_n \; ; \; M\{v\,v'\} = R_n \; ; \; M\{w\,v'\} = N_n$$

xác định L qua phương trình Riccati.

Bộ lọc Kalman là bộ ước lượng tối ưu với nhiễu là ồn trắng phân bố Gauss. Bộ lọc Kalman cực tiểu hóa :

$$\lim_{T\to\infty} M\{(x - x)(x - x)'\} .$$



Hình 9.10

Bộ điều chỉnh LQG hình thành bằng cách nối bộ lọc Kalman với ma trận tối ưu bình phương tuyến tính K như ở hình 9.10.

$$\dot{\hat{x}} = \left[A - LC - (B - LD)K\right]\hat{x} + Ly_v \;;$$
$$u = -K\hat{x}. \qquad \text{với } n$$

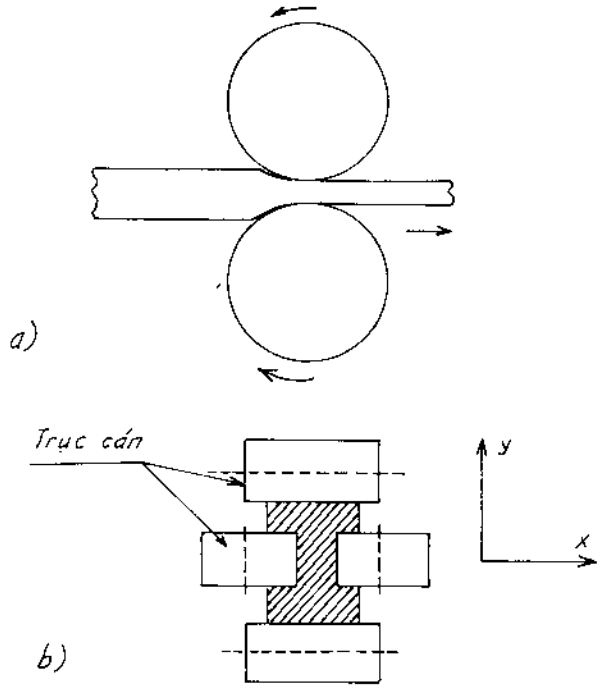
Công cụ tổng hợp LQG theo MATLAB như ở Phụ lục D-5.

Ví dụ 9-8 Mô hình quá trình cán thép và nhiễu.

Ở hình 9.11a có hình vẽ phôi và hai trục cán. Ở hình 9.11b có hình vẽ cả bộ trục cán gồm hai trục cán cho hướng x và hai trục cho hướng y. Độ dày của phôi ở đầu ra được xác định bởi :

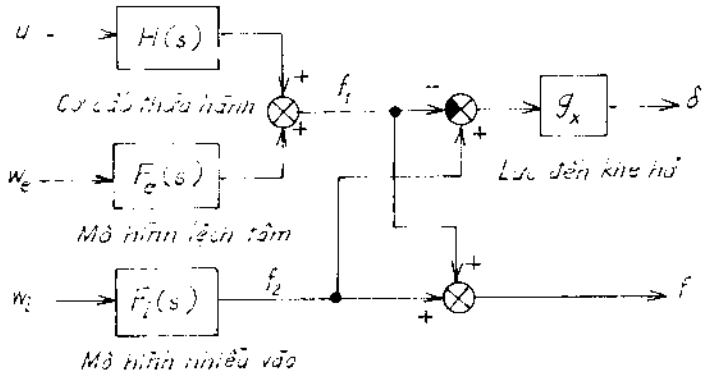
- Biến đổi của độ dày/độ cứng ở đầu vào phôi.
- Độ lệch tâm của trục.

Điều khiển với hồi tiếp dùng để giảm ảnh hưởng của các nhiễu nói trên. Vì khe hở ở trục cán không đo trực tiếp ở máy cán nên dùng lực của trục thay cho hồi tiếp. Nhiễu vào đối với độ dày được mô hình như



Hình 9.11

bộ lọc hạ tần có ồn trắng tác động. Nhiễu lệch trục hầu như có chu kỳ và tần số là hàm của tốc độ trục cán. Sơ đồ khối được mô tả như ở hình 9.12.



Hình 9.12. u - điều khiển ; δ - độ dày ; f - lực tăng ở trục cán; w_i, w_e - ồn trắng đối với mô hình của nhiễu.

Mô hình ở trục x

$$H_x(s) = \frac{2,4 \cdot 10^8}{s^2 + 72s + 90^2} ;$$

$$F_{ix}(s) = \frac{10^4}{s + 0,05} ;$$

$$F_{ex}(s) = \frac{3 \cdot 10^4 s}{s^2 + 0,125s + 6^2} ;$$

$$g_x = 10^{-6} .$$

Mô hình ở trục y

$$H_y(s) = \frac{7,8 \cdot 10^8}{s^2 + 71s + 88^2} ;$$

$$F_{iy}(s) = \frac{2 \cdot 10^4}{s + 0,05} ;$$

$$F_{ey}(s) = \frac{10^5 s}{s^2 + 0,19s + 9,4^2} ;$$

$$g_y = 0,5 \cdot 10^{-6}.$$

Bước đầu tiên bỏ qua các liên hệ chéo giữa trục x và y ; xét độc lập theo từng trục.

9.3.1.1. Tổng hợp LQG theo trục x

Có thể dùng phương pháp quỹ đạo nghiệm số hay phương pháp phân bố nghiệm (IV.3 [19]) và dùng các lệnh tương ứng ở MATLAB "rlocus" hay "place" để xác định ma trận hồi tiếp K. Ở đây xác định ma trận trạng thái hồi tiếp theo LQ tối ưu (các lệnh "dlqr", và "lqry"), xác định bộ lọc Kalman ("Kalman") và hợp thành bộ điều chỉnh LQG ("lqgreg"). Mục tiêu là giảm biến đổi về độ dày δ_x và δ_y do lệch tâm trục và nhiễu thuộc độ dày đầu vào của phôi.

Trước tiên lập các mô hình ở trục x theo sơ đồ khối ở hình 9.12. Có thể kiểm tra lại các đầu vào ra theo lệnh sau :

```
% Mô hình theo trục x
Hx=tf(2,4e8,[1 72 90^2],'inputaname','u-x');
Fix=tf(1e4,[1 0.05],'inputn','w-ix');
Fex=tf[3e4 0],[1 0.125 6^2]; 'inputn','w-ex');
gx=1e-6;
% I/O từ các đầu vào đến lực f1 và f2
Px=append([ss(Hx) Fex], Fix);
% Đưa hệ số gx từ f1,f2 đến đầu ra "x-gap" và "x-force"
Px=[-gx gx;[1 1]*Px;
% Đặt tên cho đầu ra
set(Px,'outputn',{'x-gap' 'x-force'});
% Kiểm tra lại
Px.inputname
ans=
        'u-x'
        'w-ex'
        'w-ix'
Px,outputname
ans=
        'x-gap'
        'x-force'
```

Tiếp đến, trên cơ sở cực tiểu hóa chỉ tiêu chất lượng :

$$J(u_x) = \int_0^\infty \left\{q\delta_x^2 + ru_x^2\right\} dt$$

mà xác định K. Bộ lọc hạ tần được dùng là bộ lọc được chọn. Đặc tính tần Bode được mô tả ở hình 9.13 :

```
% Dùng bộ lọc hạ tần 30/(s + 30) đối với chỉ tiêu chất lượng
      bình phương tuyến tính LQ
lpf=tf(30,[1 30]);
% Nối bộ lọc với đầu vào thứ nhất của Px
Pxdes=append(lpf,1)*Px;
Set(Pxdes,'outputn',{x-gap*' 'force'});
% Xác định K dùng LQRY với q=1, r=1e-4
kx=lqry(Pxdes(1,1), 1,1e-4);
% Tổng hợp bộ ước lượng Kalman, với nhiễu có cường độ bằng1,
tần số giới hạn đến 1000
estx=kalman(Pxdes(2,:),eye(2),1000);
% Nối K với bộ ước lượng để có bộ đ/cLQG
Regx=lqgreg(estx,kx);
% Xem đáp ứng tần Bode;w=0,1-1000rad/sec
bode(Regx,{0.1 1000})
```

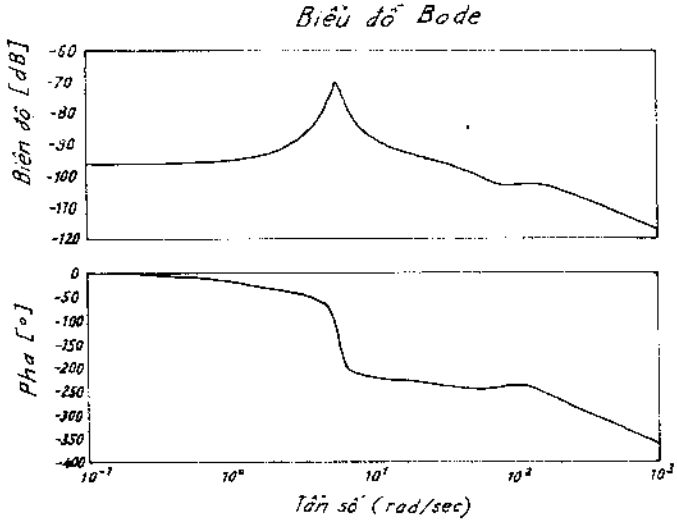
Khi độ dày đầu vào tăng, nhiễu tần số thấp sẽ nâng lực ở đầu ra, lực cán sẽ chống lại sự tăng độ dày. Dao động lệch trục làm thay đổi khe hở trục cán. Khi khe hở cực tiểu, lực trục cán tăng và độ dày đầu ra giảm. Lực nén của cơ cấu thủy lực sẽ giảm để giữ độ dày đầu ra mong muốn. Đó là tính năng của bộ điều chỉnh LQG ở vùng $\varphi \approx 180^o$ (6 rad/sec) là vùng tần số riêng của nhiễu lệch trục.

Để so sánh đáp ứng tần của hệ hở và kín từ nhiễu đến độ dày đầu ra, ta kiểm tra lại các mối liên hệ vào – ra giữa đối tượng Px và bộ điều chỉnh Regx.

Đặc tính Bode của hệ kín nhiễu ở hình 9.14.

```
% Kiểm tra lại các đầu vào, ra
Px.inputname
```

```
ans=
        'u-x'
        'w-ex'
        'w-ix'
Reg.outputname
ans=
        'u-x'
Px.outputname
ans=
        'x-gap'
        'x-force'
Regx,inputname
ans=
        'x-force'
```



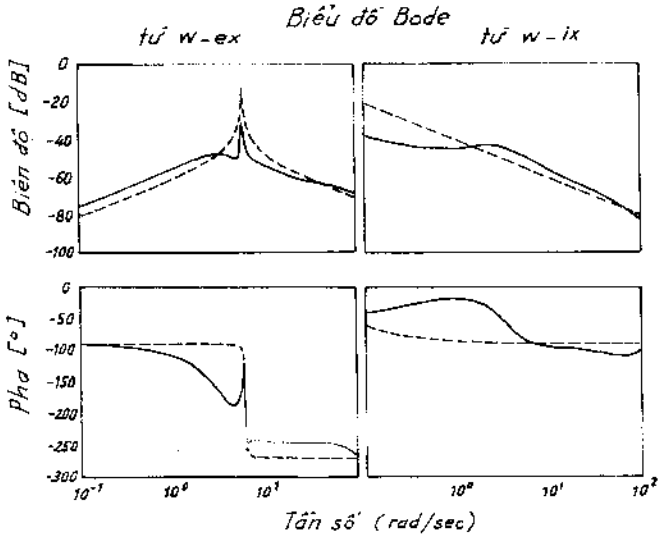
Hình 9.13

% Nối đầu vào 1 và đầu ra 2 của Px với bộ điều chỉnh

clx=feedback(Px,Regx,1,2,+1)

% So sánh hệ hở và kín theo :

bode(Px(1,2:3),'-',clx(1,2:3),'-',(0,1100))

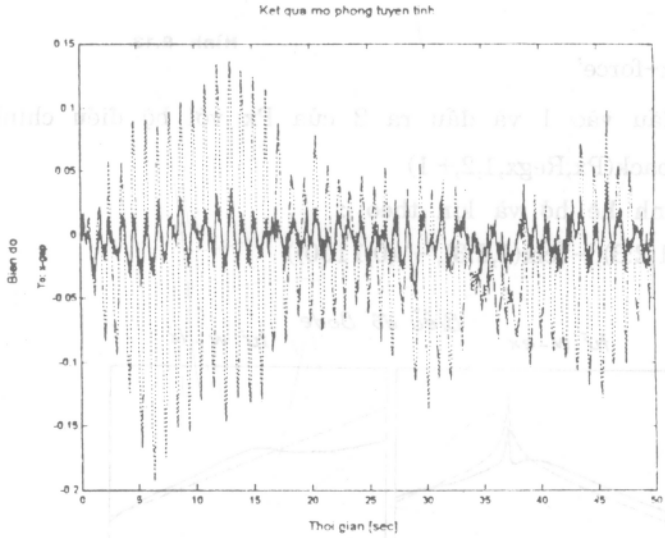


Hình 9.14

Đường nét đứt là đáp ứng của hệ hở. Biên độ cực đại của đáp ứng lệch trục và biên độ hạ tần của đáp ứng về độ dày phôi được giảm đi khoảng 20 db.

Cuối cùng dùng "lsim" để mô phỏng đáp ứng thời gian của hệ hở và hệ kín đối với nhiễu là ồn trắng w_{ex} và w_{ix}. Chọn dt = 0,01 là thời gian lấy mẫu.

```
dt=0,01;
t=0:dt:50;
% Tạo nhiễu wx=[w-ex;w-ix]
% Phương sai gián đoạn tương đương : 1/dt
wx=sqrt(1/dt)*randn(2,length(t));
lsim(Px(1,2:3),':',clx(1,2:3),'-',wx,t)
```

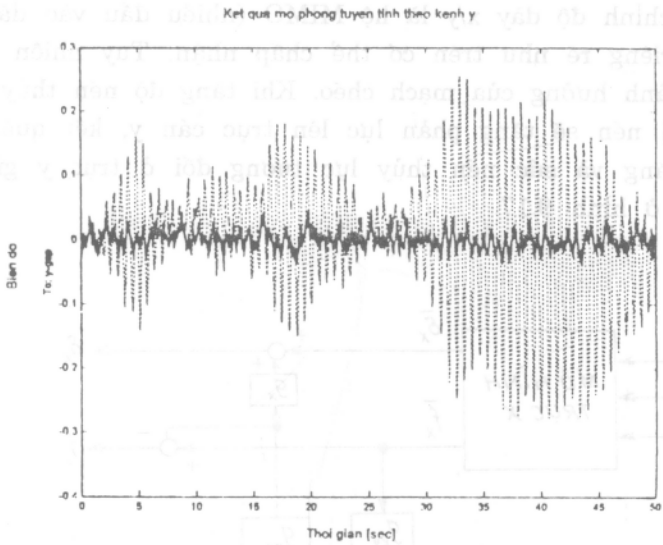


Hình 9.15

Ở hình 9.15 đường nét đứt tương ứng với đáp ứng của hệ hở. Bộ điều chỉnh LQG đã giảm biến đổi cực đại của độ dày 4 lần.

9.3.1.2. Tổng hợp LQG theo trục y

Việc tổng hợp theo trục y hoàn toàn giống như ở trục x. Ở đây chỉ nêu lên những chương trình chính và kết quả mô phỏng như ở hình 9.16.

