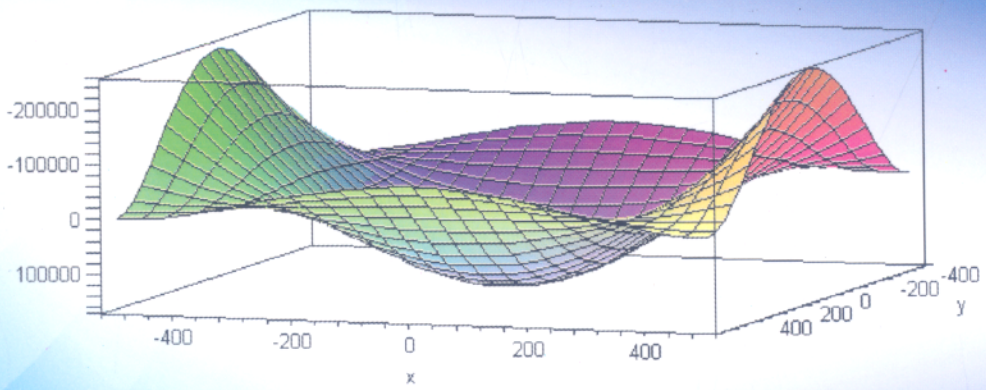
PGS. TS. NHỮ PHƯƠNG MAI

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

DÙNG TRONG CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PGS. TS. NHỮ PHƯƠNG MAI

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

(Dùng trong các trường Đại học Kỹ thuật)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Công ty Cổ phần sách Đại học - Dạy nghề – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm.

576 – 2009/CXB/13 – 1066/GD

Mã số : 7B761Y9 – DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết đàn hồi đóng một vai trò quan trọng trong Cơ học vật rắn biến dạng nói riêng và trong Cơ học môi trường liên tục nói chung. Lý thuyết đàn hồi được xây dựng trên các giả thuyết về biến dạng phù hợp với thực tế kỹ thuật, nhằm đơn giản hoá và xây dựng các phương pháp gần đúng để giải các bài toán kỹ thuật với mức độ chính xác theo yêu cầu thiết kế. Trên cơ sở các quy luật và phương trình cơ bản của lý thuyết đàn hồi có thể giải một loạt các bài toán trong thực tiễn: tính toán ứng suất, biến dạng, chuyển vị của các kết cấu dạng thanh, tấm mỏng, ống dày, đĩa quay, vỏ mỏng, vật thể tiếp xúc... dưới tác dụng của các dạng tải trọng khác nhau. Chính vì vậy, ***Lý thuyết đàn hồi*** có tính ứng dụng cao và được đưa vào giảng dạy ở hầu hết các trường Đại học kỹ thuật, là môn cơ sở chuyên ngành cho Cơ khí, Cơ học kỹ thuật và trang bị kiến thức cho một số chuyên ngành khác (Lý thuyết tấm vỏ, Kết cấu hàng không,...).

Cuốn sách "Lý thuyết đàn hồi" được biên soạn theo Chương trình khung của Bộ Giáo dục & Đào tạo cho ngành Cơ học kỹ thuật với thời lượng 2-3 tín chỉ của hệ Đại học chính qui, cũng như hệ Cao học. Nội dung cuốn sách được dựa trên những kiến thức cơ bản nhất của Lý thuyết đàn hồi, nhằm giúp cho người đọc có thể nắm vững phương pháp giải các bài toán một cách dễ hiểu và có thể ứng dụng vào việc giải quyết các vấn đề tương tự trong thực tế. Tác giả đã tập hợp và chọn lọc các vấn đề có tính đặc trưng nhất, đồng thời bổ sung những kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn dưới dạng đồ thị, hình ảnh để minh hoạ sinh động sự phân bố ứng suất cũng như biến dạng của vật thể đàn hồi dưới tác dụng của các ngoại lực.

Nội dung cuốn sách gồm 6 chương, trong đó trình bày lý thuyết, các ví dụ, bài tập tự giải. Phần phụ lục bao gồm các bảng tóm tắt chuyển vị và nội lực của tấm tròn chịu uốn bởi tải trọng đối xứng trục, các đồ thị và hình ảnh tính toán áp dụng phương pháp Phần tử hữu hạn. Bạn đọc có thể tham khảo

thêm bài tập trong cuốn **"*Bài tập đàn hồi ứng dụng*"** (cùng nhà xuất bản) để bổ sung và hoàn thiện hơn kiến thức về Lý thuyết đàn hồi.

Cuốn sách có thể dùng làm tài liệu giảng dạy, học tập cho sinh viên các trường Đại học kỹ thuật, các học viên cao học, nghiên cứu sinh, và là tài liệu tham khảo cho các kỹ sư, nhà nghiên cứu về lĩnh vực Cơ học vật rắn biến dạng.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã tạo điều kiện thuận lợi để cuốn sách được ra mắt bạn đọc. Đồng thời xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã động viên và giúp đỡ cho việc hoàn thiện cuốn sách này.

Tác giả xin hoan nghênh mọi ý kiến đóng góp và xin vui lòng gửi về địa chỉ: Bộ môn Sức bền vật liệu, Khoa Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

Hà nội, tháng 6/2009

Tác giả

Chương 1

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT - TRẠNG THÁI BIẾN DẠNG

1 – TEN-XƠ ỨNG SUẤT

1.1. Ứng suất trên mặt nghiêng bất kỳ trong hệ tọa độ Đề các

Xét một vật thể đàn hồi ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của một hệ ngoại lực. Tưởng tượng cắt vật thể bằng mặt cắt bất kỳ đi qua điểm M (hình 1.1), xét sự cân bằng của phần A, ta có véctơ ứng suất tại điểm M được định nghĩa bởi công thức :

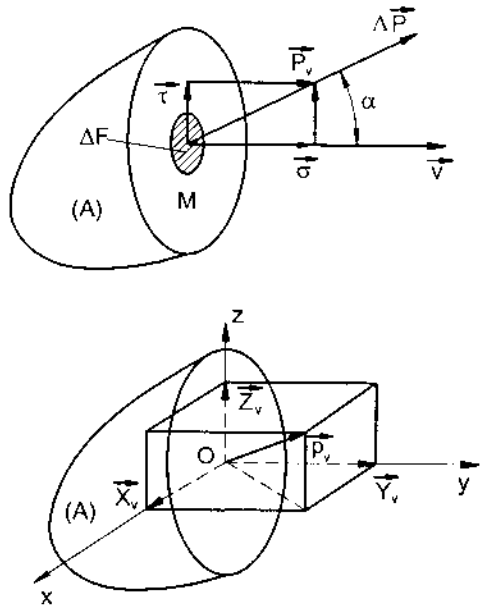
$$\vec{p}_v = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} \qquad (1.1)$$

hoặc có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\vec{p}_v = \vec{\sigma} + \vec{\tau} \qquad (1.2)$$

Với $\Delta\vec{P}$ là véctơ nội lực tác dụng trên diện tích ΔF, $\vec{\sigma}$ là thành phần ứng suất pháp, $\vec{\tau}$ là thành phần ứng suất tiếp. Ký hiệu $\vec{v}$ là véctơ pháp tuyến đơn vị của mặt cắt tại điểm M, α là góc giữa $\vec{p}_v$ và $\vec{v}$ ta có :

$$\left.\begin{aligned} |\vec{\sigma}| &= \vec{p}_v . \vec{v} \\ |\vec{\tau}| &= \sqrt{|\vec{p}_v|^2 - |\vec{\sigma}|^2} \\ \cos\alpha &= \frac{\vec{p}_v . \vec{v}}{|\vec{p}_v|} \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$



Hình 1.1

Nếu phương pháp tuyến của mặt cắt trùng với phương của trục toạ độ, ta có các véctơ ứng suất trên các mặt tương ứng được xác định bởi :

$$\vec{p}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$$

$$\vec{p}_y = \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \qquad (1.4)$$

$$\vec{p}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k}$$

Trong trường hợp mặt cắt bất kỳ, ta có :

$$\vec{p}_v = X_v \vec{i} + Y_v \vec{j} + Z_v \vec{k} \qquad (1.5)$$

$$= (X_v, Y_v, Z_v) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix},$$

với $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véctơ cơ sở của hệ trục tọa độ.

Độ lớn của véctơ ứng suất bằng: $p_v = \sqrt{X_v^{\ 2} + Y_v^{\ 2} + Z_v^{\ 2}}$ (1.6)

Từ (1.4), lần lượt nhân các biểu thức với các côsin chỉ phương của $\vec{v}$ là ℓ, m, n rồi cộng lại, ta có các thành phần hình chiếu của $\vec{p}_v$ được xác định bởi công thức :

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x \ell + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_v = \tau_{xy} \ell + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_v = \tau_{xz} \ell + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (1.7)$$

Hoặc dưới dạng ma trận :

$$\begin{pmatrix} X_v \\ Y_v \\ Z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (1.7')$$

Tập hợp các thành phần của ứng suất trên các mặt phẳng song song với các mặt tọa độ lập thành ten-xơ ứng suất:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \text{ hoặc } T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

với $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $(i \neq j)$ (còn gọi là định luật đối ứng của ứng suất tiếp).

1.2. Ứng suất chính - phương chính

Mặt phẳng trên đó ứng suất tiếp bằng không gọi là *mặt chính*, ứng suất pháp trên mặt chính gọi là *ứng suất chính*, phương pháp tuyến của mặt chính gọi là *phương chính*.

Khi đó ten-xơ ứng suất sẽ trở thành ma trận đường chéo:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Ký hiệu σ là ứng suất chính, $\vec{v}$ là véctơ chỉ phương của phương chính, ta có:

$$\vec{p} = \sigma.\vec{v} \tag{1.8}$$

Chú ý rằng các côsin chỉ phương của $\vec{v}$ là ℓ, m, n, và hình chiếu của $\vec{p}$ chính là X_v, Y_v, Z_v, so sánh (1.7) và (1.8), ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}\ell + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}\ell + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Do $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$, ta có hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất (1.9) có nghiệm không tầm

thường khi định thức bằng không:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

Khai triển định thức (1.9) ta có:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \tag{1.10'}$$

Phương trình bậc 3 trên có 3 nghiệm thực $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, lần lượt thay trị số của ứng suất chính vào hệ (1.9), kết hợp với điều kiện tổng bình phương các côsin chỉ phương bằng 1, ta tìm được các phương chính tương ứng.

Các ứng suất chính có trị số không phụ thuộc hệ trục toạ độ, do đó các hệ số của phương trình trên là không đổi đối với mọi phép biến đổi tọa độ, do đó còn được gọi là các *bất biến* của ten-xơ ứng suất:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = -\left\{\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_x \end{vmatrix}\right\}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \qquad (1.11)$$

Ta có thể chứng minh một cách dễ dàng tính chất trực giao của các phương chính: từ hệ (1.7). Thay giá trị σ và các côsin chỉ phương của ứng suất chính thứ nhất, nhân hai vế của phương trình lần lượt với các côsin chỉ phương của phương chính thứ hai, rồi làm tương tự với các chỉ số 1, 2 đổi chỗ cho nhau, sau đó trừ hai kết quả tìm được, ta có:

$$(\ell_1\ell_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0 \qquad (1.12)$$

Do các ứng suất chính nói chung là khác nhau nên thừa số thứ hai phải bằng không, đó chính là tích vô hướng của hai véctơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$, hay $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. Tương tự: $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_3$; $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$.

Ta nhận xét thấy bài toán tìm ứng suất chính và phương chính tương tự bài toán tìm trị riêng và véctơ riêng của ma trận T_σ.

Nếu chọn hệ trục toạ độ trùng với các phương chính, ta có các bất biến của ten-xơ ứng suất xác định bởi công thức:

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$J_2 = -\left\{\begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix}\right\} = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \qquad (1.13)$$

Như vậy ta thấy *tổng các ứng suất pháp theo ba phương vuông góc bất kỳ là không đổi, các phương chính vuông góc với nhau từng đôi một.*

1.3. Ten-xơ ứng suất cầu và ten-xơ ứng suất lệch

Trạng thái ứng suất bất kỳ có thể phân tích thành cộng tác dụng của hai trạng thái ứng suất đặc biệt: trạng thái *ứng suất cầu* và trạng thái *ứng suất lệch.*

Ký hiệu *ứng suất trung bình* theo công thức:

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \tag{1.14}$$

Ten-xơ ứng suất cầu có dạng:

$$T_\sigma^C = \begin{pmatrix} \sigma_{tb} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{tb} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{tb} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Ten-xơ ứng suất lệch có dạng:

$$T_\sigma^D = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{tb} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{tb} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{tb} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Ta thấy rõ ràng : $T_\sigma = T_\sigma^C + T_\sigma^D$ (1.17)

Trạng thái ứng suất cầu chỉ gây nên *biến đổi về thể tích*, trạng thái ứng suất lệch chỉ gây nên *biến đổi hình dáng* của phân tố trong vật thể đàn hồi dưới tác động của ngoại lực.

2 – TEN-XƠ BIẾN DẠNG

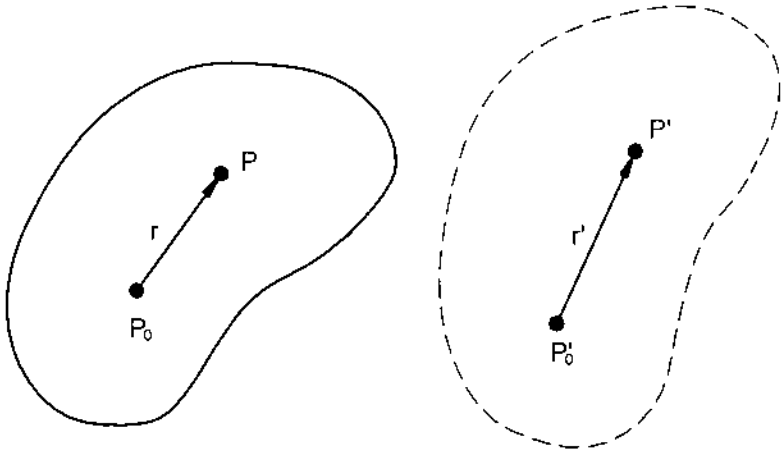
2.1. Hệ thức Côsi giữa biến dạng và chuyển vị

Gọi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ và $P(x, y, z)$ là hai điểm bất kỳ nằm trong vật thể đàn hồi ở trạng thái chưa biến dạng, sau khi biến dạng, vị trí mới của P_0 là $P_0'(x_0', y_0', z_0')$ và $P'(x', y', z')$ (hình 1.2a). Ký hiệu $\vec{r}, \vec{r}'$ là các véctơ $\overrightarrow{P_0P}$ và $\overrightarrow{P_0'P'}$. Ta gọi véctơ $\overrightarrow{PP'}$ là véctơ chuyển vị của P sau khi biến dạng. Khi đó thành phần hình chiếu của $\overrightarrow{PP'}$ được xác định như sau:

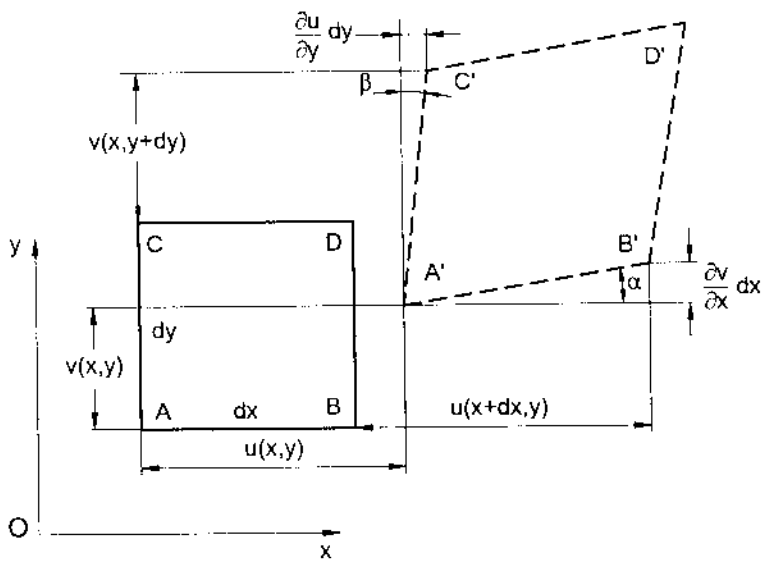
$$u = x' - x$$

$$v = y' - y$$

$$w = z' - z \tag{1.18}$$



Hình 1.2a. Các thành phần của chuyển vị là các hàm số của toạ độ



Hình 1.2b

Trên hình 1.2b, xét phân tố ABDC ở vị trí trước biến dạng, độ dài của AB là dx, của AC là dy (giả thiết AB⊥ AC). Sau biến dạng, vị trí mới của chúng là A', B', D', C'. Ký hiệu u, v là thành phần chuyển vị của điểm A theo phương x, y tương ứng, ta có độ biến dạng dài tỷ đối của AB và AC theo phương x, y lần lượt là:

$$\varepsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1.19)$$

Tương tự, trong không gian ta có biến dạng dài tỷ đối theo phương z là:

$$\varepsilon_z = \frac{\left(w + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right) - w}{dz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (1.20)$$

Do biến dạng của phân tố coi là vô cùng bé, các góc α và β được coi bằng tang của chúng. Sự thay đổi của góc vuông $B\hat{A}C$ trong mặt phẳng xy ký hiệu là γ_{xy} xác định bởi:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Tương tự, ta có các biến dạng góc trong mặt phẳng yz và xz:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad (1.21)$$

Các biểu thức trên gọi là hệ thức Côsi, biểu diễn sự liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị.