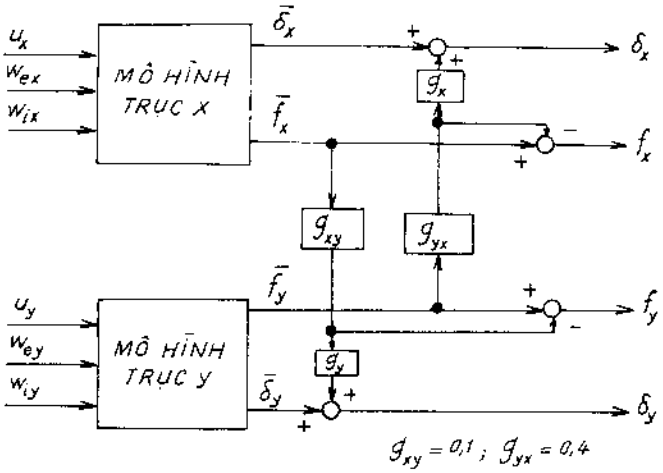


Hình 9.16

```
Hy=tf(7.8e8,[1  71  88^2],'inputn','u-y');
Fiy=tf(2e4, [1  0.05],'inputn','w-iy');
Fey=tf([1e5  0], [1  0.19  9.4^2];'inputn','w-ey');
Gy=0.5e-6;
Py=append([ss(Hy)  Fey],Fiy);
Py=[-gy  gy; 1  1]*Py;
Set(Py,'outputn',{'y-gap' 'y-force'});
Pydes=append(lpf,1)*Py;
Set(Pydes,'outputn',{'y-gap*' 'y-force'});
Ky=lqry(Pydes(1,1),1,1e-4);
Esty=kalman(Pydes(2,:),eye(2),le3);
Regy=lqgreg(esty,ky);
Cly=feeback(Py,Regy,1,2,+1;
dt=0,01;
t=0:dt:50;
wy=sqrt(1/dt)*randn(2,length(t));
lsim(Py(1,2:3),':',cly(1,2,3),'-',wy,t)
```

9.3.1. Nối chéo giữa hai trục

Hệ điều chỉnh độ dày x/y là hệ MIMO (nhiều đầu vào đầu ra). Việc tổng hợp hệ riêng rẽ như trên có thể chấp nhận. Tuy nhiên ở máy cán còn thể hiện ảnh hưởng của mạch chéo. Khi tăng độ nén thủy lực ở trục x, phôi cán bị nén sẽ tăng phản lực lên trục cán y, kết quả là độ dày theo trục y tăng và sức nén thủy lực tương đối ở trục y giảm. Sơ đồ nối chéo như ở hình 9.17.



Hình 9.17

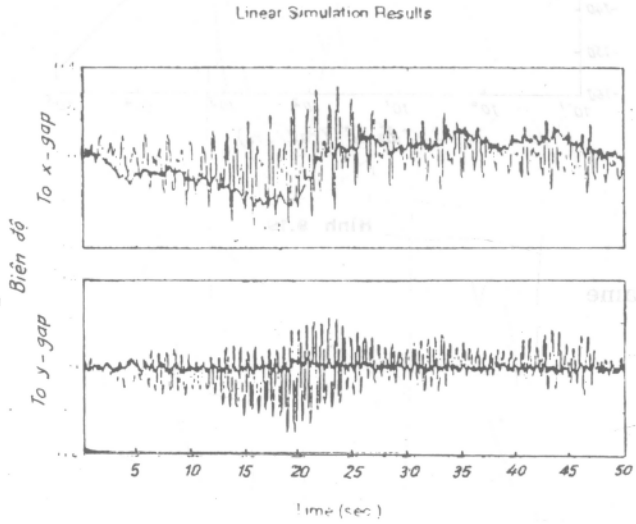
Độ dày và lực trục (δ_x, δ_y và f_x, f_y) liên hệ với tín hiệu ra ($\bar{\delta}_x$, $\bar{f}_x$, $\bar{\delta}_y$, $\bar{f}_y$) của mô hình trục x và y như sau :

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & g_{yx}g_x \\ 0 & 1 & g_{xy}g_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -g_{yx} \\ 0 & 0 & -g_{xy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\delta}_x \\ \bar{\delta}_y \\ \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{bmatrix}$$

Nối hai mô hình Px và Py và sắp xếp đầu vào đầu ra sao cho các điều khiển và độ dày đầu ra của phôi xuất hiện, trước tiên ta dùng lệnh :

```
P=append(Px,Py);
P=P([1 3 2 4],[1 4 2 3 5 6]);
P.outputname
```

```
ans=
        'x-gap'
        'y-gap'
        'x-force'
        'y-force'
% Nối ma trận chéo với đầu ra;
cho trước: gxy=0,1 và gyx=0,4
gxy=0.1; gyx=0.4;
CCmat=[eye(2)[0 gyx*gx;gxy*gy 0];
        ..zeros(2) [1 -gyx;-gxy 1];
Pc=CCmat*P;
Pc.outputname=P.outputname
% Nối kín mạch và mô phỏng đáp ứng
feedin=1:2; feedout=3:4;
cl=feedback(Pc,append(Regx,Regy),...
        ..feedin, feedout, +1)
wxy=[wx;wy];
lsim(Pc(1:2,3:6);':',cl(1:2,3:6),'-',wxy,t
```



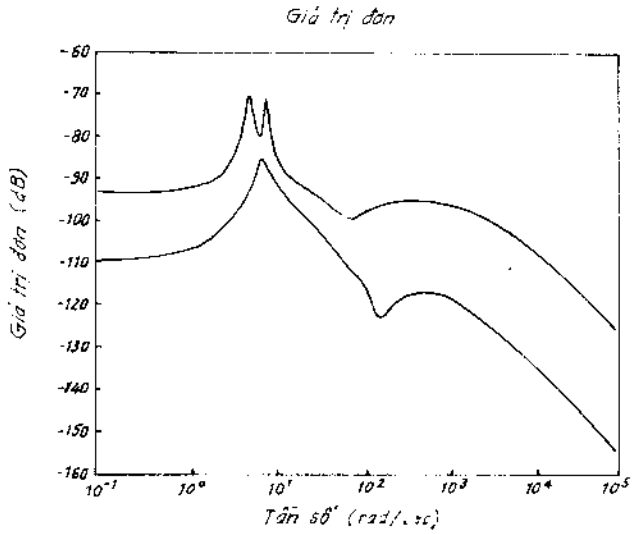
Hình 9.18

Chất lượng của hệ theo trục x đã giảm rõ rệt (biến đổi về độ dày ở đầu ra của phôi có giá trị cực đại khoảng bốn lần lớn hơn khi chưa nối mạch chéo). Do đó cần tính đến liên hệ chéo khi thiết kế hệ thống và dùng phương pháp đối với hệ nhiều chiều (MIMO) để có chất lượng cao, hơn là tổng hợp riêng rẽ từng mạch và nối chéo chúng lại với nhau như đã làm.

4- Tổng hợp MIMO LQG

Bắt đầu từ mô hình trạng thái tổng thể của hệ hai trục P_c đã xác định trên với đầu vào và ra như sau :

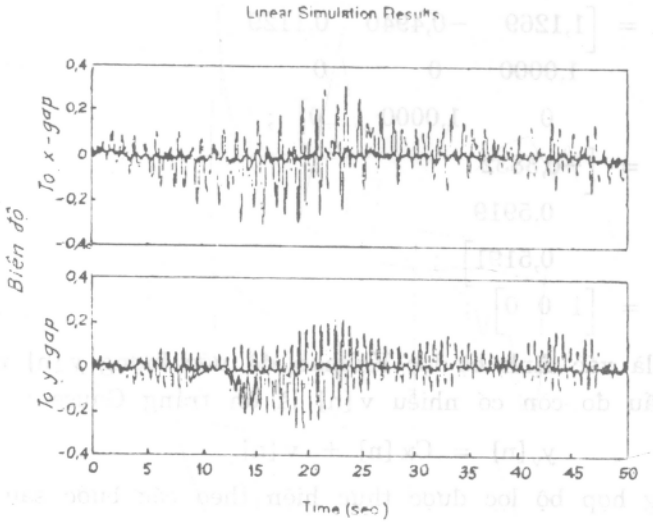
Ò hình 9.19 có đáp ứng chính của hệ.



Hình 9.19

```
Pc.inputname
ans=
   'u-x'
   'u-y'
   'w-ex'
   'w-ix'
```

```
    'w-ey'
    'w-iy'
Poutputname
ans=
    'x-gap'
    'ygap'
    'x-force'
    'y-force'
Pdes=append(lpf,lpf,eye(2))*Pc;
Pdes.outputn=Pc.outputn;
K=lqry(Pdes(1:2,1:2)eye(2),4*-4*eye(2));
Est=kalman(Pdes(3:4 ,:),eye(4),1e3*eye(2));
RegMIMO=logreg(est,k);
RegMIMO.inputname
ans=
    'x-force'
    'y-force'
```



Hình 9.20

```
RegMIMO.outputname
ans=
   'u-x'
   'u-y'
sigma(RegMIMO)
% Lập mô hình hệ kín
cl=feedback(Pc,RegMIMO,1:2,3:4,+1);
% Mô phỏng với cùng nhiễu ngẫu nhiên ở đầu vào
lsim(Pc(1:2,3:6),':',cl(1:2,3:6);'-',wxy,t)
```

Ở hình 9.20 có đặc tính mô phỏng ở hai trục x và y. Rõ ràng là chất lượng tổng hợp theo MIMO cao hơn so với SISO riêng rẽ như ở phần trước.

9.3.2. BỘ LỌC KALMAN

Ví dụ có đối tượng mô tả bằng phương trình trạng thái gián đoạn :

$$x[n+1] = Ax[n] + B\left(u[n] + w[n]\right) \text{ – phương trình trạng thái.}$$

$$y[n] = Cx[n] \text{ – phương trình đo.}$$

với nhiễu Gauss w[n] ở đầu vào cùng với u[n].

Cho trước : $A = \begin{bmatrix} 1{,}1269 & -0{,}4940 & 0{,}1129 \\ 1{,}0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0000 & 0 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} -0{,}3832 \\ 0{,}5919 \\ 0{,}5191 \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

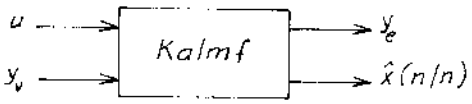
Mục tiêu là xác định bộ lọc Kalman để ước lượng y[n] mà đầu vào là u[n] ; ở đầu đo còn có nhiễu v[n] là ồn trắng Gauss :

$$y_v[n] = Cx[n] + v[n].$$

Quá trình tổng hợp bộ lọc được thực hiện theo các bước sau .

Xác định mô hình đối tượng (dấu – 1 ở thời gian lấy mẫu chứng tỏ mô hình là gián đoạn).

```
Plant=ss(A,[BB],C,0,-1,'inputname',...
        {'u' 'w'},'outputname','y');
% Giả thiết Q=R=1, xác định bộ lọc
Kalman gián đoạn
Q=1; R=1;
[kalmf,L,P,M]=kalman(Plan,Q,R);
M
M=
        3.7980e-01
        8.1732e-02
        -2,5704e-01
```



Hình 9.21

M là hệ số sai số được chọn sao cho phương sai trạng thái dừng của sai số ước lượng là nhỏ nhất.

$$Q = M\{(w(n)\, w(n)')\} \;;$$
$$R = M\{v(n)\, v(n)'\}.$$

Đầu vào của bộ lọc Kalmf là u và y_v, còn đầu ra là đầu ra của đối tượng và ước lượng trạng thái :

$$y_e = \hat{y}(n \mid n) \quad \text{và} \quad \hat{x}(n \mid n) \;.$$

Vì ước lượng đầu ra y_e là cần quan tâm nên chỉ giữ một đầu ra của kalmf và dùng lệnh :

```
kalmf=kalmf(1,:);
kalmf
a=
            x1_e        x2_e        x3_e
   x1_e   0.76830    -0.49400     0.11290
   x2_e   0.62020     0           0
   x3_e  -0.08173     1.00000     0
b=
            u           y
   x1_e  -0.38320     0.35860
   x2_e   0.59190     0.37980
   x3_e   0.51910     0.08173
```

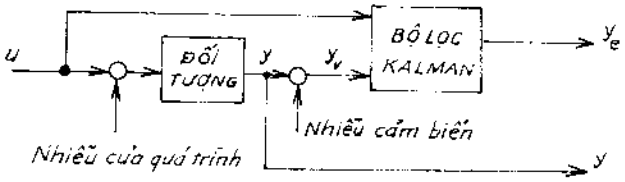
c=

	x1_e	x2_e	x3_e
y_e	0.62020	0	0

d=

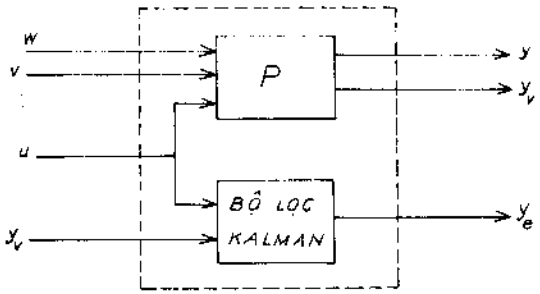
	u	y
y_e	0	0.37980

Để quan sát bộ lọc làm việc, đưa vào đầu vào tín hiệu u và nhiễu ngẫu nhiên để so sánh đáp ứng đã lọc và đáp ứng thực. Sơ đồ thực hiện như ở hình 9.22.



Hình 9.22

Mô hình trạng thái trên có thể thực hiện bằng cách nối song song hay nối tiếp. Trước tiên xây dựng mô hình tổng thể với đầu vào u, w, v còn đầu ra là y và y_v, sau đó dùng cách nối song song như ở hình 9.23.



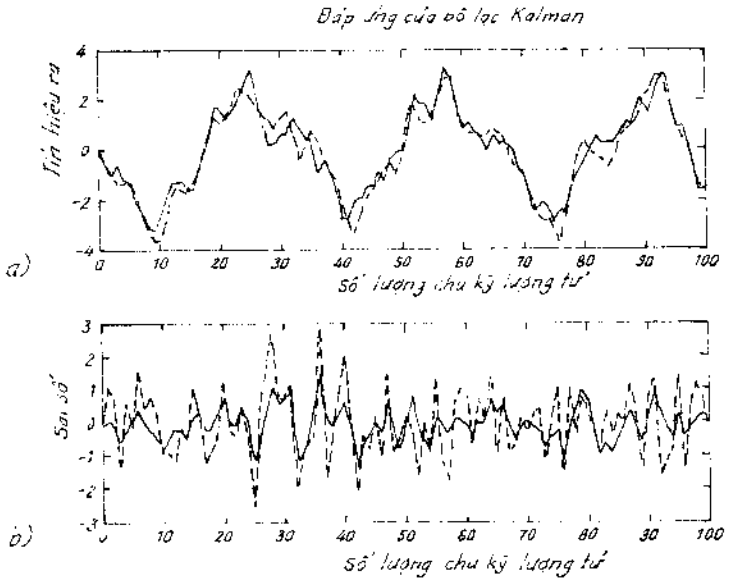
Hình 9.23

```
a=A;
b=[B  B  0*B];
c=[C;C];
d=[0  0  0;0  0  1];
P=ss(a,b,c,d,-1,'inputname',{'u'w'v'},...
                    'outputname',{'y'  'yv'});
sys=parallel(P,kalmf,1,1,[ ],[ ]);
```

Nối kín mạch cảm biến bằng cách nối y_v của đối tượng (ở đầu ra) đến y_v bộ lọc (đầu vào) bằng hồi tiếp dương. Tạo tín hiệu vào dạng sin đưa vào đối tượng và bộ lọc cũng như đưa nhiễu của quá trình và nhiễu đo lường (w và v) vào hệ cuối cùng, có thể vẽ và so sánh tín hiệu ra cũng như sai lệch khi không có và có bộ lọc.

```
% Nối đầu vào #4 với đầu ra #2
SimModel=feedback(sys,1,4,2,1);
% Loại yv khỏi I/O
SimModel=SimModel([1  3], [1  2  3]);
SimModel.input
ans=
        'w'
        'v'
        'u'
SimModel.output
ans=
        'y'
        'y_e'
t=[0:100];
u=sin(t/5);
n=length(t);
randn('seed',0);
w=sqrt(Q)*randn(n,1);
v=sqrt(R)*randn(n,1);
[out,x]=lsim(SimModel,[w,v,u]);
```

```
y=out(:,1); % đáp ứng thực
ye=out(:,2); % đáp ứng đã lọc
yv=y+ v; % đáp ứng đo được
subplot(21 1),plot(t,y,'--',t,ye,'-'),
xlabel('Số lượng chu kỳ lượng tử),
ylabel("Tín hiệu ra'), Title ('Đáp ứng của bộ lọc Kalman')
subplot(212),phot(t,y--yv,'-',t,y-ye,'-')
xlabel('Số lượng chu kỳ lượng tử),
ylabel('Sai số ')
```



Hình 9.24

Ở hình 9.24a đường nét đứt ứng với đáp ứng thực y, còn đường đậm nét là tín hiệu ra đã qua bộ lọc. Ở hình 9.24b là đặc tính sai số. Các đặc tính trên cho thấy nhiễu đã được giảm đáng kể. Có thể xác định kết luận này bằng cách tính phương sai trước và sau khi lọc.

```
MeasErr=y-yv;
MeasErrCov=sum(MeasErr.*MeasErr)/length(MeasErr);
EstErr=y-ye;
EstErrCov=sum(EstErr.*EstErr)/length(EstErr);
```

```
% Phương sai trước khi lọc (sai số đo) :
MeasErrCov
MeasErrCov=
        1.1138
% Phương sai sau khi lọc (sai số ước lượng):
EstErrCov
EstErrCov=
        0.2722.
```

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

Bài tập 9-1 Xác định $R_y(\tau)$ của tín hiệu ở đầu ra khâu quán tính với hàm trọng lượng :

$$w(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{khi } t \geqslant 0 \ ; \\ 0 & \text{khi } t < 0. \end{cases}$$

nếu ở đầu vào, tín hiệu có $R_x(\tau) = \beta b e^{-\beta|\tau|}$.