Các biểu thức trên có thể viết gọn như sau:

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, với ε_{ij} là thành phần của ten-xơ biến dạng T_ε: (u_{ij} là thành phần chuyển vị theo các trục toạ độ).

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \text{ hoặc } T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \qquad (1.22)$$

Tương tự như tính ứng suất trên mặt nghiêng bất kỳ, ta có thể sử dung ten-xơ biến dạng để tính biến dạng dài của một đoạn thẳng cho trước, nếu biết véctơ chỉ phương của nó là $\vec{v}$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\nu x} \\ \varepsilon_{\nu y} \\ \varepsilon_{\nu z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

Nếu biết véctơ chỉ phương của hai đoạn AB, AC trước biến dạng là $\vec{\nu}$ và $\vec{\mu}$, ta có công thức xác định sự thay đổi góc giữa hai đoạn AB và AC sau khi biến dạng là:

$$\gamma = 2(\varepsilon_x \nu_1\mu_1 + \varepsilon_y \nu_2\mu_2 + \varepsilon_z \nu_3\mu_3) + \gamma_{xy}(\nu_1\mu_2 + \nu_2\mu_1) + \gamma_{yz}(\nu_2\mu_3 + \nu_3\mu_2) +$$
$$+\gamma_{xz}(\nu_1\mu_3 + \nu_3\mu_1) \tag{1.24}$$

hoặc dưới dạng ma trận: $\gamma = (2T_\varepsilon \vec{\nu})^T \vec{\mu}$ (1.25)

Trong đó, thừa số thứ nhất trong ngoặc là ma trận chuyển vị của phép nhân 2 lần ma trận của biến dạng với ma trận của véctơ $\vec{\nu}$.

2.2. Biến dạng chính - Phương chính của ten-xơ biến dạng

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

với ε_1, ε_2, ε_3 là các biến dạng chính. Phương trình để xác định biến dạng chính và phương chính giống như ứng suất chính & phương chính của ten-xơ ứng suất là:

$$\varepsilon^3 - I_1\varepsilon^2 - I_2\varepsilon - I_3 = 0 \tag{1.26}$$

Với $I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta$

$$I_2 = -\left\{ \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_x \end{vmatrix} \right\}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \qquad (1.27)$$

$$\begin{cases} (\varepsilon_x - \varepsilon)\ell + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\ell + (\varepsilon_y - \varepsilon)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}\ell + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + (\varepsilon_z - \varepsilon)n = 0 \end{cases} \qquad (1.28)$$

với $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$

Tương tự như ten-xơ ứng suất, ten-xơ biến dạng cũng có thể phân tích thành tổng của ten-xơ biến dạng cầu và ten-xơ biến dạng lệch. Người ta cũng chứng minh được rằng, các phương chính của ten-xơ ứng suất và phương chính của ten-xơ biến dạng là trùng nhau (nếu coi biến dạng là bé).

Ví dụ 1: Ten-xơ ứng suất tại điểm P của vật thể đàn hồi được cho như sau:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Xác định véctơ ứng suất trện mặt nghiêng có pháp tuyến:

$$\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \text{ đi qua P}$$

b) Xác định các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp của $\overrightarrow{p_v}$.

c) Tính góc giữa $\overrightarrow{p_v}$ và $\vec{v}$

Giải:

a) Áp dụng công thức (1.7) ta có:

$$\begin{cases} X_v = 7\times\frac{2}{3} + 0\times\left(-\frac{2}{3}\right) - 2\times\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \\ Y_v = 0\times\frac{2}{3} + 5\times\left(-\frac{2}{3}\right) + 0\times\frac{1}{3} = -\frac{10}{3} \\ Z_v = -2\times\frac{2}{3} + 0\times\left(-\frac{2}{3}\right) + 4\times\frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Vậy véctơ ứng suất trên mặt nghiêng đi qua P là: $\vec{p}_v = 4\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j}$

b) Thành phần ứng suất pháp:

$$\sigma = \vec{p}_v.\vec{v} = 4\times\frac{2}{3} - \frac{10}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) + 0 = \frac{44}{9}$$

Thành phần ứng suất tiếp:

$$\tau = \sqrt{\left|\overrightarrow{p_v}\right|^2 - \sigma^2} \approx 1,79 \; ; \left|\overrightarrow{p_v}\right|^2 = 4^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{244}{9}$$

Góc giữa $\vec{p}_v$; $\vec{v}$ xác định theo công thức :

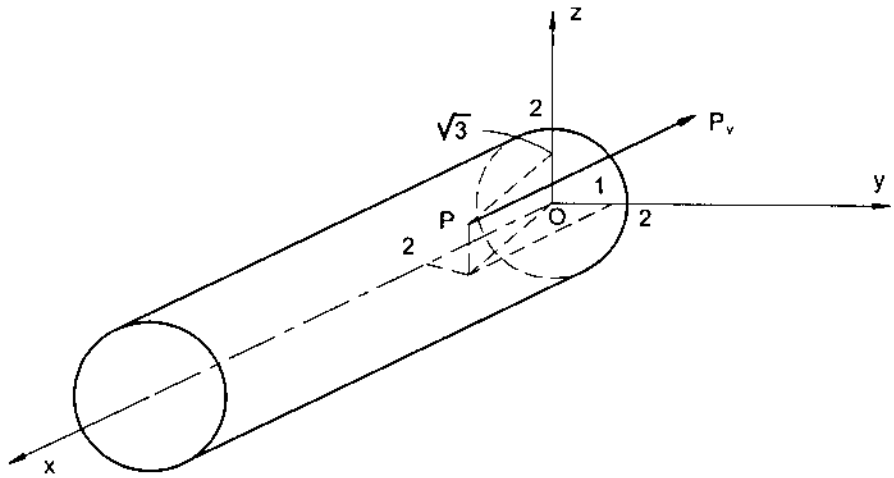
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{p_v}.\vec{v}}{\left|\overrightarrow{p_v}\right|} \approx 0,94 \text{ . Do đó } \alpha \approx 20^0.$$

Ví dụ 2: Trạng thái ứng suất tại điểm bất kỳ của vật thể đàn hồi (hình 1.3) được xác định bởi ten-xơ ứng suất:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{pmatrix}$$

a) Xác định ứng suất tại điểm $P\left(2\,,\,1\,,\,\sqrt{3}\right)$ trên mặt phẳng tiếp tuyến với mặt trụ:

$$y^2 + z^2 = 4.$$



Hình 1.3

Giải:

Thay toạ độ của P vào ta có:

$$T_\sigma^{(P)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Pháp tuyến của mặt phẳng tiếp tuyến với mặt trụ xác định bởi:

$$\overrightarrow{\text{grad}\, f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\ ;$$

với f (x, y, z) = 0 là phương trình của mặt cong bất kỳ.

Thay $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4 = 0$, ta có:

$$\left.\overrightarrow{\text{grad}\, f}\right|_{(2,1,\sqrt{3})} = 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\,\vec{k}$$

Chuẩn hoá véctơ trên, ta có véctơ pháp tuyến đơn vị:

$$\vec{\nu} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}\, f}}{\left|\overrightarrow{\text{grad}\, f}\right|} = \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

Áp dụng công thức (1.7) ta có véctơ ứng suất tại điểm P có dạng:

$$\overrightarrow{p_\nu} = \frac{5}{2}\vec{i} + 3\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k}$$

Ví dụ 3: Trạng thái ứng suất tại điểm P của vật thể đàn hồi được xác định bởi ten-xơ ứng suất:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Xác định ứng suất chính và phương chính.

b) Xác định ứng suất tiếp lớn nhất.

Giải:

a) Ứng suất chính được xác định bởi công thức (1.10'):

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0$$

$$J_1 = 3$$

$$J_2 = -\left\{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right\} = 6$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Thay vào phương trình, ta có:

$$\sigma^3 - 3\sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0 \qquad (*)$$

hay: $(\sigma - 1)(\sigma - 4)(\sigma + 2) = 0.$

Vậy các ứng suất chính là : $\sigma_1 = 4$; $\sigma_2 = 1$; $\sigma_3 = -2$.

Trạng thái ứng suất tại điểm đang xét là trạng thái ứng suất khối. Thay giá trị của σ_1 vào hệ (1.9), ta có:

$$\begin{cases} (3-4)\ell + m + n = 0 \\ \ell + (0-4)m + 2n = 0 \\ \ell + 2m + (0-4)n = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} -\ell + m + n = 0 \\ \ell - 4m + 2n = 0 \\ \ell + 2m - 4n = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Giải (**), kết hợp với điều kiện $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ ta được :

$$\vec{v}_1 = \left\{\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

Tương tự, thay $\sigma_2 = 1$ vào hệ (1.9):

$$\begin{cases} 2\ell' + m' + n' = 0 \\ \ell' - m' + 2n' = 0 \\ \ell' + 2m' - n' = 0 \end{cases}$$

với : $\ell'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$

ta thu được phương chính thứ 2 :

$$\overrightarrow{v_2} = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3} \right\}$$

Phương chính thứ 3 xác định theo tính chất trực giao:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_3} = 0 \\ \overrightarrow{v_2}.\overrightarrow{v_3} = 0 \\ \ell''^2 + m''^2 + n''^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{6}}\ell'' + \frac{1}{\sqrt{6}}m'' + \frac{1}{\sqrt{6}}n'' = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ell'' + \frac{1}{\sqrt{3}}m'' + \frac{1}{\sqrt{3}}n'' = 0 \\ \ell''^2 + m''^2 + n''^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Ta thu được phương chính thứ 3: $\overrightarrow{v_3} = \left\{ 0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

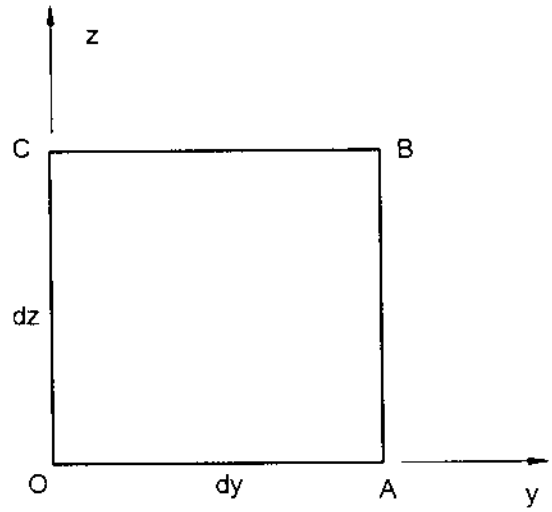
Ứng suất tiếp lớn nhất xác định bởi công thức: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 3$

Ví dụ 4: Cho trường chuyển vị :

$$\begin{cases} x' = x + Ay \\ y' = y + Az \\ z' = z + Ax \end{cases} \quad ; \; A = \text{const} \neq 0$$

a) Xác định ten-xơ biến dạng.

b) Tính độ dài của các cạnh OA, OB, OC của hình chữ nhật OABC sau khi biến dạng.



Hình 1.4

Giải:

Theo hệ thức Côsi:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(Ay)}{\partial x} = 0; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = A$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(Az)}{\partial y} = 0; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = A$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial(Ax)}{\partial z} = 0; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = A$$

Vậy : $$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}A & \frac{1}{2}A \\ \frac{1}{2}A & 0 & \frac{1}{2}A \\ \frac{1}{2}A & \frac{1}{2}A & 0 \end{pmatrix}$$

hay: $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{pmatrix}$$

Vị trí mới của các điểm O, A, B, C là:

O' (0, 0, 0) ; A' (0 + A.dy ; dy + A.0 ; 0 + A.0) = (Ady ; dy ; 0)

Ta có độ dài $\overline{O'A'} = \sqrt{(Ady)^2 + (dy)^2} = dy\sqrt{1+A^2}$

Tương tự : B (0, dy, dz) ; B'(0 + A.dy; dy + A.dz; dz + A.0) = (Ady; dy + Adz; dz).

Vậy:

$$\overline{O'B'} = \sqrt{(Ady)^2 + (dy + Adz)^2 + dz^2} = \sqrt{(1+A^2)dy^2 + (1+A^2)dz^2 + 2Adydz}$$

C (0, 0, dz) ; C'(0 + A.0; 0 + A.dz; dz + A.0) = (0; Adz; dz).

Do đó: $\overline{O'C'} = \sqrt{(Ady)^2 + dz^2} = dz.\sqrt{1+A^2}$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1. Hãy chứng minh rằng, véctơ ứng suất $\overrightarrow{p_{v_i}}$ và $\overrightarrow{p_{v_j}}$ tại điểm P trên hai mặt có pháp tuyến $\overrightarrow{v_i}$ và $\overrightarrow{v_j}$ có tính chất: hình chiếu của $\overrightarrow{p_{v_i}}$ trên phương $\overrightarrow{v_i}$ bằng hình chiếu của $\overrightarrow{p_{v_j}}$ trên phương $\overrightarrow{v_j}$.

1.2. Cho các véctơ ứng suất $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$ trên các mặt phẳng vuông góc từng đôi một. Hãy chứng minh tổng bình phương các môđun của chúng không phụ thuộc vào hệ toạ độ.

1.3. Trạng thái ứng suất tại điểm P cho bởi ten-xơ ứng suất:

a) Hãy xác định véctơ ứng suất trên mặt nghiêng song song với mặt phẳng:

$$3x + 6y + 2z = 12$$

b) Xác định các thành phần ứng suất pháp, ứng suất tiếp, và góc lập bởi véctơ đó với pháp tuyến của mặt phẳng.

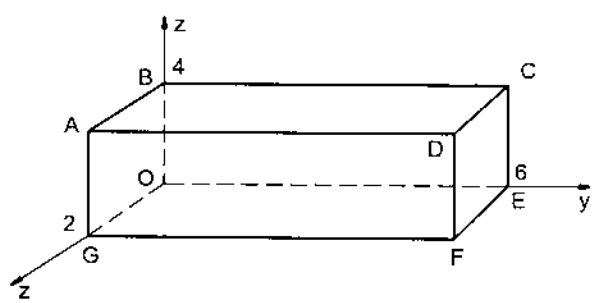
1.4. Tại điểm P cho ten-xơ ứng suất:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

Hãy xác định véctơ ứng suất trên tiết diện đi qua P và song song với các mặt phẳng:

a) BGE

b) BGFC (hình 1.5).



Hình 1.5

1.5. Trạng thái ứng suất của một vật thể đàn hồi cho bởi ten-xơ ứng suất:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix}$$; với a, b, c là hằng số, σ là ứng suất.

Hãy xác định a, b, c, sao cho trị số của ứng suất trên mặt phẳng nghiêng đều một góc với các trục tọa độ thì bằng không ?

1.6. Trạng thái ứng suất tại điểm bất kỳ cho bởi ten-xơ ứng suất :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ với } C = \text{const} \neq 0$$

a) Tính ứng suất tại điểm P (4, – 4, 7) trên mặt phẳng:

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$$

b) Cũng câu hỏi như trên nhưng trên mặt cầu:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81$$

c) Xác định ứng suất tiếp lớn nhất tại P?

1.7. Xác định ứng suất chính và phương chính của ten-xơ ứng suất:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Đó là trạng thái ứng suất nào?

1.8. Xác định ứng suất chính và phương chính của ten-xơ ứng suất

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix} \text{ với } \tau = \text{const} \neq 0$$

Đó là trạng thái ứng suất nào?

1.9. Ứng suất chính tại điểm P có các giá trị sau: $\sigma_1 = 12$; $\sigma_2 = 3$; $\sigma_3 = -6$. Hãy xác định véctơ ứng suất và thành phần ứng suất pháp của nó tại tiết diện nghiêng đều so với các phương chính đi qua điểm đó?