Đáp án :

Theo (9-3) cho trường hợp $\tau > 0$

$$R_y(\tau) = \beta b \alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha\tau_1} d\tau_1 \int_0^\infty e^{-\alpha\tau_2} e^{-\beta|\tau+\tau_1-\tau_2|} d\tau_2$$

Sau một số biến đổi ta có :

$$R_y(\tau) = \frac{\beta b \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}\left[e^{-\beta\tau} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha\tau}\right]$$

Trường hợp $\tau < 0$:

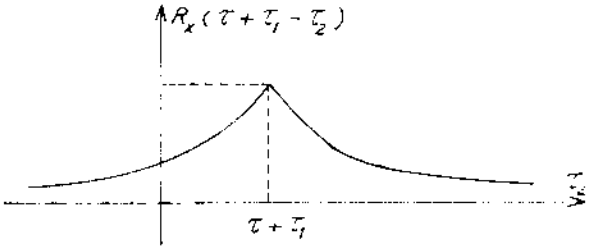
$$R_y(\tau) = \frac{\beta b \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}\left[e^{-\beta|\tau|} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}\right].$$

Đặc tính $R_x(\tau+\tau_1-\tau_2)$ là hàm của τ_2 với $\tau + \tau_1 > 0$ như ở hình 9.25.

Khi $\beta \to \infty$, nghĩa là khi $R_x(\tau) \to \delta(\tau)$:

$R_y(\tau) = \alpha b e^{-\alpha|\tau|}$ như biểu thức (9-7) ở ví dụ 9-1.

Bài tập 9-2 Hệ tùy động có $W_1(s) = k_1/s$ và $W_2(s) = k_2$. Hãy xác định trị số tối ưu k_1^* và k^*_2 để cực tiểu hóa $\overline{\varepsilon}^2(t)$ nếu biết $S_u(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$ và $S_f(\omega) = a^2$.



Hình 9.25

Đáp án :

Hàm tuyến hệ kín $W_K(s) = \dfrac{k}{1 + sT_1}$, với $k = 1/k_2$, $T_1 = 1/k_1k_2$ ở ví dụ 9-5. Từ đó :

$$k_2^* = 1/k^* = 1 + a^2 + a\sqrt{1 + a^2}$$

$$k_1^* = 1/T_1^* = \left(\sqrt{1 + a^2}/a\right) - 1$$

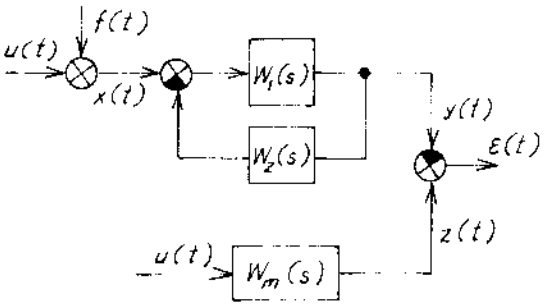
Khi $a = 1$: $k^*_1 = \sqrt{2} - 1$; $k^*_2 = 2 + \sqrt{2}$;

Khi $a = 0$: $k^*_1 \to \infty$; $k^*_2 = 1$.

Bài tập 9-3 Hệ tùy động với $W_1(s) = \dfrac{k_1}{s(1 + sT_1)}$ và $W_2(s) = 1$. Xác định k_1^* từ điều kiện cực tiểu của $\overline{\varepsilon}^2(t)$ nếu biết $S_f(\omega) = a^2$ và tốc độ biến đổi của u :

$v = du/dt$ và $S_v(\omega) = \alpha^2/(\alpha^2 + \omega^2)$

$S_{fu}(j\omega) = 0$



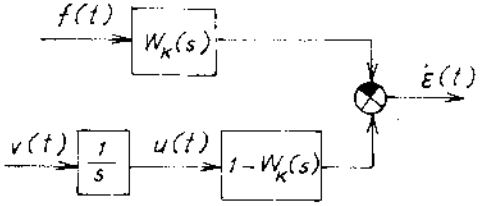
Hình 9.26

Đáp án :

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{\alpha^2(1 + \omega^2T_1^2)}{(\alpha^2 + \omega^2)\left[(k_1 - T_1\omega^2)^2 + \omega^2\right]} + \frac{a^2k_1^2}{(k_1 - T_1\omega^2) + \omega^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2(1 + j\omega T_1)(1 - j\omega T_1)}{(\alpha + j\omega)\left[(k_1 - T_1\omega^2) + j\omega\right](\alpha - j\omega)\left[(k_1 - T_1\omega^2) - j\omega\right]} +$$

$$+ \frac{a^2k_1^2}{\left[(k_1 - T_1\omega^2) + j\omega\right]\left[(k_1 - T_1\omega^2) - j\omega\right]}.$$

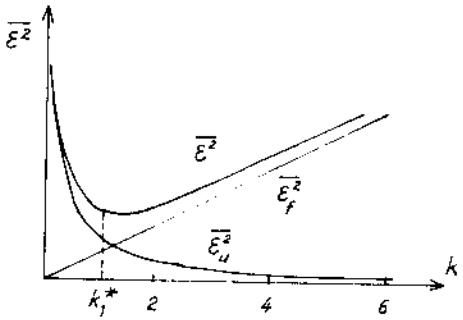


Hình 9.26

Theo bảng tính J_2 ở Phụ lục B[19], đưa về dạng (9-38) ta có :

$$\bar{\varepsilon}^2(t) = \frac{\alpha\left[1 + \alpha T_1(1 + k_1T_1)\right]}{2k_1\left[\alpha^2T_1 + \alpha + k_1\right]} + \frac{a^2k_1}{2}$$

Lưu ý v(t) và u(t) ở hình 9.26. Ở hình 9.27 $\bar{\varepsilon}_u^2$ là sai số do tác động điều khiển sẽ tăng khi k_1 giảm, $\bar{\varepsilon}_f^2$ là sai số do nhiễu sẽ tăng khi k_1 tăng. Khi $\alpha = 1$, $T_1 = 2k^*_1$, xác định theo hình vẽ giản đơn hơn theo điều kiện $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial k_1} = 0$.

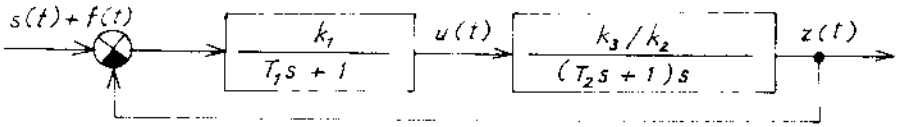


Hình 9.27

Bài tập 9-4 Hệ tùy động có sơ đồ khối như ở hình 9.28. Ở đầu vào có tín hiệu dạng xung chữ nhật

$$s(t) = \sum_{k=1} d_k\, 1(t - t_k)\ ,$$

thời khoảng $t_k - T_{k-1}$ là biến độc lập ngẫu nhiên có cùng



Hình 9.28

mật độ phân bố của d_k. Mật độ phổ của đạo hàm $\dot{s}$ là $S_{\dot{s}}(\omega) = A$. Nhiễu f(t) là quá trình ngẫu nhiên dừng (ồn trắng) : $S_f(\omega) = B$– giả thiết $S_{\dot{s}f}(j\omega) = 0$. Hãy xác định k_1 tối ưu của cơ cấu hiệu chỉnh theo trung bình bình phương nhỏ nhất của sai lệch.

Đáp án :

Điện áp ra của cơ cấu hiệu chỉnh được xác định bởi :

$$T_1 \frac{du}{dt} + u = k_1\left(e(t) + f(t)\right)$$

Phương trình chuyển động của động cơ :

$$J \frac{d^2y}{dt^2} + k_2 \frac{dy}{dt} = k_3 u \ .$$

J là tổng của mômen quán tính động cơ và tải; k_2 là hệ số sức điện động phản kháng hay hệ số ma sát ; k_3 là hệ số mômen, u là điện áp vào. Trường hợp lọc nhiễu tốt thì $Z(t) \equiv s(t)$.

Nếu dùng $T_2 = J/k_2$, loại trừ u từ các phương trình trên ta có :

$$T_1T_2 \frac{d^3s(t)}{dt^3} + (T_1 + T_2) \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{at} - \frac{k_1k_3}{k_2} f(t) = 0$$

Vế trái chỉ có nhiễu và đạo hàm của tín hiệu vào nên mật độ phổ của đạo hàm tín hiệu vào có ích thay thế mật độ phổ của tín hiệu vào nói chung, do đó (so với 9–36) :

$$S_\varepsilon(\omega) = |1 - W_K(j\omega)|^2 S_{\dot{s}}(\omega) + |W_K(j\omega)|^2 S_f(\omega) \ ,$$

$$W_K(j\omega) = \frac{-\dfrac{k_1k_3}{k_2}}{T_1T_2(j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + \dfrac{k_1k_3}{k_2}}$$

Dùng ký hiệu :

$$T = T_1 + T_2 \ ; \ \overline{\omega} = \omega T \ ;$$

$$\alpha = T\frac{k_1k_3}{k_2} \quad ; \ \beta = \frac{T_1T_2}{T^2}$$

và theo (9–38), (9–37) ta có :

$$J_o = \bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta\bar{\omega}^4 + (1 - 2\beta)\bar{\omega}^2 + 1}{\left[\beta(j\bar{\omega})^3 + (j\bar{\omega})^2 + j\bar{\omega} + \alpha\right]^2} 2AT d\bar{\omega} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\left[\beta(j\bar{\omega})^3 + j\bar{\omega})^2 + j\bar{\omega} + \alpha\right]^2} \frac{B}{T} d\bar{\omega} .$$

Dùng bảng tính được :

$$\bar{\varepsilon}^2 = AT \frac{1 + \alpha(1 - \beta) + \chi\alpha^2}{2\alpha(1 - \alpha\beta)} ;$$

$$\chi = \frac{B}{2AT}$$

Lấy đạo hàm $\bar{\varepsilon}^2$ theo α, cân bằng không và chỉ lấy nghiệm thực ta có :

$$\alpha^* = \frac{1}{\beta + \sqrt{\beta + \chi}} \text{ từ đó có } k^*_1$$

và $$J_{omin} = \frac{AT}{2}\left(\beta + 2\sqrt{\beta + \chi + 1}\right)$$

Bài tập 9-5 Mật độ phổ của tín hiệu có ích là $S_s(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$, còn nhiễu là ồn trắng : $S_f(\omega) = 1$. Hãy xây dựng hệ điều khiển có chức năng lọc và lấy đạo hàm của tín hiệu vào.

Đáp án :

Theo nhiệm vụ, mô hình mẫu phải là :

$$W_m(j\omega) = j\omega$$

Để chọn hệ tối ưu, dùng (9-56) và thực hiện bước nhân tử hóa :

$$S_s(\omega) + S_f(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} + 1 = \frac{2 + \omega^2}{1 + \omega^2} = \Psi(j\omega)\,\Psi(-j\omega)$$

Sau đó thực hiện bước phân cách hóa. Theo (9-57) với $S_{fs}(j\omega) = 0$:

$$\frac{W_m(j\omega)\,S_s(\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \frac{j\omega}{(1 + j\omega)(\sqrt{2} - j\omega)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\,\frac{j\omega}{1 + j\omega} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}\,\frac{j\omega}{\sqrt{2} - j\omega}$$

Hệ tối ưu thực hiện được theo (9-58) :

$$W_{tu.th}(j\omega) = \frac{j\omega}{\sqrt{2}+1} \; \frac{1}{\sqrt{2}+j\omega} = k\,\frac{j\omega}{Tj\omega+1},$$

với $\quad k = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}, \; T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài tập 9 – 6 Xác định hàm truyền của hệ xung có chức năng lọc với mật độ phổ của tín hiệu có ích và nhiễu :

$$S_s^*(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A\,e^{-\alpha|m|}e^{-jpm} = A\cdot\frac{1-e^{-2\alpha}}{\left[e^{j\omega}-e^{-\alpha}\right]^2} \; ; \; S_f^*(\omega) = B \; ;$$

và $\quad S_{sf}^*(j\omega) = 0$

Đáp án :

Nhiệm vụ là lọc đơn thuần nên $W_k^*(j\omega) = 1$

Thực hiện bước nhân tử hóa của tổng $S_s^*(\omega) + S_f^*(\omega)$, ta có được :

$$\tilde{\Psi}^*(j\omega) = C\,\frac{1-e^{-\alpha_1}.e^{-j\omega}}{1-e^{-\alpha}.e^{-j\omega}},$$

$$\hat{\Psi}^*(-j\omega) = C\,\frac{1-e^{-\alpha_1}.e^{-j\omega}}{1-e^{-\alpha}.e^{j\omega}},$$

α_1 và C xác định từ các phương trình sau :

$$ch\alpha_1 = \frac{A}{B}\,sh\alpha + ch\alpha \; ; \; C^2e^{-\alpha_1} = B\,e^{-\alpha}$$

Sau đó thực hiện bước phân cách hóa (theo 9-57):

$$\frac{S_s^*(\omega)}{\Psi^*(-j\omega)} = \frac{A\,(1-e^{-2\alpha})}{C\left(1-e^{-(\alpha+\alpha_1)}\right)\left(1-e^{-\alpha}.e^{-j\omega}\right)}.$$

Từ đó đặc tính tần của hệ xung tối ưu thực hiện được là :

$$W^*_{tu,th}(j\omega) = \frac{A}{C^2}\cdot\frac{(1-e^{-2\alpha})\,e^{j\omega}}{\left(1-e^{-(\alpha+\alpha_1)}\right)\left(e^{j\omega}-e^{-\alpha_1}\right)}.$$

Chương 10
HỆ PHI TUYẾN VỚI TÁC ĐỘNG NGẪU NHIÊN DỪNG

10.1. TÍN HIỆU NGẪU NHIÊN QUA KHÂU PHI TUYẾN TÍNH

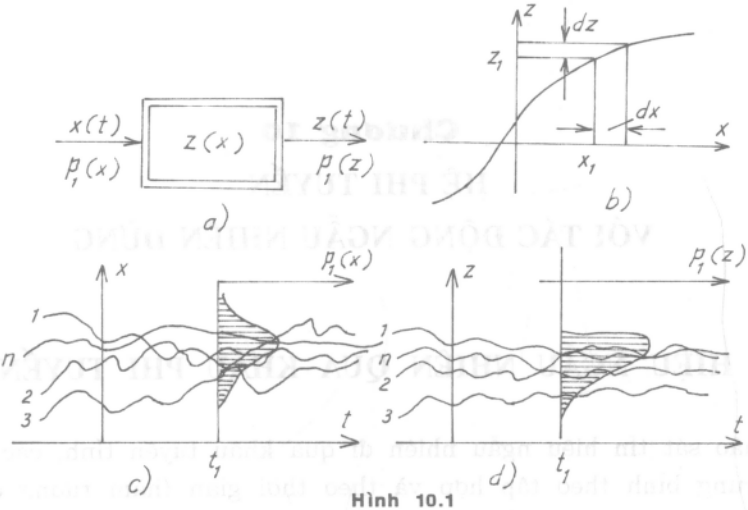
Khi khảo sát tín hiệu ngẫu nhiên đi qua khâu tuyến tính, các phương pháp lấy trung bình theo tập hợp và theo thời gian (hàm tương quan và mật độ phổ) đều được dùng đến. Tuy nhiên đối với các khâu phi tuyến chỉ dùng được các phương pháp lấy trung bình theo tập hợp (luật phân bố).