1.10. Cho trường chuyển vị xác định bởi véctơ:

$$\vec{u} = (x - z)^2\vec{i} + (y + z)^2\vec{j} - xy\vec{k}$$

a) Hãy xác định ten-xơ biến dạng tại P(0; 2; - 1)?

b) Xác định các biến dạng chính tại P; đó là trạng thái biến dạng nào?

1.11. Cho ten-xơ biến dạng tại một điểm:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Xác định các biến dạng chính và phương chính?

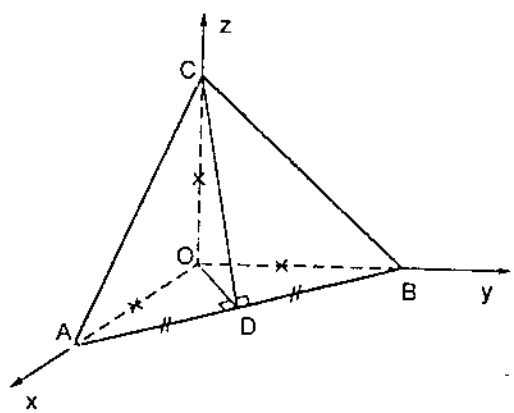
b) Đó là trạng thái biến dạng nào?

1.12. Cho trạng thái biến dạng xác định bởi ten-xơ:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$$ Cho biết OA = OB = OC = a ; AD = BD (hình 1.6)

Tìm biến dạng dài tương đối của các cạnh AC, CB?

Góc $\widehat{ADC}$ thay đổi thế nào sau khi biến dạng?



Hình 1.6

1.13. Trường di chuyển được cho bởi véctơ:

$$\vec{u} = (3x_2 - 4x_3)^2\vec{e_1} + (2x_1 - x_3)^2\vec{e_2} + (4x_2 - x_1)^2\vec{e_3}$$

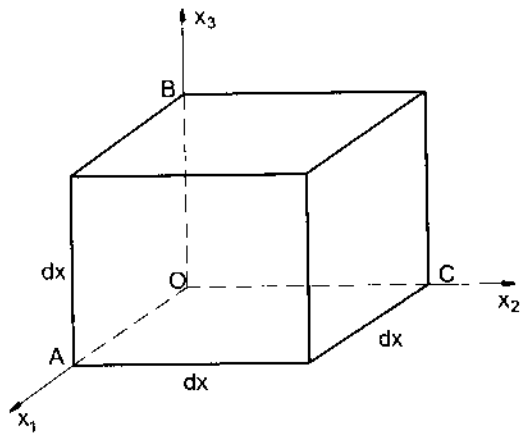
Tìm sự thay đổi độ dài của véctơ nối 2 điểm A(1, -2, 0) và B (3, 0, 4) ?

1.14. Trường di chuyển được cho bởi quy luật:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 + Ax_3 \quad \text{với } A = \text{const} \neq 0 \\ x_3' = x_3 + Ax_2 \end{cases}$$

a) Tìm các thành phần của ten-xơ biến dạng?

b) Tìm chuyển vị của các cạnh của hình lập phương (hình 1.7)



Hình 1.7

1.15. Trường di chuyển được cho bởi quy luật:

$$\vec{u} = Ax\vec{e_1} + (Az + By)\vec{e_2} + Ay\vec{e_3}$$

với A, B = const ($A \neq B \neq 0$)

a) Xác định các thành phần của ten-xơ biến dạng?

b) Tìm sự liên hệ giữa A và B để biến dạng thể tích tỷ đối bằng không?

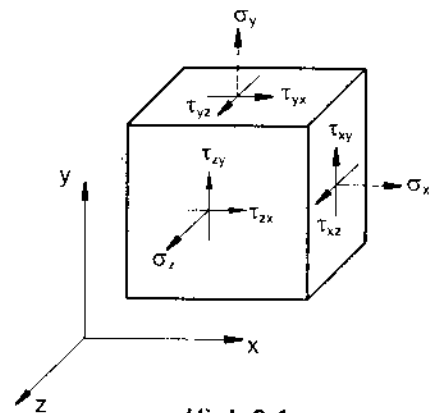
c) Với giá trị tìm được của A và B, hãy xác định trạng thái biến dạng của vật thể là trạng thái nào?

Chương 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

1 – PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÂN BẰNG TĨNH HỌC - ĐIỀU KIỆN BIÊN

Xét phân tố hình hộp kích thước (dx×dy×dz) tách ra từ vật thể đàn hồi, các mặt của phân tố song song với các mặt tọa độ (hình 2.1). Các thành phần ứng suất tác dụng lên .các mặt đối diện với mặt đang xét lần lượt là:



Hình 2.1

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\,;\ \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx\ ;\ \tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dx$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}dz\ ;\ \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\ ;\ \tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}dz$$

$$\sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy\ ;\ \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\ ;\ \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dy$$

Ta viết phương trình cân bằng tĩnh học của phân tố:

$$\sum P_x = 0\ ;\ \sum P_y = 0\ ;\ \sum P_z = 0$$

Ký hiệu $\vec{F}(\rho X, \rho Y, \rho Z)$ là lực khối tác dụng lên một đơn vị thể tích, ta thu được hệ phương trình vi phân cân bằng tĩnh học của phân tố:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho X=0\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho Y=0\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\rho Z=0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

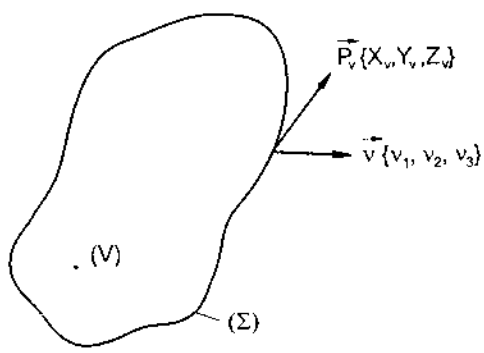
Hoặc dưới dạng viết gọn:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+F_j=0 \quad (i, j=\overline{1, 3}\text{, lấy tổng theo j}) \qquad (2.2)$$

Ký hiệu lực mặt tác dụng lên một đơn vị diện tích trên biên của vật thể là $\vec{P}_v(X_v, Y_v, Z_v)$, véctơ pháp tuyến đơn vị tại điểm bất kỳ trên biên là $\vec{\nu}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, ta có điều kiện biên:

$$\left.\begin{aligned}
X_v &= \sigma_x\nu_1+\tau_{yx}\nu_2+\tau_{zx}\nu_3\\
Y_v &= \tau_{xy}\nu_1+\sigma_y\nu_2+\tau_{zy}\nu_3\\
Z_v &= \tau_{xz}\nu_1+\tau_{yz}\nu_2+\sigma_z\nu_3
\end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

(2.3) có thể viết gọn lại là: $p_{vj}=\sigma_{ij}\nu_i$ (lấy tổng theo $i=\overline{1, 3}$)



Hình 2.2

2 – PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG THÍCH SAINT – VENANT

Chuyển vị của một điểm bất kỳ trong vật thể liên tục được xác định bởi các hàm số u(x, y, z); v(x, y, z); w(x, y, z). Nếu biết được các hàm số đó, ta có thể xác định được các thành phần biến dạng ε_{ij} nhờ hệ thức Côsi (1.19 – 1.20). Tuy nhiên, nếu biết được các thành phần biến dạng, làm thế nào có thể xác định được các giá trị đơn trị của chuyển vị? Để giải hệ gồm 6 phương trình vi phân với 3 ẩn số u, v, w, ta cần dựa trên mối liên hệ giữa các thành phần biến dạng, còn gọi là phương trình tương thích biến dạng Saint-Venant.

Đạo hàm 2 lần theo y biểu thức của ε_x và đạo hàm 2 lần theo x biểu thức của ε_y, từ (1.19) ta có:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}; \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y\partial x^2}$$

Cộng hai phương trình trên, ta được:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \qquad (2.4\ a)$$

Biểu thức sau cùng thu được theo Định lý Schwacs về đạo hàm riêng của hàm số liên tục thì không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm.

Tương tự, bằng cách đổi thứ tự của các ký hiệu, ta thu được :

$$\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} \qquad (2.4b)$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z} \qquad (2.4c)$$

Đạo hàm (1.20) lần lượt theo x, y, z ta có:

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}; \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

Cộng hai phương trình đầu rồi trừ đi phương trình cuối , vế với vế, ta thu được:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Lấy đạo hàm theo z biểu thức trên, chú ý rằng $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}$, ta nhận được:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \qquad (2.4.d)$$

Tương tự, ta có các biểu thức còn lại :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \; ; \qquad (2.4e)$$

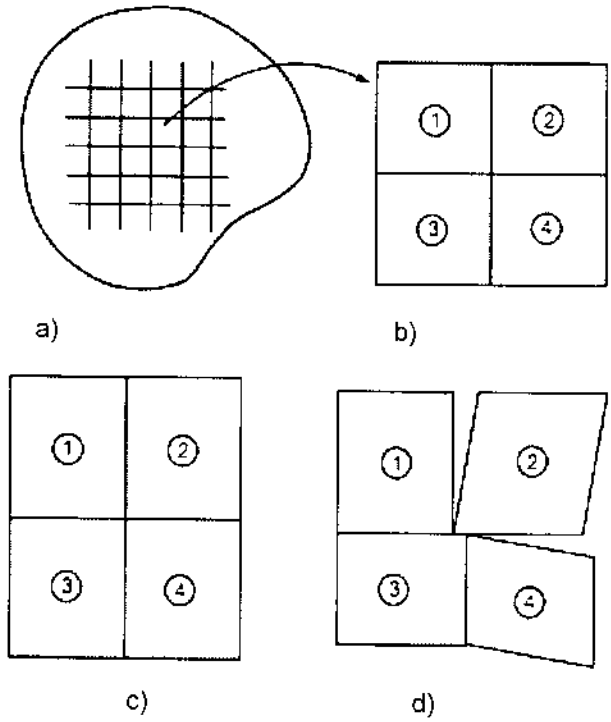
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \qquad (2.4f)$$

Kết hợp các hệ thức (2.4) ta được hệ phương trình tương thích biến dạng Saint - Venant dưới dạng rút gọn như sau:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial x_j \partial x_n} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial x_i \partial x_m} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{in}}{\partial x_j \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_n} \qquad (2.5)$$

Với i ; j ; m ; n = $\overline{1, 3}$ (lấy tổng theo quy tắc chỉ số câm của Einstain).

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \\
&2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
&2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \\
&2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5')$$



Hình 2.3

Sự tương thích của biến dạng thể hiện ở sự liên tục về chuyển vị và góc xoay của mọi điểm trong lòng vật thể đàn hồi. Trên hình 2.3a, b xét bốn phần tử kề nhau ở trạng thái trước biến dạng. Hình 2.3c thể hiện sự dịch chuyển liên tục của các phần tử sau biến dạng, hình 2.3d thể hiện sự không liên tục của chuyển vị và góc xoay, có nghĩa là xuất hiện chỗ rỗng trong lòng vật thể, trái với giải thiết là ta chỉ xét vật liệu liên tục.

3 – ĐỊNH LUẬT HÚC TỔNG QUÁT

Trong hai phần trên, ta đã xét lý thuyết về ứng suất và hệ phương trình vi phân cân bằng tĩnh học để giải bài toán về vật thể đàn hồi theo khía cạnh *tĩnh học*, đồng thời ta cũng xét lý thuyết chuyển vị -biến dạng để giải theo khía cạnh *động hình học*. Hai lý thuyết đó chưa đủ để giải quyết các bài toán về Lý thuyết đàn hồi, vì giữa ứng suất và biến dạng chưa có định luật vật lý nào ràng buộc. Trong mục này, ta sẽ đề cập đến tính chất *vật lý* của bài toán, nghĩa là đưa ra sự *tương quan giữa ứng suất và biến dạng*, thể hiện bởi *Định luật Húc tổng quát* (General Hooke's Law).

Theo Định luật Húc tổng quát, tại một điểm bất kỳ trong vật rắn biến dạng đàn hồi, ten-xơ ứng suất tỷ lệ với ten-xơ biến dạng theo quy luật sau:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}.\varepsilon_{kl} \ (i, j, k, l = \overline{1, 3}, \text{ lấy tổng theo k, l}) \qquad (2.6)$$

Trong đó, C_{ijkl} là *ten-xơ các hằng số đàn hồi* và là ten-xơ hạng bốn. Do ma trận vuông là đối xứng nên ta có 21 hằng số độc lập.

Định luật này áp dụng đối với vật rắn biến dạng đàn hồi bất đẳng hướng, hay còn gọi là vật liệu dị hướng (*anisotropic materials*)

Biểu thức trên viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{pmatrix} \qquad (2.6')$$

Ta lần lượt xét các trường hợp riêng về tính chất cơ học của vật liệu.

3.1. Vật liệu đàn hồi tuyến tính, đồng nhất và đẳng hướng

Do tính chất cơ học của vật liệu ở mọi điểm và mọi phương đều như nhau (*Isotropic materials)* ta có :

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_{12} + 2\,C_{44}\ ;\ C_{44} = C_{55} = C_{66}\ ;$$

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32}\ ;$$

$$C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0$$

$$C_{14} = C_{24} = C_{13} = C_{34} = C_{56} = 0$$

Như vậy, ten-xơ các hằng số đàn hồi chỉ *còn hai hằng số độc lập* λ và μ, gọi là *hằng số La-mê.*

Khi đó (2.6) có dạng:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \ (i, j = \overline{1, 3}) \qquad (2.7)$$

$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii}$ (lấy tổng theo $i = \overline{1, 3}$) gọi là biến dạng thể tích tỷ đối. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ là toán tử Kronecker.

Hay dưới dạng khai triển:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} \;\; ; \;\; \sigma_{12} = \mu.\gamma_{12} \\ \sigma_{22} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22} \;\; ; \;\; \sigma_{23} = \mu.\gamma_{23} \\ \sigma_{33} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} \;\; ; \;\; \sigma_{13} = \mu.\gamma_{13} \end{aligned}\right\} \qquad (2.7')$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \;\; ; \;\; \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Trong đó, E là môđun đàn hồi (Elastic modulus), G là môđun trượt (Shear modulus), ν là hệ số Poát-xông (Poisson's ratio), phụ thuộc vào vật liệu.

Từ (2.7') ta có thể rút ra liên hệ giữa biến dạng và ứng suất:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma.\delta_{ij}\right) \text{ ; với } \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad (2.8)$$

Hay dưới dạng khai triển:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2.8')$$

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{G} \\ 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \dfrac{\sigma_{23}}{G} \\ 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \dfrac{\sigma_{13}}{G} \end{cases}$$

3.2. Vật liệu trực hướng (*Orthotropic materials*)

Nếu vật thể đàn hồi có ba mặt đối xứng vuông góc với nhau từng đôi một, tại mỗi điểm tính chất cơ học của vật liệu có ba mặt đối xứng, khi đó ten-xơ các hằng số đàn hồi chỉ còn *3 hằng số độc lập*, do:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33};\ C_{44} = C_{55} = C_{66};$$

$$C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0;$$

$$C_{14} = C_{24} = C_{13} = C_{34} = C_{56} = 0;$$

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32};$$

Biểu thức tương quan giữa ứng suất và biến dạng trong trường hợp vật liệu trực hướng có dạng:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\
\sigma_{22} &= C_{11}\varepsilon_{22} + C_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \\
\sigma_{33} &= C_{11}\varepsilon_{33} + C_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\
\tau_{12} &= 2C_{44}\varepsilon_{12} \\
\tau_{23} &= 2C_{44}\varepsilon_{23} \\
\tau_{13} &= 2C_{44}\varepsilon_{13}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

4 – PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG BIỂU DIỄN QUA CHUYỂN VỊ

Biểu diễn các thành phần của ten-xơ ứng suất qua biến dạng nhờ định luật Húc tổng quát (đối với vật liệu đẳng hướng), rồi biểu diễn biến dạng qua chuyển vị nhờ hệ thức Cô-si, sau đó thay vào hệ phương trình (2.1), ta có:

$$\left.\begin{aligned}
\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \rho X = 0 \\
\mu\Delta v + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \rho Y = 0 \\
\mu\Delta w + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \rho Z = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

với $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ là toán tử Laplace.