Các phương pháp khảo sát tín hiệu ngẫu nhiên đi qua khâu phi tuyến rất khác với các phương pháp khảo sát ở hệ tuyến tính : do chúng phức tạp và đa dạng hơn.

Do tính chất phức tạp mà các phương pháp gần đúng được dùng phổ biến. Tùy thuộc vào đặc tính phi tuyến là đơn trị hay đa trị, hệ không có quán tính hay có quán tính, hệ hở hay kín mà có các phương pháp rất khác nhau. Phương pháp khảo sát tín hiệu ngẫu nhiên qua khâu phi tuyến với đặc tính đơn trị không có quán tính là phương pháp được nghiên cứu đầy đủ nhất. Trước tiên ta khảo sát sự thay đổi luật phân bố của tín hiệu ngẫu nhiên ở thời điểm cố định và cùng với nó là kỳ vọng toán và phương sai (mômen bậc một và bậc hai). Sau đó khảo sát sự biến đổi của hàm tương quan và mật độ phổ, ứng dụng những kết quả ấy để tính gần đúng các quá trình trong hệ điều khiển tự động.

10.1.1. BIẾN ĐỔI MẬT ĐỘ PHÂN BỐ

Ta khảo sát một khâu phi tuyến không có quán tính như ở hình 10.1a, có đặc tính như ở hình 10.1b. Ở đầu vào có tín hiệu x(t) với tập hợp 1, 2, 3,..., n được xác định ở thời điểm t_1 bất kỳ, có mật độ phân bố $p_1(x)$ như ở hình 10.1c. Ở hình 10.1d có mật độ phân bố $p_1(z)$ của z(t) ở đầu ra cùng với tập hợp 1, 2, 3...n cũng tại thời điểm t_1.



Hình 10.1

Mật độ phân bố $p_1(z)$ có thể tính theo điều kiện bằng nhau của xác suất của tín hiệu vào trong miền $x_1 < x < x_2 + dx$ và của tín hiệu ra trong miền $z_1 < z < z_1 + dz$ mà $z_1 = z(x_1)$ và $dz = (dz/dx)dx$; từ đó :

$$p_1(x)dx = p_1(z)dz, \qquad (10\text{-}1)$$

và

$$p_1(z) = (dx/dz)\ p_1[x(z)]. \qquad (10\text{-}2)$$

Biểu thức trên cho phép xác định $p_1(z)$ nếu biết $p_1(x)$ và $z(x)$, khi $z(x)$ tăng đơn điệu như ở hình 10.1b.

Ví dụ 10 – 1 Tín hiệu x có phân bổ chuẩn :

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \qquad (10\text{-}3)$$

như ở hình 10.2a, đi qua khâu phi tuyến dạng bão hòa như ở hình 10.2b.

$$z = \begin{cases} x\ , & \text{khi } |x| \leqslant x_b = z_b \\ x_b \text{sign} x\ , & \text{khi } |x| > x_b = z_b \end{cases}$$

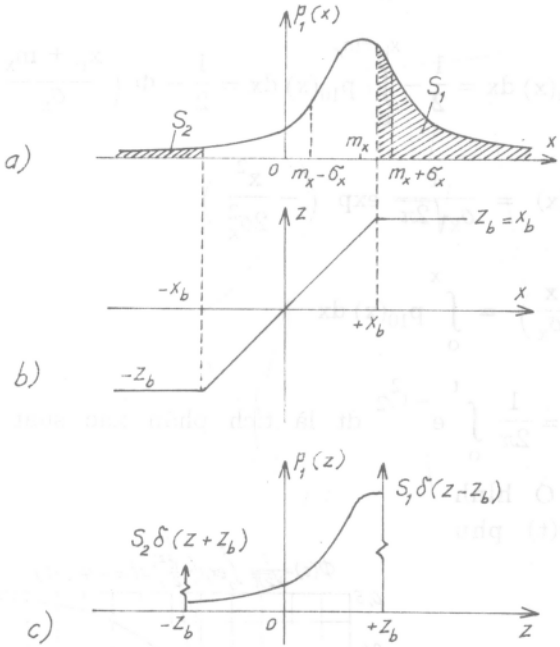
Hãy xác định $p_1(z)$.

Trong miền $|z| < x_b$ theo (10 –2) xác định :

$$p_1(z) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]. \qquad (10\text{-}4)$$

Khi $|z| = x_b$, $dz/dx = 0$ nên $p_1(z) \to \infty$. Như vậy ở điểm $z = \pm z_b$

mật độ phân bố được thể hiện bằng các hàm xung $S_1\delta(z - zb)$ như ở hình 10.2c.



Hình 10.2

Đại lượng S_1 và S_2 được xác định theo điều kiện

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \int_{x_b}^{\infty} p_1(x)\,dx\ ; \\ \text{và}\qquad S_2 &= \int_{-\infty}^{-x_b} p_1(x)\,dx\ . \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{–}5)$$

xuất phát từ (10–1) sau khi lấy tích phân.

S_1 và S_2 là xác suất để z bằng $+z_b$ và $-z_b$ và bằng diện tích các mặt phẳng giới hạn bởi đường cong $p_1(x)$ và các đoạn thẳng $-\infty < x < -x_b$ và $x_b < x < \infty$ (hình 10.2a). Đối với luật phân bố chuẩn (10–4) :

$$\int_{-\infty}^{m_x} p_1(x)\,dx = \int_{m_x}^{\infty} p_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\ .$$

xác suất ấy tương ứng với :

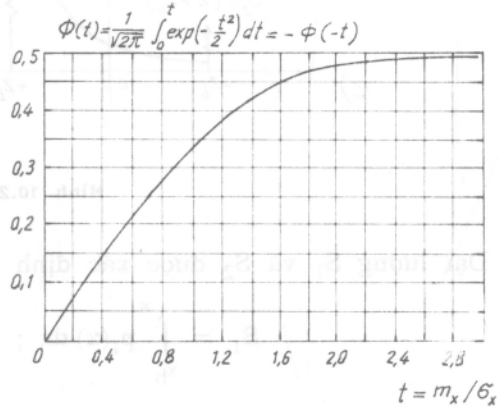
$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} - \int_{m_x - m_x}^{x_b - m_x} p_{10}(x)\,dx = \frac{1}{2} - \int_{o}^{x_b - m_x} p_{10}(x)\,dx = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_b - m_x}{\sigma_x}\right); \\ S_2 &= \frac{1}{2} - \int_{-x_b}^{m_x} p_{10}(x)\,dx = \frac{1}{2} - \int_{o}^{x_b + m_x} p_{10}(x)\,dx = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_b + m_x}{\sigma_x}\right). \end{aligned}\right\} \quad (10\text{–}6)$$

mà

$$p_{10}(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right). \qquad (10\text{–}7)$$

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) = \int_{o}^{x} p_{10}(x)\,dx \qquad (10\text{–}8)$$

Tích phân $\Phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{o}^{t} e^{-t^2/2}\,dt$ là tích phân xác suất được cho ở các bảng tra cứu. Ở hình 10.3 có đồ thị $\Phi(t)$ phụ thuộc $t = \frac{m_x}{\sigma_x}$.



Hình 10.3

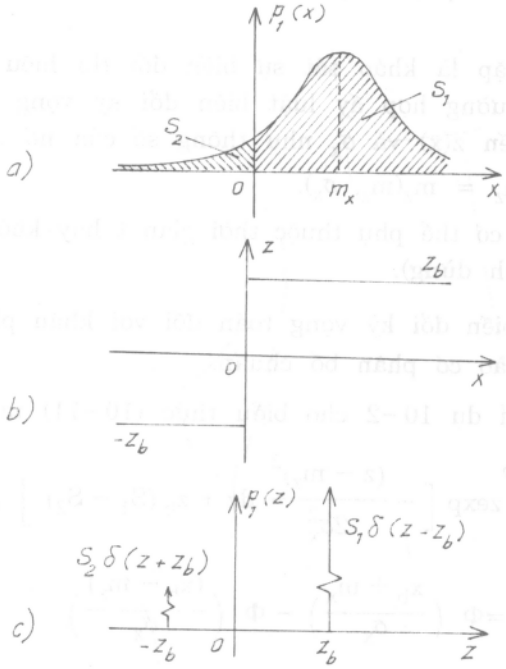
Ví dụ 10–2 Với tín hiệu x(t) như ở ví dụ 10–1 đi qua khâu phi tuyến có đặc tính rơle :

$$z = z_b \operatorname{sign} x. \qquad (10\text{–}9)$$

Trong trường hợp này $p_1(z) = 0$ khi $|z| \neq z_b$ còn khi $|z| = z_b$ mật độ phân bố $p_1(z)$ được mô tả bởi hàm xung $S_1\delta(z - z_b)$ và $S_2\delta(z + z_b)$ mà :

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \int_{o}^{\infty} p_1(x)\,dx = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right); \\ S_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\,dx = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right); \end{aligned}\right\} \quad (10\text{–}10)$$

Đồ thị $p_1(x)$, $z(x)$ và $p_1(z)$ như ở hình 10.4a, b, c.



Hình 10.4

Khi đặc tính phi tuyến không đơn trị, việc xác định mật độ phân bố của tín hiệu ra phức tạp hơn nhiều. Ví dụ như đặc tính phi tuyến của rơle hai vị trí có trễ, mật độ phân bố của tín hiệu ở đầu ra không những phụ thuộc vào mật độ phân bố của tín hiệu ở đầu vào mà còn phụ thuộc vào đặc tính của xác suất đạo hàm theo thời gian.

10.1.2. BIẾN ĐỔI TRỊ SỐ TRUNG BÌNH (KỲ VỌNG TOÁN HAY MÔMEN BẬC MỘT)

Khi biết được mật độ phân bố của tín hiệu ở đầu ra của khâu phi tuyến có thể dễ dàng xác định kỳ vọng toán của nó :

$$m_z \equiv M\{z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} z p_1(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z(x)\, p_1(x)\, dx . \qquad (10\text{-}11)$$

và biết được kỳ vọng toán của tín hiệu vào :

$$m_x \equiv M\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x)\, dx \qquad (10\text{-}12)$$

từ đó có thể xác định được biến đổi mômen bậc một bởi khâu phi tuyến.

Mối liên hệ giữa kỳ vọng toán ở đầu vào và đầu ra của khâu phi tuyến là không đơn trị và phụ thuộc vào tính chất của hàm phân bố của tín hiệu vào.

Bài toán thường gặp là khảo sát sự biến đổi tín hiệu với phân bố chuẩn (10–3). Trong trường hợp ấy luật biến đổi kỳ vọng toán chỉ phụ thuộc đặc tính phi tuyến z(x) và σ_x như thông số của nó :

$$m_z = m_z(m_z, \sigma_x). \qquad (10-13)$$

Các đại lượng này có thể phụ thuộc thời gian t hay không phụ thuộc thời gian t (ở quá trình dừng).

Ví dụ 10 – 3 Tìm luật biến đổi kỳ vọng toán đối với khâu phi tuyến kiểu bão hòa với tín hiệu vào có phân bố chuẩn.

Dùng kết quả ở ví dụ 10 –2 cho biểu thức (10 –11) ta có :

$$m_z = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-z_b}^{z_b} z\exp\left[-\frac{(z-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\, dz + z_b(S_1 - S_2)\right], \qquad (10-14)$$

mà :
$$S_1 - S_2 = \Phi\left(\frac{x_b + m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{(x_b - m_x)}{\sigma_x}\right). \qquad (10-15)$$

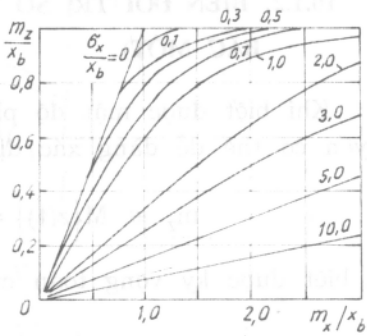
Sau khi lấy tích phân và biến đổi ta có :

$$m_z = \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(x_b+m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] - \exp\left[-\frac{(x_b-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right]\right\} +$$
$$+ (x_b + m_x)\,\Phi\left(\frac{(x_b+m_x)}{\sigma_x}\right) - (x_b - m_x)\,\Phi\left(\frac{(x_b-m_x)}{\sigma_x}\right). \qquad (10-16)$$

với đại lượng tương đối, (10 –16) có dạng chung :

$$\frac{m_z}{x_b} = \Psi_1\left(\frac{m_x}{x_b}, \frac{\sigma_x}{x_b}\right). \qquad (10-17)$$

Ở hình 10.5 có đặc tính $\Psi_1\left(\frac{m_x}{x_b}\right)$ với các đại lượng σ_x/x_b khác nhau. Theo đồ thị, khi thành phần ngẫu nhiên thể hiện qua σ_x tăng thì tính chất phi tuyến ban đầu ($\sigma_x = 0$) như được san bằng và vùng tuyến tính được mở rộng.



Hình 10.5

Trong khi đó hệ số khuếch đại theo thành phần không biến đổi trên đoạn tuyến tính $k_0 = m_z/m_x$ giảm khi σ_x tăng.

Vai trò của thành phần ngẫu nhiên giống như vai trò của thành phần biến đổi ở phương pháp tuyến tính hóa rung (xem mục 3.3).

10.1.3. BIẾN ĐỔI ĐỘ TẢN (MÔMEN BẬC HAI)

Mômen bậc hai của tín hiệu vào và ra của khâu phi tuyến tính được xác định bởi :

$$M\left\{z^2(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_1(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_1(x)\,dx \qquad (10\text{–}18)$$

và

$$M\left\{x^2(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x)\,dx\ . \qquad (10\text{–}19)$$

Độ tản của tín hiệu ở đầu vào và đầu ra là :

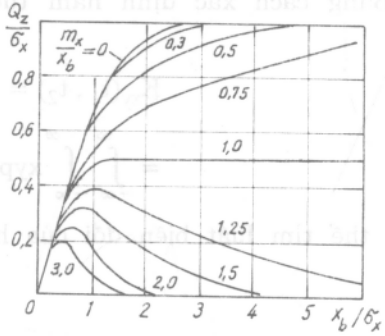
$$\left.\begin{aligned} D_x &= M\left\{(x - m_x)^2\right\} = \overline{x}^{\,2} - m_x^2\ ; \\ D_z &= M\left\{(z - m_z)^2\right\} = \overline{Z}^{\,2} - m_z^2\ . \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{–}20)$$

Biến đổi độ tản của tín hiệu qua khâu phi tuyến phụ thuộc m_x và tính chất của hàm phân bố tín hiệu x.

Nếu phân bố của tín hiệu vào là chuẩn (10–3), luật biến đổi mômen bậc hai phụ thuộc m_x và σ_x như thông số của nó :

$$D_z = \sigma^2_z = D_z(D_x,\ m_x) = D_z(\sigma^2_x,\ m_x). \qquad (10\text{–}21)$$

Tất cả các đại lượng này có thể phụ thuộc thời gian hay là hằng.



Hình 10.6

Ví dụ 10–4 Xác định luật biến đổi độ tản theo điều kiện của ví dụ 10–2 và 10–3.

Dùng kết quả của ví dụ 10.2 cho biểu thức (10–18) ta có :

$$\overline{z}^{\,2} = D_z + m_z^2 = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-z_b}^{z_b} z^2 \exp\left[-\frac{(z - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] dz + z_b^2\,(S_1 + S_2)\ . \qquad (10\text{–}22)$$

mà $$S_1 + S_2 = \Phi\left(\frac{x_b + m_x)}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{x_b - m_x)}{\sigma_x}\right).$$

Việc tính các tích phân này khá phức tạp. Tuy nhiên có thể dùng các đồ thị về mối quan hệ (10–22) ở đơn vị tương đối :

$$\sigma_z/\sigma_x = \Psi_2\left(\frac{x_b}{\sigma_x}, \frac{m_x}{x_b}\right) \qquad (10\text{–}23)$$

Đồ thị quan hệ (10–22) như ở hình 10.6.

10.1.4. BIẾN ĐỔI HÀM TƯƠNG QUAN

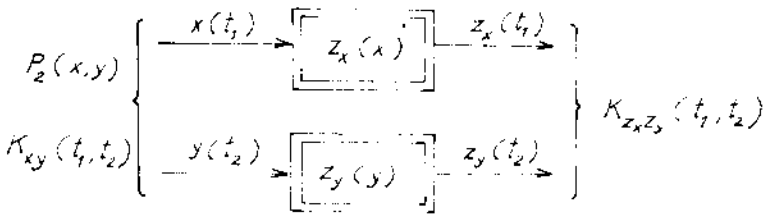
Xét trường hợp chung (hình 10.7) có hai tín hiệu $x(t_1)$ và $y(t_2)$ được biến đổi bởi hai khâu phi tuyến đơn trị $z_x(x)$ và $z_y(y)$. Mật độ phân bố kép của hai tín hiệu là $p_2(x, y)$. Hàm tương quan tương hỗ của z_x và z_y ở đầu ra là :

$$K_{z_x z_y}(t_1, t_2) = M\left\{z_x(t_1)\, z_y(t_2)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_x(x)\, z_y(y)\, p_2(x, y)\, dx\, dy \qquad (10\text{–}24)$$

Bằng cách xác định hàm tương quan tương hỗ của tín hiệu ở đầu vào :

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M\left\{x(t_1)\, y(t_2)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy p_2(x, y) dx dy \qquad (10\text{–}25)$$

ta có thể tìm luật biến đổi của hàm tương quan bởi các khâu phi tuyến.



Hình 10.7

Trong trường hợp riêng, khi $x(t) = y(t)$ và $z_x(x) = z_y(y) = z(x)$, biểu thức (10–24) và (10–25) cho hàm tự tương quan của tín hiệu ở đầu ra và đầu vào của khâu phi tuyến $z(x)$.

Khi x và y đều có phân bố chuẩn :

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right] \right\} \qquad (10\text{–}26)$$

mà ρ_{xy} là hàm tương quan tương hỗ định tâm chuẩn của tín hiệu vào x và y :

$$\rho_{xy}(t_1, t_2) = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y} \overset{o}{K}_{xy}(t_1, t_2) = \frac{M\{(x-m_x)(y-m_y)\}}{\sigma_x\sigma_y} \qquad (10\text{–}27)$$

Đối với quá trình dừng, m_x, m_y, σ_x và σ_y không phụ thuộc thời gian, chỉ có thành phần ngẫu nhiên của kỳ vọng toán m_x có thể là hàm của thời gian. Trong trường hợp này :

$$m_x = m_x(t_1), \quad m_y = m_y(t_2)$$

Để tính toán giản đơn biểu thức (10–24), có thể phân tích $p_2(x, y)$ theo chuỗi Tsebishev – Ermit. Trong trường hợp ấy (10–26) có dạng :

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \rho^n xy\, H_n\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) H_n\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right) \right., \qquad (10\text{–}28)$$

mà $H_n(t)$ là đa thức được xác định bởi :

$$H_n(t) = (-1)^n \exp(t^2/2)\,(d^n/dt^n) \exp(-t^2/2) . \qquad (10\text{–}29)$$

Để xác định $H_n(t)$ có thể dùng biểu thức lặp :

$$H_{n+1}(t) = t\,H_n(t) - nH_{n-1}(t) \qquad (10\text{–}30)$$

với $H_0(t) = 1$; $H_1(t) = t$.

Đa thức Tsebishev –Ermit $H_n(t)$ có tính trực giao với nhân $\exp(-t^2/2)$ trên đường thẳng $-\omega < t < \infty$, nghĩa là :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t)\, H_m(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, n! & \text{khi } m = n \\ 0 & \text{khi } m \neq n \end{cases} \qquad (10-31)$$

Vì là trực giao nên khi thay (10–28) vào (10–24) ta có biểu thức đơn giản để xác định hàm tương quan tương hỗ của z_x và z_y :

$$K_{z_x z_y}(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{xy}^n a_{xn} a_{yn} . \qquad (10\text{-}32)$$

mà
$$a_{xn} = a_{xn}(m_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n!}} \int_{-\infty}^{\infty} z(x)\, H_n\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right] dx . \qquad (10\text{–}33)$$

Hệ số a_{yn} được xác định tương tự như (10–33) bằng cách thay x bằng y. Các hệ số a_{xn} và a_{yn} ngày càng giảm khi n tăng, nên trong tính toán hàm tương quan, chỉ cần dùng một vài thành phần của (10–32).

Khi tính hàm tương quan của quá trình dừng $x = y$, $z_x = z_y$, $\rho_{xy} = \rho_x$, $m_x = m_y$ và $a_{xn} = a_{yn} = a_n$, biểu thức (10–32) có dạng :

$$K_z(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_x^n a_n^2 . \qquad (10\text{–}34)$$

Vì $H_0(t) = 1$ và $\rho^0_x = 1$ nên thành phần thứ nhất của chuỗi (10–34) là bình phương của kỳ vọng toán ở đầu ra của khâu phi tuyến :

$$m_z^2 = a_0^2 . \qquad (10\text{–}35)$$

Trong trường hợp ấy hàm tương quan định tâm là :

$$\overset{o}{K}_z(\tau) = K_z(\tau) - m_z^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_x^n a_n^2 \qquad (10\text{–}36)$$

Biết đặc tính của khâu phi tuyến và hàm phân bố của tín hiệu vào, theo (10–32) ... (10–36), có thể xác định mối quan hệ giữa các hàm tương quan của các tín hiệu ở đầu vào và đầu ra của khâu phi tuyến.

Biểu thức (10–36) cho phép xác định độ tản ở đầu ra của khâu phi tuyến :

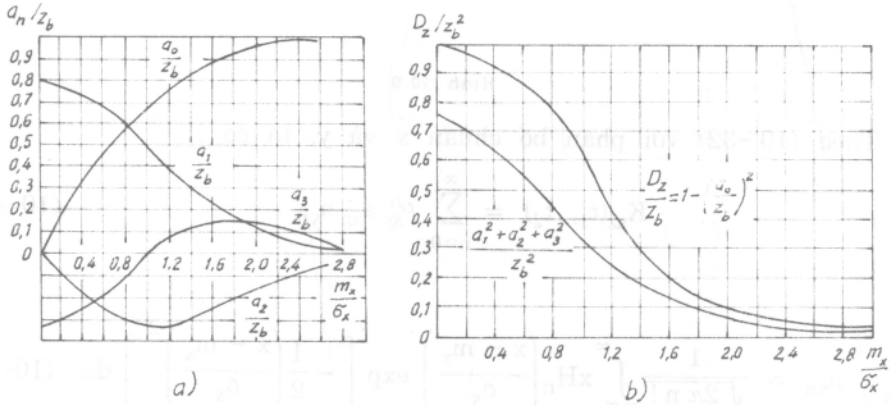
$$D_z = \sigma_z^2 = \overset{o}{K}_z(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 . \qquad (10\text{–}37)$$

Ví dụ 10-5 Xác định hàm tương quan của tín hiệu đầu ra của khâu phi tuyến $z = z_b \text{sign} x$ khi phân bố là chuẩn theo (10-26) và hàm tương quan :

$$\rho_x|\tau| = \frac{K_x(\tau)}{\sigma_x^2} = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Biết $H_0(t) = 1$ và $H_1(t) = t$, theo (10-30) xác định các trị số sau đây của đa thức Tsebishev - Ermit :

$$H_2(t) = t^2 - 1,\ H_3(t) = t^3 - 3t,\ H_4(t) = t^4 - 6t^2 + 3 \ldots$$



Hình 10.8

Đưa các trị số trên vào (10-33), sau khi lấy tích phân ta có :

$$a_o = 2z_b\,\Phi(m_x/\sigma_x)\ ; \qquad (10\text{-}38)$$

$$a_1 = z_b\sqrt{2/\pi}\ \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2\right]; \qquad (10\text{-}39)$$

$$a_2 = -\frac{m_x}{\sigma_x\sqrt{2}}\,a_1\ ; \qquad (10\text{-}40)$$

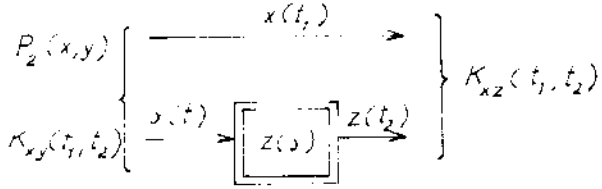
$$a_3 = 1/\sqrt{6}\left[\left(m_x/\sigma_x\right)^2 - 1\right]a_1\ ; \qquad (10\text{-}41)$$

v.v...

Đồ thị $a_n/z_b(m_x/\sigma_x)$ xây dựng theo (10-38) ... (10-41) như ở hình 10.8a.

10.1.5. HÀM TƯƠNG QUAN TƯƠNG HỖ CỦA TÍN HIỆU RA VÀ VÀO ĐỐI VỚI KHÂU PHI TUYẾN

Như ở hình 10.9, trong trường hợp này biến đổi phi tuyến chỉ thực hiện đối với y, nghĩa là $z_x(x) = x = x(t_1)$ còn $z_y(y) = z(y) = z(t_2) = z$.



Hình 10.9

Theo (10-32) với phân bố chuẩn x và y, ta có :

$$K_{xz}(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{xy}^{n} a_{xn} a_{yn} \qquad (10\text{-}42)$$

mà

$$a_{xn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, n!}} \int_{-\infty}^{\infty} x H_n\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right] dx \,. \qquad (10\text{-}43)$$

còn a_{yn} thì dùng biểu thức (10-33) sau khi thay x bằng y.

Các hệ số a_{xn} trong trường hợp này nếu tính đến :

$$H_0\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) = 1 \quad \text{và} \quad \sigma_x H_1\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) = x - m_x$$

có những giá trị sau : $a_{x0} = m_x$, $a_{x1} = \sigma_x$ và $a_{xn} = 0$ khi $n \geqslant 2$.

Như vậy (10-42) có dạng :

$$K_{xz}(t_1, t_2) = m_x a_{y0} + \sigma_x a_{y_1} \rho_{xy} \qquad (10\text{-}44)$$

vì theo (10-35) $a_{y0} = m_z$, nên :

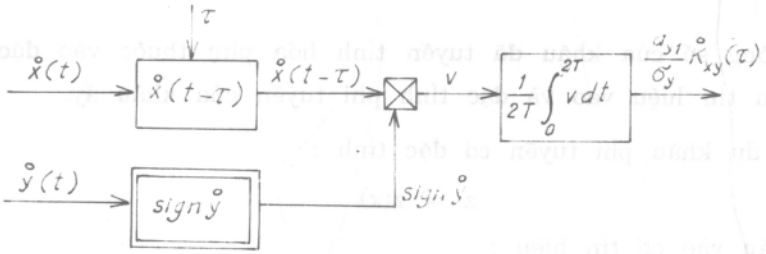
$$\overset{o}{K}_{xz}(t_1, t_2) = K_{xz}(t_1, t_2) - m_x m_z = \sigma_x a_{y_1} \rho_{xy} =$$

$$= (a_{y1}/\sigma_y)\, \overset{o}{K}_{xy}(t_1, t_2) \,, \qquad (10\text{-}45)$$

hay

$$\overset{o}{K}_{xy}(t_1, t_2) = (\sigma_y/a_{y1})\, K_{xz}(t_1, t_2) \,. \qquad (10\text{-}46)$$

Biểu thức trên có ý nghĩa lớn trong thực tế, vì khi xác định hàm tương quan tương hỗ của hai tín hiệu có phân bố chuẩn thì bất cứ biến đổi phi tuyến đơn trị nào của một trong hai tín hiệu đều không làm thay đổi dạng của hàm tương quan tương hỗ và chỉ thay đổi hệ số. Đó là cơ sở để tạo các bộ tương quan dùng rơle có sơ đồ cấu trúc như ở hình 10.10.



Hình 10.10

Ví dụ 10 – 6 Hàm tương quan tương hỗ giữa hai tín hiệu vào và ra của khâu phi tuyến có đặc tính $z = z_b \text{sign} x$ có dạng $K_{xz}|\tau| = B e^{-\alpha|\tau|}$ với B và α là hằng.

Hãy xác định hàm tự tương quan của tín hiệu vào nếu biết phân bố của nó là chuẩn.

Theo (10–39) hệ số $a_{y1} = a_1$ và đưa vào (10–46) đối với y = x ta có :

$$K_x(\tau) = \sigma_x(B/z_b)\sqrt{\pi/2}\ \exp\left[1/2(m_x/\sigma_x)^2\right] \exp(-\alpha|\tau|) \qquad (10\text{–}47)$$

10.2. TUYẾN TÍNH HÓA THỐNG KÊ CÁC KHÂU PHI TUYẾN

Ở hệ phi tuyến tiền định, khâu phi tuyến được thay thế bằng khâu tuyến tính tương đương ở phương pháp tuyến tính hóa điều hòa với điều kiện của giả thiết lọc. Trên cơ sở ấy các phương pháp tuyến tính được áp dụng để khảo sát gần đúng các hệ phi tuyến.

Tư tưởng ấy được phát triển ở phương pháp *tuyến tính hóa thống kê* các khâu phi tuyến của các tác giả Kazakov I. E., Pervozanski A. A. (Liên Xô cũ), Buton R., Esby D. (Mỹ), Savaghi I, Sugai N., Sunakhor I. (Nhật Bản) v.v...

Nội dung của phương pháp tuyến tính hóa thống kê là thay khâu phi tuyến bằng khâu tuyến tính sao cho một số đặc tính thống kê của tín hiệu ra không thay đổi. Các đặc tính thường dùng là trị số trung bình và độ tản. Đôi khi chỉ tiêu chất lượng tương đương là cực tiểu của sai lệch quân phương mà khi tính người ta cho trước luật phân bố tín hiệu ở đầu vào khâu phi tuyến. Luật phân bố ấy thường là phân bố chuẩn. Đôi khi, sự thực là phân bố khác chuẩn nên tính toán chỉ là gần đúng.

Thông số của khâu đã tuyến tính hóa phụ thuộc vào đặc tính xác suất của tín hiệu vào và đặc tính phi tuyến của khâu ấy.

Ví dụ khâu phi tuyến có đặc tính :

$$z = z(x) \qquad (10\text{-}48)$$

và ở đầu vào có tín hiệu :

$$x(t) = m_x + \overset{o}{x}(t) \qquad (10\text{-}49)$$

mà m_x trong trường hợp chung phụ thuộc vào thời gian còn, $\overset{o}{x}$ là thành phần định tâm của nó (có kỳ vọng toán bằng không)

Để tuyến tính hóa đặc tính phi tuyến, giả thiết m_x và $\overset{o}{x}(t)$ đi qua hai kênh khác nhau (hình 10.11) với hệ số khuếch đại k_0 và k_1 tương ứng, còn tín hiệu ra là tổng của hai tín hiệu đã được biến đổi :

$$y = k_0 m_x + k_1 \overset{o}{x}(t) \qquad (10\text{-}50)$$

Để xác định k_0 và k_1 của các khâu tuyến tính tương đương dùng, hai điều kiện sau :

Trường hợp thứ nhất chỉ tiêu tương đương là :

$$m_y = k_0 m_x = m_z,\ D_y = k^2_1 D_x = k^2_1 \sigma^2_x = D_z \qquad (10\text{-}57)$$

Trường hợp thứ hai, điều kiện tương đương là cực tiểu của sai lệch quân phương :

$$\partial \bar{\varepsilon}^2 / \partial k_0 = 0 \quad \text{và} \quad \partial \bar{\varepsilon}^2 / \partial k_1 = 0 \qquad (10\text{-}52)$$

với $\varepsilon = z - y$.