Hay dưới dạng viết gọn :

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + F_i = 0 \quad i = \overline{1, 3} \qquad (2.10')$$

Các thành phần của lực mặt tác dụng lên biên biểu diễn qua chuyển vị

$$\left.\begin{aligned}
X_\upsilon &= \lambda\theta\ell + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ell + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ell + \frac{\partial v}{\partial x}m + \frac{\partial w}{\partial x}n\right)\\
Y_\upsilon &= \lambda\theta m + \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\ell + \frac{\partial v}{\partial y}m + \frac{\partial v}{\partial z}n\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\ell + \frac{\partial v}{\partial y}m + \frac{\partial w}{\partial y}n\right)\\
Z_\upsilon &= \lambda\theta n + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\ell + \frac{\partial w}{\partial y}m + \frac{\partial w}{\partial z}n\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\ell + \frac{\partial v}{\partial z}m + \frac{\partial w}{\partial z}n\right)
\end{aligned}\right\} \quad (2.11$$

hoặc viết gọn dưới dạng sau:

$$P_{vi} = \lambda\theta v_i + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}v_j + \mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}v_j$$

$$P_{vi} = \lambda\theta v_i + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)v_j \; (i, j = \overline{1, 3}, \text{ lấy tổng theo j}) \qquad (2.11')$$

Hệ phương trình (2.10) còn gọi là phương trình Na-vi-ê hoặc La-m (Navier& Lame'), được sử dụng trong việc giải bài toán đàn hồi với các chọn ẩn số là chuyển vị.

5 – PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG THÍCH BIỂU DIỄN QU ỨNG SUẤT, THOẢ MÃN PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰN TĨNH HỌC

Biểu diễn phương trình tương thích Saint- Venant qua ứng suất bằn cách sử dụng tương quan ứng suất -biến dạng nhờ định luật Húc, chú ý đế ba phương trình vi phân cận bằng tĩnh học, ta có:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\sigma_x &= \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho Y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial(\rho X)}{\partial x}\\
\Delta\sigma_y &= \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho Y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial(\rho Y)}{\partial y}\\
\Delta\sigma_z &= \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho Y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (2.12a)$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} &= -\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho Y)}{\partial x}\right)\\
\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial z} &= -\left(\frac{\partial(\rho Y)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho Z)}{\partial y}\right)\\
\Delta\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial z} &= -\left(\frac{\partial(\rho Z)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho X)}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (2.12b)$$

Hay dưới dạng rút gọn:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial F_j}{\partial x_j}\delta_{ij} - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}+\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right) \quad (2.12')$$

(lấy tổng theo j, $j=\overline{1,3}$)

F_i: thành phần lực khối ($i=\overline{1,3}$)

δ_{ij}: toán tử Kronecker

$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

ν: hệ số Poát-xông

Hệ phương trình (2,12, 2,12') gọi là phương trình Bentrami-Misen (Beltrami-Michell), giúp cho việc giải bài toán về vật thể đàn hồi với cách chọn ẩn số là ứng suất được thuận tiện.

Trong trường hợp không có lực khối tác dụng, hệ (2.12) có dạng (2.13)

Ký hiệu $\nabla^2 = \Delta$, trong đó $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}$ gọi là toán tử Divergence

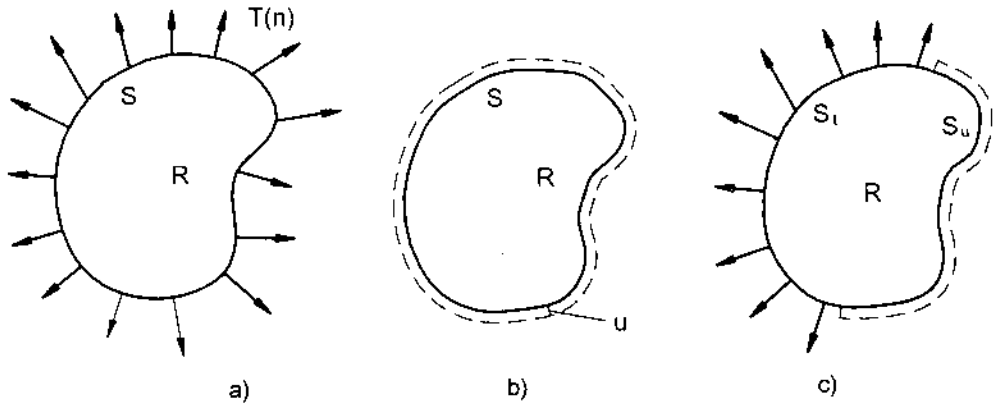
$$
\begin{aligned}
&(1+\upsilon)\Delta^2\sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0\\
&(1+\upsilon)\Delta^2\sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0\\
&(1+\upsilon)\Delta^2\sigma_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0\\
&(1+\upsilon)\Delta^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0\\
&(1+\upsilon)\Delta^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0\\
&(1+\upsilon)\Delta^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = 0
\end{aligned}
\qquad (2.13)
$$

Như vậy, bài toán về vật thể đàn hồi chịu tác dụng của ngoại lực bao gồm 15 ẩn số (3 ẩn số chuyển vị, 6 ẩn số ứng suất và 6 ẩn số biến dạng), ta có hệ 15 phương trình cùng các điều kiện biên tương ứng (3 phương trình cân bằng tĩnh học, 6 hệ thức Côsi hay 6 phương trình tương thích, 6 phương trình của định luật Húc). Để giải các phương trình đó ta áp dụng các phương pháp khác nhau tuỳ thuộc vào việc chọn đại lượng nào là ẩn số cơ bản, cũng như dạng của điều kiện biên cho trước. Ta có thể phân loại các dạng bài toán đàn hồi thành ba bài toán cơ bản :

Bài toán Dirikhler: Cho biết lực mặt tác dụng trên biên, xác định trường ứng suất, biến dạng và chuyển vị của điểm bất kỳ trong vật thể (H.2.4a)

Bài toán Neiman: Cho trường chuyển vị trên biên, xác định trường ứng suất, biến dạng và chuyển vị của điểm bất kỳ trong vật thể (hình 2.4b).

Bài toán hỗn hợp: Trên một phần biên cho biết lực mặt, phần còn lại trên biên cho biết chuyển vị (hình 2.4c), xác định trường ứng suất, biến dạng và chuyển vị của điểm bất kỳ trong vật thể.



Hình 2.4

6 – PHƯƠNG PHÁP CHUNG GIẢI BÀI TOÁN ĐÀN HỒI

6.1. Các phương pháp giải

1. Chọn ẩn số là *chuyển vị* (Bài toán Neiman) : Ta sử dụng hệ phuong trình La-mê (2.10) và biểu diễn biến dạng qua chuyển vị, các hằng số tích phân xác định từ điều kiện biên biểu diễn qua chuyển vị (2.11). Sau đó dùng hệ thức Côsi để xác định thành phần biến dạng, rồi áp dụng định luật Húc để xác định thành phần ứng suất.

2. Chọn ẩn số *là ứng suất* (bài toán Dirikhler) : Ta sử dụng hệ phuong trình Bentrami-Misen (2.120 với các điều kiện biên biểu diễn qua ứng suất (2.3), sau đó sử dụng định luật Húc để tìm biến dạng, rồi dùnhg hệ thức Cô-si để tìm chuyển vị.

3. Bài toán *hỗn hợp* : kết hợp hai phương pháp trên, sau đó đặt điều kiện liên tục về chuyển vị, ứng suất tại miền giao nhau của (S_t) và (S_u).

Để giải các hệ phương trình trên, ta có thể sử dụng nhiều phương pháp khác nhau :

Phương pháp *trực tiếp* (Direct method): Tích phân trực tiếp hệ phương trình theo ứng suất hoặc chuyển vị, áp dụng các điều kiện biên tương ứng. Phương pháp này gặp rất nhiều khó khăn về mặt toán học và chỉ áp dụng cho một số bài toán đơn giản.

Phương pháp *ngược* (Inverse method): Cho biết trường ứng suất hoặc chuyển vị thoả mãn hệ phương trình của bài toán. Xác định các đặc trưng

hình học, điều kiện biên và tải trọng tác dụng lên vật thể. Phương pháp này cũng khó áp dụng đối với các bài toán thực tế.

Phương pháp *nửa ngược* (Semi-Inverse method) : Cho biết một phần trường chuyển vị, hoặc một phần trường ứng suất, xác định các thành phần còn lại nhờ tích phân hệ phương trình tương ứng và điều kiện biên.

Có thể sử dụng các thuật toán khác nhau để giải các bài toán trên: phương pháp giải tích (hay chính xác); phương pháp gần đúng; phương pháp số.

– Phương pháp *giải tích* : có thể áp dụng chuỗi luỹ thừa của tọa độ điểm bất kỳ, khai triển hàm số thành chuỗi Fourier, dùng biến đổi tích phân, hoặc dùng hàm biến phức

– Phương pháp *gần đúng*: Dùng phương pháp biến phân (phương pháp năng lượng, hay Ritz's method)

– Phương pháp *số* : Phương pháp sai phân hữu hạn (FDM), Phần tử hữu hạn (FEM), hoặc phương pháp phần tử biên (BEM).