Khi chọn k_0, k_1 người ta còn dùng trị số trung bình tính theo hai trường hợp trên.

Ví dụ 10-7 Hãy xác định k_0 và k_1 của khâu phi tuyến $z = z_b \text{sign} x$ nếu tín hiệu ở đầu vào x có phân bố chuẩn :

Cách thứ nhất :

Với kết quả của ví dụ 10-3 và đặc tính rơle dạng $z = z_b \text{sign} x$, sau khi thay kết quả ở ví dụ 10-2 vào (10-11) ta có :

$$\left.\begin{aligned} m_z &= 2z_b\,\Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) ; \\ \text{và} \qquad D_z &= z_b^2\left[1 - 4\,\Phi^2\left(m_x/\sigma_x\right)\right] . \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}53)$$

Theo (10-51) ta xác định :

$$k_0 = m_z/m_x = 2z_b/m_x\ \Phi(m_x/\sigma_x) ; \qquad (10\text{-}54)$$

$$k_1 = \sqrt{D_z/D_x} = z_b/\sigma_x\sqrt{1 - 4\,\Phi^2(m_x/\sigma_x)} . \qquad (10\text{-}55)$$

Cách thứ hai :

Vì : $\varepsilon = z - y = (m_z - k_0 m_x) + (\overset{o}{z} - k_1\overset{o}{x}) = m_\varepsilon + \overset{o}{\varepsilon}$, nên :

$$\bar{\varepsilon}^2 = m_\varepsilon^2 + D_\varepsilon ,$$

với $m_\varepsilon = m_z - k_0 m_x$, $D_\varepsilon = M\left\{(\overset{o}{z} - k_1\overset{o}{x})^2\right\}$

$$= D_z + k_1^2 D_x - 2k_1 M\left\{\overset{o}{z}\,\overset{o}{x}\right\}$$

Từ các phương trình (10-51) có $k_0 = m_z/m_x$ và trị số ấy trùng với (10-54), còn :

$$k_1 = \frac{M\left\{\overset{o}{z}\,\overset{o}{x}\right\}}{D_x}$$

Để xác định $M\left\{\overset{o}{z}\,\overset{o}{x}\right\}$ dùng biểu thức (10-45) với $t_1 = t_2$ và $x = y_0$.

$$M\left\{\overset{o}{z}\,\overset{o}{x}\right\} = \overset{o}{K}_{xz}(0) = \sigma_x a_{x1}\rho_x(0) = \sigma_x a_{x1}.$$

Với đặc tính phi tuyến đã cho, theo (10-39) :

$$a_{x1} = z_b\sqrt{2/\pi}\ \exp\left[-1/2(m_x/\sigma_x)^2\right] ;$$

do đó : $$k_1 = z_b/\sigma_x\sqrt{2/\pi}\ \exp\left[-1/2(m_x/\sigma_x)^2\right] ; \qquad (10\text{-}56)$$

Từ kết quả ở (10-55) và (10-56) ta thấy, cách thứ hai cho k_1 bé hơn cách thứ nhất.

Một phương pháp khác để xác định hệ số tuyến tính hóa ngẫu nhiên (tuyến tính hóa thống kê), giản đơn đối với đặc tính phi tuyến đơn trị như sau [23]:

Khâu phi tuyến có đặc tính z = f(x) mà x(f) và z(t) là những quá trình dừng, hệ số tuyến tính hóa ngẫu nhiên được định nghĩa như sau :

$$\hat{z}(t) = k^{nn}x(t)$$

từ điều kiện $M\left\{\left[z(t) - \hat{z}(t)\right]^2\right\} \rightarrow \min\limits_{k^{nn}}$,

hay $$M\left\{\left[f\left(x(t)\right) - k^{nn}x(t)\right]^2\right\} \rightarrow \min_{k^{nn}} .$$

Lấy đạo hàm vế trái theo k^{nn} và cân bằng 0 ta có :

$$M\left\{\left[f\left(x(t)\right) - k^{nn}x(t)\right] x(t)\right\} = 0 .$$

Biết rằng : $M\left\{f\left(x(t)\right) x(t)\right\} = R_{zx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x\, p(x)\, dx$,

$$M\left\{x^2(t)\right\} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx = \sigma_x^2 .$$

nên : $$k^{nn} = k^{nn}(\sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x\, p(x)\, dx ,$$

Với quá trình écgôdíc :

$$R_{zx}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\left(x(t)\right) x(t)\, dt ;$$

$$R_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \sigma_x^2 ;$$

Từ đó : $$k^{nn} = k^{nn}(\sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x^2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\left(x(t)\right) x(t)\, dt .$$

Ở bảng 10-1 cho một số đặc tính phi tuyến và hệ số tuyến tính hóa tĩnh $k^t(x)$, đạo hàm $k^d(x)$, điều hòa $k^{dh}(x)$ và ngẫu nhiên $k^{nn}(x)$ để thuận tiện trong việc khảo sát các hệ phi tuyến.

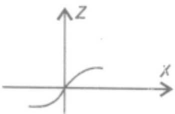
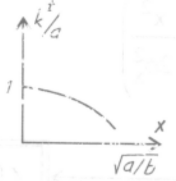
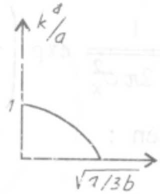
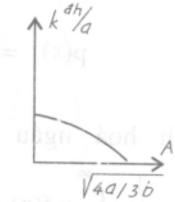
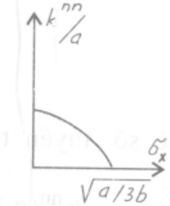
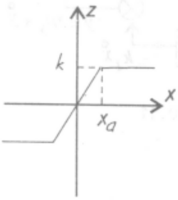
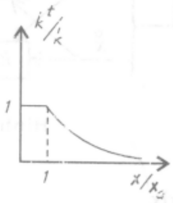
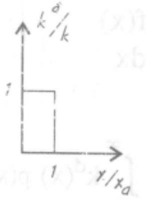
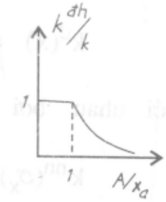
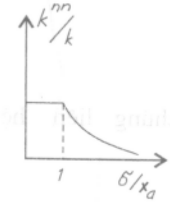
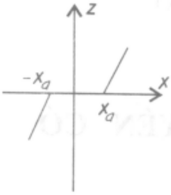
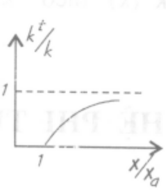
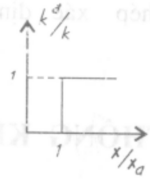
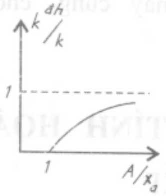
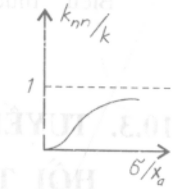
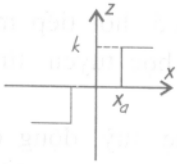
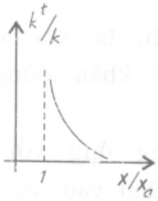
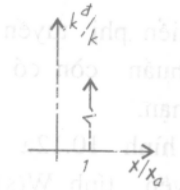
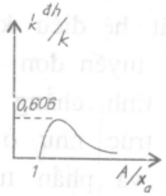
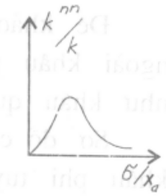
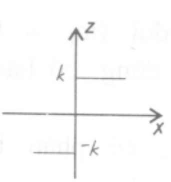
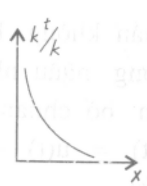
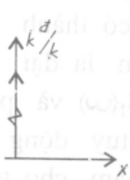
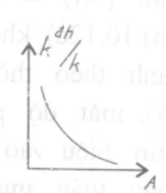
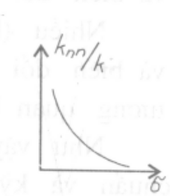
Ví dụ trong trường hợp riêng $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ mà φ là pha ngẫu nhiên thì :

$$R_x(0) = \sigma^2{}_x = \frac{A^2}{2} \text{ và } R_{yx}(0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f\left(A\sin(\omega t + \varphi)\right) x$$

$A\sin(\omega t + \varphi)\, dt = k^{dh}(A)\, \sigma_x^2$ có nghĩa là :

$$k^{nn}(\sigma_x) = k^{dh}(A)$$

Bảng 10-1

Đặc tính phi tuyến	Hệ số tuyến tính hóa			
	tĩnh $k^t(x)$	đạo hàm $k^đ(x)$	điều hòa $k^{đh}(A)$	ngẫu nhiên $k^{nn}(\sigma_x)$
				
				
				
				
				

Ở bảng 10.1 $k(x) = \frac{f(x)}{x}$, $k(x) = \frac{df(x)}{dx}$ như ở mục 5.4

$k^{dh}(A)$ là hệ số khuếch đại tuyến tính hoá điều hoà như ở mục 4.2

Ví dụ 10 - 8 Với mật độ phân bố Gauss (chuẩn) :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

hệ số tuyến tính hoá ngẫu nhiên :

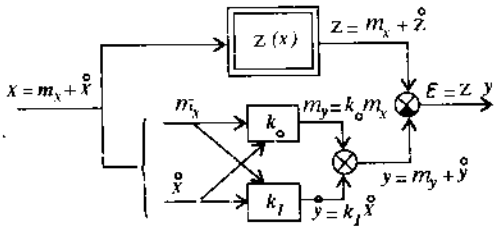
$$k^{nn}(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, p(x)\, dx$$

còn hệ số tuyến tính hoá đạo hàm

$$k^{d}(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

chúng liên hệ với nhau bởi :

$$k^{nn}(\sigma_x) = \int_{-\infty}^{\infty} k^{d}(x)\, p(x)\, dx$$



Hình 10.11

Biểu thức này cũng cho phép xác định k (x) theo k (x)

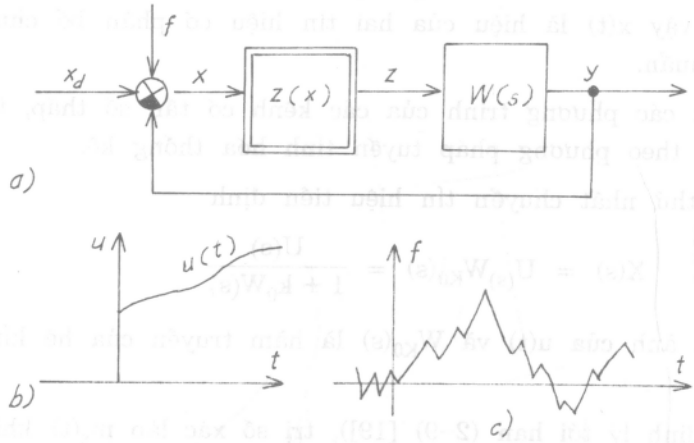
10.3. TUYẾN TÍNH HOÁ THỐNG KÊ HỆ PHI TUYẾN CÓ HỒI TIẾP

Để khảo sát hệ điều khiển phi tuyến tính, ta xét hệ có hồi tiếp mà ngoài khâu phi tuyến đơn thuần còn có các khâu động học tuyến tính như khâu quán tính chẳng hạn.

Sơ đồ cấu trúc như ở hình 10.12a tương ứng với hệ tuỳ động có khâu phi tuyến và phần tuyến tính W(s). Đầu vào của hệ có tín hiệu làm việc u(t) và nhiễu f(t). Tín hiệu làm việc (hình 10-12b) là tiền định và biến đổi chậm [$u(t) = m_u(t)$].

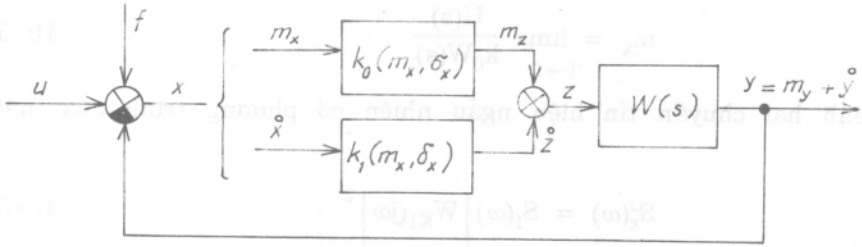
Nhiễu (hình) 10.12c) không có thành phần không biến đổi ($m_f = 0$) và biến đổi nhanh theo thời gian là đại lượng ngẫu nhiên dừng có hàm tương quan $K_f(\tau)$, mật độ phổ $S_f(\omega)$ và phân bố chuẩn.

Như vậy, tín hiệu vào hệ tuỳ động $x(t) = u(t) + f(t)$ có phân bố chuẩn và kỳ vọng toán mu là hàm cho trước.



Hình 10.12

Dùng phương pháp tuyến tính hóa thống kê ta có sơ đồ khối tương đương như ở hình 10.13.



Hình 10.13

Ở đây khâu phi tuyến tương ứng hai khâu tương đương với hệ số truyền k_0 và k_1 phụ thuộc vào đặc tính xác suất của tín hiệu x = u + f − y. Theo kênh thứ nhất có thành phần biến đổi chậm đi qua và theo kênh thứ hai có thành phần biến đổi nhanh.

Điều kiện cần là tín hiệu x vào khâu tuyến tính có phân bố chuẩn. Tín hiệu ấy lại là hiệu của tín hiệu u + f có phân bố chuẩn với hồi tiếp y(t). Tín hiệu hồi tiếp y(t) có phân bố chuẩn hay không là tùy thuộc ở đặc tính tần của khâu tuyến tính W(s). Ở các hệ thực, bậc của mẫu số lớn hơn ở tử số do vậy phần tuyến tính W(s) có đặc tính của bộ lọc hạ tần. Dẫu ở đầu vào của phần tuyến tính tín hiệu có phân bố không chuẩn thì tín hiệu ra y(t) cũng có phân bố gần chuẩn.

Ta chỉ khảo sát cho trường hợp W(s) tương ứng với giả thiết lọc nói trên. Như vậy x(t) là hiệu của hai tín hiệu có phân bố chuẩn cũng có phân bố chuẩn.

Ta xét các phương trình của các kênh có tần số thấp, tiền định và tần số cao theo phương pháp tuyến tính hóa thống kê.

Kênh thứ nhất chuyển tín hiệu tiền định :

$$X(s) = U_{(s)}W_{K0}(s) = \frac{U(s)}{1 + k_0W(s)} \qquad (10\text{-}57)$$

với U(s) là ảnh của u(t) và $W_{K0}(s)$ là hàm truyền của hệ kín theo kênh thứ nhất.

Theo định lý tới hạn (2-9) [19]), trị số xác lập $m_x(t)$ khi $t \to \infty$ là:

$$m_x(\infty) = \lim_{T\to 0} sX(s) = \lim_{T\to 0} \frac{sU(s)}{1 + k_0W(s)}$$

vì W(s) thường có khâu tích phân nên $W(s) \to \infty$ khi $s \to 0$ nên có thể bỏ trị số 1 ở mẫu số và ở quá trình dừng có thể viết :

$$m_x = \lim_{T\to 0} s \frac{U(s)}{k_0W(s)} \qquad (10\text{-}58)$$

Kênh hai chuyển tín hiệu ngẫu nhiên có phương trình của mật độ phổ :

$$S_x^o(\omega) = S_f(\omega)\left|W_{K1}(j\omega)\right|^2 \qquad (10\text{-}59)$$

Ở đây S_x^o và S_f là mật độ phổ của tín hiệu ngẫu nhiên $\overset{o}{x}$ và f, còn $W_{K1}(s) = \dfrac{1}{1 + k_1W(s)}$ là hàm truyền hệ kín theo kênh hai.

Độ tản của x được xác định theo mật độ phổ

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega \qquad (10\text{-}60)$$

Như vậy, từ hai phương trình (10 -58) và (10 - 60) ta rút ra :

$$\left.\begin{aligned} m_x &= m_x(k_0) \\ \sigma_x &= \sigma_x(k_1) \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}61)$$

Trong (10 -61) có bốn đại lượng chưa biết : m_x, σ_x, k_0, k_1 cho nên để giải nó còn cần thêm hai phương trình khác. Các phương trình ấy rút ra từ điều kiện tín hiệu x có phân bố chuẩn qua khâu phi tuyến. Dùng

một trong hai phương án tuyến tính hóa thống kê (10-51) hay (10-52) ta có :

$$\left.\begin{aligned} k_0 &= k_0(m_x, \sigma_x) \\ k_1 &= k_1(m_x, \sigma_x) \end{aligned}\right\} \qquad (10-62)$$

Giải hệ phương trình (10-61) và (10-62) ta có m_x và σ_x thể hiện đặc tính xác suất của sai số ở hệ tùy động.

Vì nhiễu f không có thành phần không đổi ($m_f = 0$) nên m_x là sai lệch ở trạng thái xác lập của hệ tùy động khi có nhiễu f(t).

Thành phần sai số ngẫu nhiên được xác định tương tự, theo mật độ phổ của thành phần tín hiệu ở đầu ra do nhiễu gây nên.

$$S_y^o(\omega) = S_f(\omega)\left|W_{yf}^o(j\omega)\right|^2 \qquad (10-63)$$

với $$W_{yf}^o(s) = \frac{k_1 W(s)}{1 + k_1 W(s)} .$$

Theo tích phân (10-60) tính $D_y = \sigma_y^2$ sau đó tìm sai số quân phương của hệ :

$$\bar{\varepsilon}^2(t) = m_x^2 + \sigma_y^2 \qquad (10-64)$$

Biểu thức (10-64) nói lên rằng sai số của hệ tùy động do tín hiệu tiền định có ích gây nên và do nhiễu có kỳ vọng toán bằng 0 có thể tương tự như biểu thức (9-42) và gồm có hai thành phần : thành phần do tín hiệu có ích u(t) và thành phần của y do nhiễu f(t)

Ví dụ 10-9 Xác định sai số xác lập của hệ tùy động $\varepsilon^2(t)$ với các điều kiện sau :

$$u = Bt ;$$

$$S_f(\omega) = 2\sigma_f^2\omega_0/(\omega^2 + \omega_0^2) ;$$

$$z = z_b \text{sign} x ;$$

$$W(s) = k/s.$$

Tín hiệu f(t) có phân bố chuẩn và

$$\omega_0/k = 1 ; B/(kz_b) = 0,5 ; \sigma_f/z_b = 2.$$

Theo (10-58) với $U(s) = B/s^2$:

$$m_x = \lim_{s \to 0} \frac{sB}{s^2 \dfrac{k_0 k}{s}} = \frac{B}{k_0 k} . \qquad (10-65)$$

Theo (10 -59) :

$$S_x^0(\omega) = \left[(2\sigma_f^2\omega_0/(\omega^2 + \omega_0^2)\right] \left| (j\omega)/(j\omega + kk_1) \right|^2 .$$

Thay vào (10 -60) và lấy tích phân ta có :

$$D_x = \sigma^2{}_x = (\sigma_f^2\, w_0)/(w_0 + kk_1) \;;$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_f}{\sqrt{1 + \dfrac{kk_1}{\omega_0}}} . \qquad (10\text{-}66)$$

Hai phương trình (10–62) trùng hợp với kết quả ở ví dụ 10–7. Bằng cách dùng cách tính thứ nhất, theo (10–54) và (10–55) ta có :

$$k_0 = \frac{2z_b}{m_x}\,\Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) ; \qquad (10\text{-}67)$$

$$k_1 = \frac{z_b}{\sigma_x}\sqrt{1 - 4\Phi^2\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)} . \qquad (10\text{-}68)$$

Từ (10 -65) :

$$m_x = \frac{B}{k_0 k} = \frac{B}{\dfrac{2z_b}{m_x}\,\Phi\left(\dfrac{m_x}{\sigma_x}\right) k} .$$

với $$\Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) = \frac{B}{2kz_b} . \qquad (10\text{-}69)$$

Thay k_1 từ (10–68) vào (10–66) ta có :

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_f^2}{1 + \dfrac{k\,k_1}{\omega_0}} = \frac{\sigma_f^2}{1 + \dfrac{k\,z_b}{\omega_0\sigma_x}\sqrt{1 - 4\,\dfrac{B^2}{4k^2z_b^2}}}$$

$$= \frac{\sigma_f^2}{1 + \sqrt{\dfrac{k^2z_b^2}{(\omega_0\sigma_x)^2} - \dfrac{B^2}{(\omega_0\sigma_x)^2}}}$$

hay : $$\sigma_x^2\left(1 + \frac{1}{\sigma_x}\,\frac{\sqrt{k^2z_b^2 - B^2}}{\omega_0}\right) = \sigma_f^2 ,$$

Do đó : $\sigma_x = -\alpha/2 + \sqrt{\sigma_f^2 + (\alpha/2)^2}$; (10-70)

mà $\alpha = \dfrac{\sqrt{k^2 z_b^2 - B^2}}{\omega_0}$.

Từ (10-69) theo đồ thị ở hình 10-3 ta xác định :

$$\beta = m_x/\sigma_x, \qquad (10\text{-}71)$$

và theo σ_x đã biết từ (10-70) tính :

$$m_x = \beta\sigma_x \qquad (10\text{-}72)$$

Theo (10-63) ;

$$S_y^o(\omega) = S_f^o(\omega)\,|\,(k_1k)/(j\omega + k_1k)\,|^2 =$$

$$= (2\sigma_f^2\omega_0)/(\omega^2 + \omega_0^2)\ \times |\,(k_1k)/(j\omega + k_1k)\,|^2. \qquad (10\text{-}73)$$

Sau khi thay $S_y^o(\omega)$ vào (10-60) và lấy tích phân ta có :

$$D_y = \sigma_y^2 = (\sigma_f^2\, k\, k_1)/(\omega_o + k\, k_1) \ ; \qquad (10\text{-}74)$$

và $$\varepsilon^{-2}(t) = m_x^2 + \sigma_y^2 . \qquad (10\text{-}75)$$

Từ (10-70) ta xác định :

$$\alpha/z_b = \sqrt{1 - 0{,}25} = 0{,}866 \ ;$$

$$\sigma_x/z_b = -\alpha/(2z_b) + \sqrt{(\sigma_f/z_b)^2 + (\alpha/2z_b)^2} = 1{,}6 \ ;$$

$$\Phi\left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right) = \frac{B}{2k\, z_b} = 0{,}25.$$

Theo đồ thị ở hình 10.3 ta xác định :

$$\beta = m_x/\sigma_x = 0{,}71 \ ; \ m_x/z_b = (\beta\sigma_x)/z_b = 1{,}136$$

Theo (10-68) và (10-74) :

$$k_1 = \frac{1}{1{,}6}\sqrt{1 - 0{,}25} = 0{,}54 \ ; \ \frac{\sigma_y^2}{z_b^2} = 1{,}4.$$

Sai số quân phương tương đối là :

$$\varepsilon^{-2}(t)/z_b^2 = 1{,}136^2 + 1{,}4 = 2{,}69$$

Ở trạng thái xác lập, ở đầu ra của rơle có thành phần không đổi $m_x = B/k$. Để duy trì đại lượng này ngay cả khi không có nhiễu, rơle

vẫn ở trạng thái đóng mở theo chu kỳ. Nhiễu làm phức tạp thêm quá trình. Tuy nhiên phương pháp tính gần đúng như trên cho phép đánh giá tính chất của các mối quan hệ nói trên.

BÀI TẬP CHƯƠNG 10

Bài tập 10-1 Xác định hệ số tuyến tính hóa ngẫu nhiên :

$$k^{nn}(\sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} x(f(x)\,p(x)\,dx$$

của khâu rơle :

$$f(x) = \begin{cases} k\,, & x > 0\,; \\ 0\,, & x = 0\,; \\ -k\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

với các mật độ phân bố sau :

a) phân bố đều :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{3}\,\sigma}\,, & |x| \leqslant \sqrt{3}\,\sigma\,; \\ 0\,, & |x| > \sqrt{3}\,\sigma\,. \end{cases}$$

b) phân bố răng cưa (tam giác) :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\sigma^2}\,x + \dfrac{1}{\sqrt{6}\,\sigma}\,, & -\sqrt{6}\,\sigma \leqslant x \leqslant 0\,; \\ -\dfrac{1}{6\sigma^2}\,x + \dfrac{1}{\sqrt{6}\,\sigma}\,, & 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{6}\,\sigma\,; \end{cases}$$

c) phân bố chuẩn :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-x^2/2\sigma^2}$$

d) phân bố Laplace :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\,e^{-\frac{|x|}{\sigma}/\sqrt{2}}$$

Đáp án

a) $k^{nn}(\sigma) = \sqrt{\dfrac{3}{4}}\cdot\dfrac{k}{\sigma} \approx 0{,}87\,\dfrac{k}{\sigma}$;

b) $k^{nn}(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{k}{\sigma} \approx 0{,}82 \frac{k}{\sigma}$;

c) $k^{nn}(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{k}{\sigma} \approx 0{,}80 \frac{k}{\sigma}$;

d) $k^{nn}(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{k}{\sigma} \approx 0{,}71 \frac{k}{\sigma}$.

Bài tập 10-2 Hệ phi tuyến có đặc tính rơle lý tưởng :

$$z = f(x) = k\,\mathrm{sign}x = \begin{cases} k\ , & x > 0\ , \\ 0\ , & x = 0\ , \\ -k\ , & x < 0\ , \end{cases} \qquad (10\text{-}75)$$

và phần tuyến tính có đặc tính tần :

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{j\omega\,(T_1 j\omega + 1)} \qquad (10\text{-}76)$$

Ở đầu vào của hệ có tín hiệu ngẫu nhiên dừng với mật độ phổ :

$$S_f(\omega) = \frac{S_0}{|1 + Tj\omega|^2} = \frac{S_0}{1 + T_f^2\omega^2} \qquad (10\text{-}77)$$

Hãy xác định độ tản của tín hiệu ra của hệ σ^2_y

Đáp án

Độ tản của tín hiệu vào theo (9-18) :

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,d\omega = \frac{S_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1 + T_f^2\omega^2} = \frac{S_0}{T_f} \qquad (10\text{-}78)$$

Thay (10-78) vào (10-77)

$$S_f(\omega) = \frac{T_f\sigma_f^2}{|1 + Tj\omega|^2} \qquad (10\text{-}79)$$

Để tìm σ^2_x trước hết phải xác định $k^{nn}(\sigma_x)$ với phân bố chuẩn :

$$k^{nn}(\sigma_x) = \frac{k}{\sigma_x^2}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{sign}x\,p(x)\,dx =$$

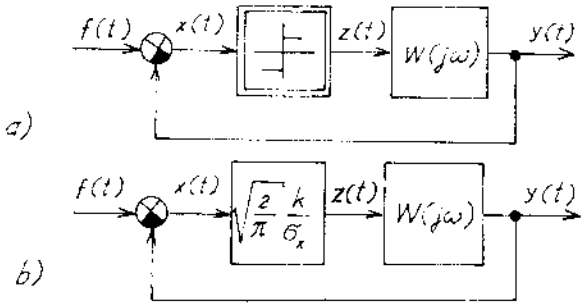
$$= \frac{k}{\sigma_x^2}\int_0^{\infty}\frac{2x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\,e^{-x^2/2\sigma_x^2}\,dx \qquad (10\text{-}80)$$

Dùng biến mới $u = \frac{x^2}{2\sigma_x}$ ta có :

$$k^{nn}(\sigma_x) = \frac{2k}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}\int_0^{\infty} e^{-u}\,du\,. \qquad (10\text{-}81)$$

vì : $\int_0^{\infty} e^{-u}\,du = 1,$

nên : $$k^{nn}(\sigma_x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{k}{\sigma_x} \qquad (10\text{-}82)$$



Hình 10-14

Biểu thức (10–82) là đáp án của bài tập 10–1c. Ở hình 10.14a có sơ đồ khối của hệ phi tuyến đã cho, còn hình 10.14b là sơ đồ tương đương. Đặc tính tần đối với sai lệch x :

$$W_x(j\omega,\ \sigma_x) = \frac{1}{1 + k^{nn}(\sigma_x)\,W(j\omega)} = \frac{j\omega(T_1 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1) + k^{nn}(\sigma_x)\,k_1}\,. \qquad (10\text{-}83)$$

Theo (9–19) với (10–83) và (10–79) ta có :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{j\omega(T_1 j\omega + 1)}{j\omega\,(T_1 j\omega + 1) + k^{nn}(\sigma_x)\,k_1}\right|^2 \frac{T_f\sigma_f^2}{|\,1 + T_f j\omega\,|^2}\,d\omega\ ,$$

hay :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{T_f^{1/2}\sigma_f j\omega + T_1 T_f^{1/2}\,\sigma_f(j\omega)^2}{k^{nn}(\sigma_x)k_1 + \left(1 + T_f k^{nn}(\sigma_x)\,k_1\right)j\omega + (T_1 + T_f)\,(j\omega)^2 - T_1 T_f(j\omega)^3}\right|^2 d\omega$$

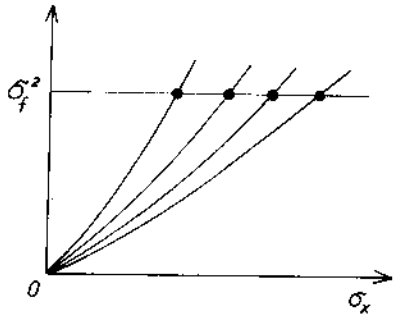
Dùng Phụ lục B [19] để tính tích phân trên với n = 3 và một vài biến đổi giản đơn, ta có :

$$\sigma_x^2 = \sigma_f^2 \frac{1 + \frac{T_f}{T_1} + k_1 k^{nn}(\sigma_x) \frac{T_f}{T_1}}{1 + \frac{T_f}{T_1} + k_1 k^{nn}(\sigma_x) \left(\frac{T_f}{T_1}\right)^2} \quad (10\text{-}84)$$

Phương trình (10-84) đúng với mọi đặc tính phi tuyến. Với khâu rơle lý tưởng cần thay thế k^{nn} (σ_x) từ (10-82) vào (10-84).

Quan hệ giữa σ_f^2 và σ_x với $\frac{T_f}{T_1}$ cố định và k_1k khác nhau cho ở hình 10.15. Với σ^2_f đã biết, vẽ đường song song trục hoành, xác định được σ_x. Với k_1k bé $\sigma_f = \sigma_x$ tương ứng với chế độ làm việc xấu. Khi $k_1k \to \infty$, tương quan này sẽ tiến đến giới hạn :

$$\frac{\sigma_f^2}{\sigma_x^2} = \frac{T_f}{T_1} .$$



Hình 10.15

Độ tản của tín hiệu ra σ_y^2 cần tìm được xác định từ (10-84) và bằng :

$$\sigma_y^2 = \sigma_f^2 \frac{\frac{T_f}{T_1}\left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right) k_1 k^{nn}(\sigma_x)}{1 + \frac{T_f}{T_1} + \left(\frac{T_f}{T_1}\right)^2 k_1 k^{nn}(\sigma_x)}$$

Trong trường hợp hệ rơle :

$$\sigma_y^2 = \sigma_f^2 \frac{\frac{T_f}{T_1}\left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right)^2 k_1 k \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\left(1 + \frac{T_f}{T_1}\right)\sigma_x + \left(\frac{T_f}{T_1}\right)^2 k_1 k \sqrt{\frac{2}{\pi}}} \quad (10\text{-}85)$$

Quan hệ này xác định hiệu quả làm giảm nhiễu ở đầu ra của hệ rơle.

PHỤ LỤC

A. *Định lý Sylvester*

Ví dụ $Q = X'AX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$ (A–1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Định lý Sylvester phát biểu như sau :

Q xác định dương nếu và chỉ nếu mọi định thức con của định thức $|A|$ đều dương :

$$a_{11} > 0 , \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 , \ldots\ldots |A| > 0 \qquad \text{(A–2)}$$

Nếu một định thức con bằng 0, Q bán xác định. Ma trận A được xem là xác định dương nếu dạng bình phương tương ứng là xác định dương còn –A là xác định âm.

Ví dụ A–1 $Q = x^2_1 + 2x^2_2 + 9x^2_3 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$. Từ (A–1) hệ số của x_ix_j với $i \neq j$ là $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$, do đó :

$a_{11} = 1$; $a_{22} = 2$; $a_{33} = 9$; $a_{12} = 1$; $a_{31} = 2$; $a_{23} = 3$.

$$a_{11} = 1 > 0 , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0 , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

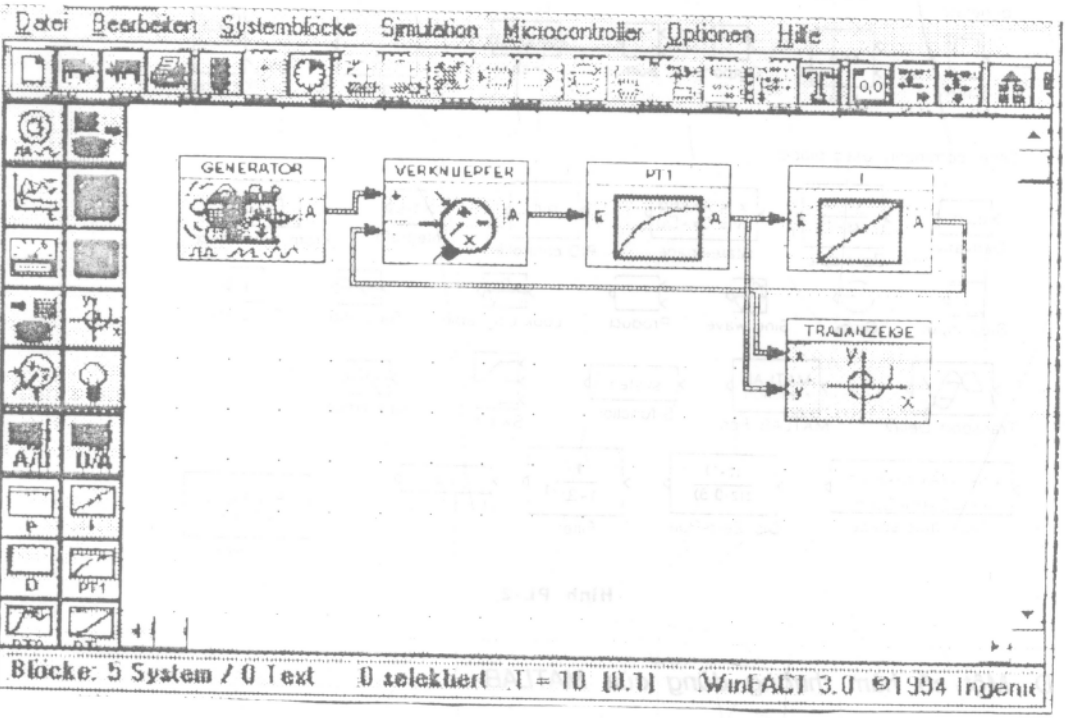
Vậy Q xác định dương.

Ví dụ A-2 1) $V(x_1, x_2) = x^2_1 + x^2_2$ là xác định dương

2) $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ là không xác định

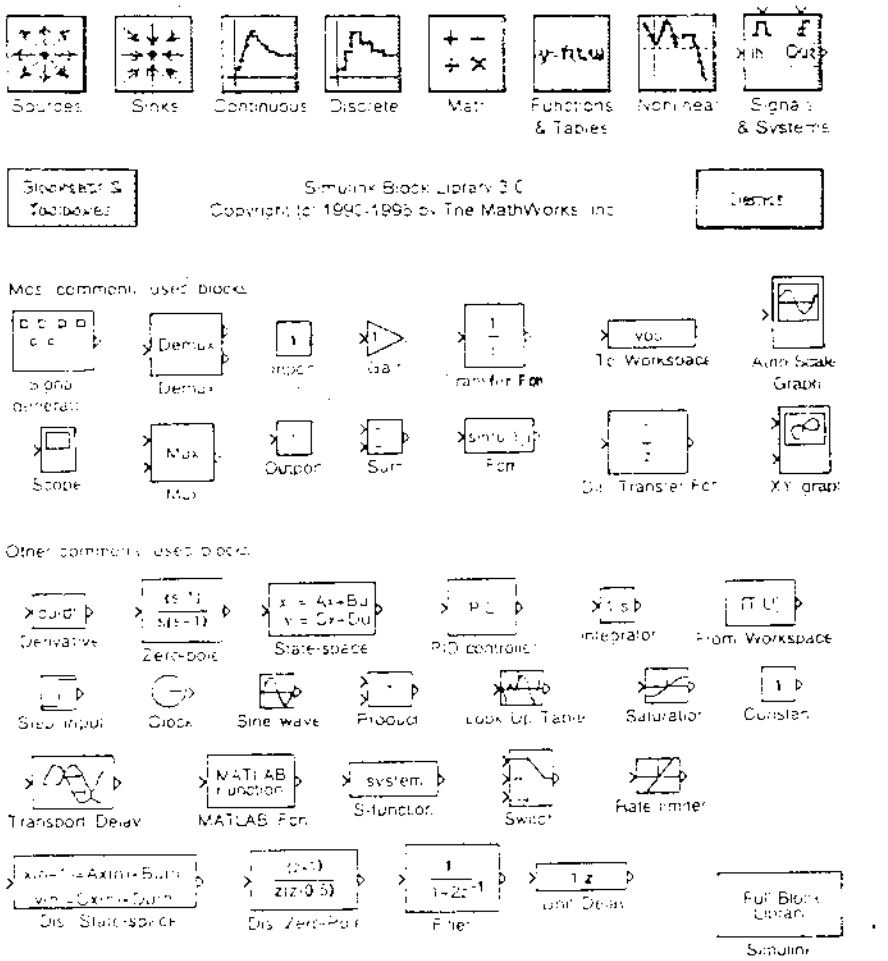
3) $V(x_1, x_2, x_3) = -x^2_1 - x^2_2$ là bán xác định âm vì nó bằng 0 theo trục x_3.

B. Các khối và sơ đồ khối mô phỏng theo winFACT



Hình PL-1

C. Các khối ở thư viện SimulinK (MATLAB)



Hình PL-2

D. Một số hàm thường dùng của MATLAB

D-1. *Các hàm toán*

Bảng D-1

Tên hàm	Nội dung
abs	Trị tuyệt đối
sign	Dấu của hàm

Bảng D-1

Tên hàm	Nội dung
sqrt	Căn quân phương
pow2	Luỹ thừa bậc hai
exp	Hàm mũ
log, log^2, log 10	Các hàm logarít
sin, cos, tan, cot, sec, csc.	Các hàm lượng giác
asin, acos, atan2	Các hàm lượng giác ngược.
atan, acot, asec	
acsc	
sinh, cosh, tanh,	Các hàm hyperbol
coth, asinh, acosh	và nghịch đảo của chúng
atanh, acoth, sech,	
csch, asech, acsch	

D-2. *Véctơ và ma trận*

Bảng D-2

Tên hàm	Nội dung
linspace, logspace	Tạo vectơ
eye	Đồng nhất thức ma trận
ones, zeros	Ma trận một và không
rand, randn	Ma trận ngẫu nhiên
diag	Ma trận chéo
triu, tril	Ma trận tam giác
\	Chia trái, nghiệm của toán tử
det,rank	Định thức và số hạng
inv	Nghịch đảo của ma trận
norm, normest	chuẩn của ma trận
eig, polyeig	Đại lượng riêng và vectơ riêng
poly	Đa thức đặc trưng
trace	vết của ma trận

D-3. *Xử lý số liệu và các hàm thống kê*

Bảng D-3

Tên hàm	Nội dung
corrcoef	Hệ số tương quan
cov	Hiệp phương sai
cumprod	Tích tích luỹ
cumsum	Tổng tích luỹ
gradient (z, dx, dy)	Gradient xấp xỉ
mean	Trị số trung bình

Bảng D-3

Tên hàm	Nội dung
median	Median
rand	Số ngẫu nhiên phân bố đều
randn	Số ngẫu nhiên phân bố chuẩn
fft, ifft	Biến đổi Pourier nhanh, ngược
fft2, ifft2	2DFFT và 2DFFT ngược
conv	Tích chập
length	Độ dài của chuỗi

D-4. *Phương trình và giải phương trình*

Bảng D-4

Tên hàm	Nội dung
polyfit	Đa thức xấp xỉ
legendre, bessel, bessely	Các hàm trực giao
roots	Điểm không của đa thức
fzero	Điểm không của hàm
fmin, fmins	Cực tiểu của hàm
trapz, quad	Tích tích phân hữu hạn
quad8	
ode 23, ode 45	Dụng cụ giải phương trình vi phân thông thường (ODE)
ode 23p	
broyden	Giải hệ phương trình phi tuyến bằng phương pháp Broyden
diffgen	Lấy đạo hàm đến bậc bốn một hàm
eiginv	Xác định đại lượng riêng (véctơ riêng) bằng phương pháp lặp nghịch đảo
eigit	Xác định đại lượng riêng (véctơ riêng) thứ nhất bằng phương pháp lặp
eulertp	Giải phương trình vi phân bằng phương pháp hình thang
feuler	Giải phương trình vi phân bằng phương pháp Euler
fgauss	Ước lượng một tích phân dùng phương pháp Gauss
fhamming	Giải phương trình vi phân dùng phương pháp Hamming
fhermite	Giải phương trình vi phân bằng phương pháp Hermite
fnewton	Giải phương trình đơn biến bằng phương pháp Newton
newtonmv	Giải hệ phương trình phi tuyến bằng phương pháp Newton
golden	Xác định cực tiểu hàm đơn biến
rkgen	Giải phương trình vi phân bằng phương pháp Runge-Rutta
romb	Ước lượng tích phân bằng phương pháp Romberg
rombergx	Giải phương trình vi phân bằng phương pháp Romberg
schroder	Giải phương trình đơn biến đa nghiệm theo Schroder
solveq	Giải phương trình bậc hai
twopoint	Giải bài toán bờ bậc hai dùng sai phân hữu hạn.

D-5. *Mô hình hoá và tổng hợp LQG*

Bảng D-5

Tên hàm	Nội dung
minreal	Tính mô hình tối giản (loại trừ nghiệm không/nghiệm cực)
sminreal	Tính mô hình cấu trúc đơn giản
canon	Thực hiện mô hình không gian trạng thái chính tắc
damp	Tính tần số riêng và tỷ số tắt dần
dcgain	Tính hệ số khuếch đại hạ tần
covar	Tính hiệp phương sai của đáp ứng đối với ồn trắng
pzmap	Vẽ phân bố nghiệm không và nghiệm cực của mô hình tuyến tính (LTI)
append	Nối mô hình trong khối cấu hình chéo
augstate	Tăng đầu ra bằng cách thêm trạng thái
drmodel, drss	Tạo mô hình ngẫu nhiên, gián đoạn
ord2	Tạo mô hình bậc hai
rmodel, rss	Tạo mô hình ngẫu nhiên, liên tục
filter	Mô phỏng bộ lọc gián đoạn SISO
gensig	Tạo tín hiệu vào
initial	Điều kiện đầu của đáp ứng
lsim	Mô phỏng đáp ứng của mô hình LTI với đầu vào tùy ý
acker	Tổng hợp theo quỹ đạo nghiệm SISO
place	Tổng hợp theo phân bố nghiệm MIMO
estim	Tạo bộ ước lượng trạng thái theo hệ số ước lượng
reg	Tạo bộ điều chỉnh theo hệ số hồi tiếp trạng thái và ước lượng
lqr	Xác định hệ số khuếch đại tối ưu theo LQ cho mô hình liên tục
dlqr	Xác định hệ số khuếch đại tối ưu theo LQ cho mô hình gián đoạn
lqry	Xác định hệ số khuếch đại tối ưu theo LQ với tín hiệu ra
lqrd	Xác định hệ số khuếch đại gián đoạn theo LQ cho mô hình liên tục
kalman	Tính bộ ước lượng Kalman
kalmd	Tính bộ ước lượng Kalman gián đoạn cho mô hình liên tục
lqgreg	Tạo bộ điều chỉnh LQG theo hệ số khuếch đại LQ và bộ lọc Kalman
care	Giải phương trình Riccati liên tục
dare	Giải phương trình Riccati gián đoạn
lyap	Giải phương trình Liapunov liên tục
dlyap	Giải phương trình Liapunov gián đoạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Benjamin C. Kuo "Antomatic Control systems" Prentice-Hall Inter., Inc. 1995.

[2] Bequette Wayne B. "Process Dynamics. Modeling, Analysis and Simulation". Prentice-Hall. Inter., Inc. 1998.

[3] Cochin I. "Analysis and Design of Dynamic Systems". Addison-Wesley 1997.

[4] Derek R. & David N. N. "System Dynamic. An Introduction". Prentice-Hall Inter., Inc. 1997.

[5] Gene F. Franklin, J. David Powell, Michael L. Workman. "Digital control of Dynamic Systems". Addison-Wesley 1990.

[6] Gustaf Olson & Gianguido Piani "Computer Systems for Automation an Control" Prentice-Hall Inter., Inc.

[7] Gopal M. "Modern Control System Theory" New Delhi 1989.

[8] John Penny & George Lindfield. "Numerical Method using Matlab". Prentice-Hall Jnter., Inc. 2000.

[9] John Van de Vegte. "Feedback Control Systems" Prentice-Hall Inter., Inc. 1991.

[10] Johnson Curtis D. "Process Control Instrumentation Technology" Inter., Inc. 1997.

[11] Katshuhiko Ogata. "System Dynamics" Prentice-Hall Inter., Inc. 1998.

[12] Ken Dutton & others. "The art of Control IngineEring" Addison-Wesley 1997.

[13] Netushill A. V. (ped.) "Theory of Automatic Control". Moscow 1978.

[14] Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh. "Hệ phi tuyến tính". Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1999.

[15] Nguyễn Doãn Phước, Phan Xuân Minh, "Nhận dạng hệ thống điều khiển". Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật. Hà Nội 2001

[16] Нгуен Тхыонг Нго "Чувствителbность систем автоматигеского Управления" (обзор) А и Т Москва N°5 - 1971.

[17] Nguyen Thuong Ngo. "Sensitivity of Automatic Control Systems". System Sensitivity Analysis. Edited by José B. Cruz. Illinois-USA-1973.

[18] Nguyễn Thương Ngô. "Lý thuyết điều khiển tự động hiện đại. Hệ tối ưu và thích nghi" Nhà xuất bản KH&KT Hà Nội 1999.

[19] Nguyễn Thương Ngô. " Lý thuyết điều khiển tự động Hệ tuyến tính". Nhà xuất bản KH&KT Hà Nội 2000.

[20] Nguyễn Thương Ngô. "Lý thuyết điều khiển tự động. Hệ xung số" Nhà xuất bản KH&KT Hà Nội 2001.

[21] Norman Nise "Control System Engineering" Califoria. State Polytechnic University. Addson-Wesley. 1995.

[22] Richard C. Dorf & Robert H. Bishop. "Modern control Systems" Addison-Wesley. 1997

[23] Цыпкин Я. З. "Основы теорти автоматинеского управеления" Наука. Москва 1971.'

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG
THÔNG THƯỜNG VÀ HIỆN ĐẠI

Quyển 3

HỆ PHI TUYẾN - HỆ NGẪU NHIÊN

Tác giả : NGUYỄN THƯƠNG NGÔ

Chịu trách nhiệm xuất bản: TS. PHẠM VĂN DIỄN

Biên tập: NGUYỄN NGỌC KHUÊ

Vẽ bìa: ĐẶNG NGỌC QUANG

048572 020000

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

In 1.000 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc

Số đăng ký KHXB: 209-2009/CXB/63.3-10/KHKT ngày 18/3/2009

Quyết định xuất bản số: 151/QĐXB-NXBKHKT ngày 15/5/2009

In xong và nộp lưu chiểu Quý III năm 2009.

209140 M03

1211090000003

68,000

BT hoá kỹ thuật (2 đời giải chi

Giá: 68.000đ