Ví dụ 1 : Phương pháp giải trực tiếp : Xét thanh chịu kéo bởi trọng lượng bản thân (hình 2.5), cho biết khối lượng riêng là ρ, môđun đàn hồi của vật liệu là E. Xác định trường ứng suất, biến dạng và chuyển vị của điểm bất kỳ trong lòng vật thể.

Ta có các thành phần lực khối : $F_x = F_y = 0$, $F_z = -\rho g$

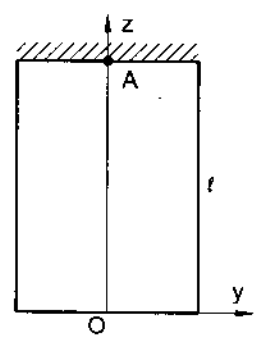
Do thanh chỉ chịu lực theo phương z nên :

$$\sigma_x = \sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Thay các giá trị trên vào phương trình cân bằng tĩnh học, ta có :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho g$$

do đó $\sigma_z(z) = \rho g z$



Hình 2.5

Thay các trị số của ứng suất vào công thức của định luật Húc, ta được :

$$\varepsilon_z = \frac{\rho g z}{E}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu \rho g z}{E}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$$

Sử dụng hệ thức Côsi, ta tìm được các thành phần chuyển vị (chú ý điều kiện biên tại x = 0 và x = l).

$$u = -\frac{\nu\rho gxz}{E}\ ;\ v = -\frac{\nu\rho gyz}{E}\ ;\quad w = \frac{\rho g}{2E}[z^2 + \nu(x^2 + y^2) - \ell^2]$$

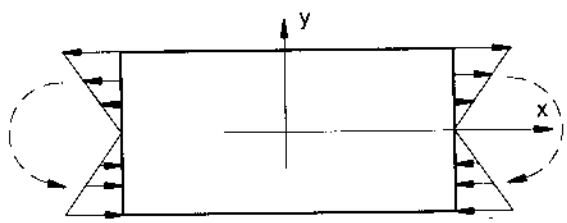
Ví dụ 2 : Phương pháp ngược

Cho trường ứng suất trong vật thể đàn hồi không chịu tác dụng của lực khối có dạng:

$$\sigma_x = Ay\ (A = \text{const})\ ;\ \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\,.$$

Xác định trạng thái chịu lực và điều kiện biên của bài toán ?

Ta thấy trường ứng suất trên thoả mãn hệ phương trình cân bằng tĩnh học, các biến dạng thu được từ định luật Húc cũng thoả mãn hệ phương trình tương thích, do đó đây là lời giải của bài toán đàn hồi. Xét thanh hình chữ nhật như hình vẽ (hình 2.6), ta thấy $\sigma_x = 0$ tại các điểm nằm trên trục x, còn trên mặt ngoài của thanh không chịu lực, rõ ràng đây là thanh chịu uốn thuần tuý bởi cặp mômen ở hai đầu thanh.Trường ứng suất cho trước phù hợp với công thức trong sức bền vật liệu của thanh chịu uốn thuần tuý.



Hình 2.6

Ví dụ 3 : Phương pháp nửa ngược

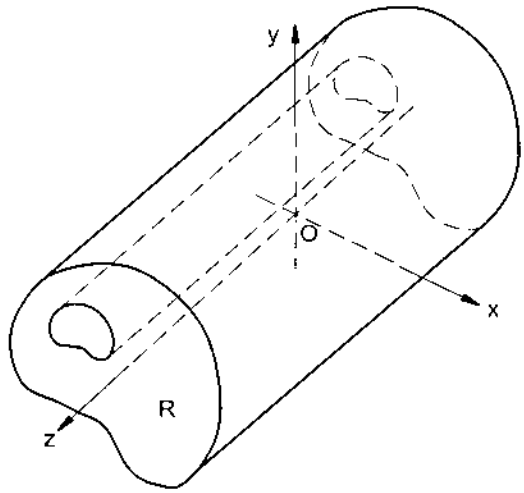
Xét thanh chịu xoắn thuần tuý có trường chuyển vị cho trước như sau :

$u = -\alpha yz$; $v = \alpha xz$; $w = w(x, y)$; trong đó α là const, w là hàm số chưa biết, biểu diễn chuyển vị theo phương z của thanh (còn gọi là độ vênh).

Thay các chuyển vị trên vào hệ thức Côsi rồi áp dụng định luật Húc, ta có trường ứng suất có dạng sau :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right);\ \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right)$$



Hình 2.7

Thay các ứng suất trên vào phương trình cân bằng tĩnh học, với giả thiết lực khối bằng không, ta thu được phương trình Laplace đối với w(x,y):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

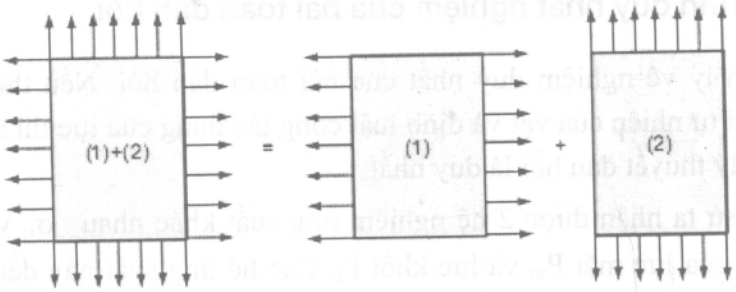
Nghiệm của phương trình này rất đơn giản, chỉ cần bổ sung thêm điều kiện biên ở hai đầu thanh là ta có thể thu được toàn bộ trường chuyển vị, từ đó tính được trường biến dạng nhờ hệ thức Côsi.

6.2. Nguyên lý cộng tác dụng và nguyên lý Saint-Venant

a) Nguyên lý cộng tác dụng

« Nếu một vật chịu tác dụng đồng thời của nhiều yếu tố ngoại lực, thì nội lực, ứng suất và chuyển vị của nó bằng tổng của nội lực, ứng suất, chuyển vị do từng yếu tố gây nên riêng rẽ đối với vật đó »

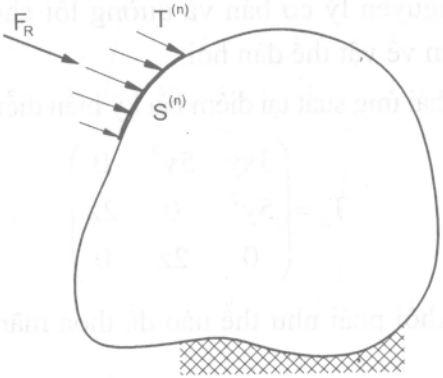
Trên hình 2.7 là ví dụ đơn giản về nguyên lý cộng tác dụng cho bài toán phẳng. Trong các phần sau, ta sẽ ứng dụng nguyên lý trên vào các bài toán phức tạp hơn.



Hình 2.8

b) Nguyên lý Saint-Venant

« *Tại những điểm của vật rắn cách xa điểm đặt lực, trạng thái ứng suất, biến dạng của vật phụ thuộc rất ít vào cách tác dụng của lực* ». Nói một cách khác, ta có thể thay hệ lực ban đầu bằng bất kỳ một hệ lực nào cân bằng với nó. Trên hình vẽ 2.9 biểu diễn một vật chịu tác dụng của hệ lực $T^{(n)}$ trên miền S^n của biên, ta có thể thay thế hệ lực đó bằng véctơ hợp lực F_R. Khi đó tại các điểm cách xa miền đặt lực, trạng thái ứng suất và biến dạng có thể coi giống như vật chịu hệ lực ban đầu. Nguyên lý Saint-Venant giúp cho việc thay điều kiện biên đơn giản hơn mà vẫn không làm thay đổi kết quả về trạng thái ứng suất và biến dạng, khiến cho việc giải các bài toán đàn hồi trở nên đơn giản hơn rất nhiều.



Hình 2.9

6.3. Tính duy nhất nghiệm của bài toán đàn hồi

Định lý về nghiệm duy nhất của bài toán đàn hồi. Nếu thừa nhận về trạng thái tự nhiên của vật và định luật công tác dụng của lực thì nghiệm của bài toán lý thuyết đàn hồi là duy nhất.

Giả sử ta nhận được 2 hệ nghiệm ứng suất khác nhau : σ_{ij} và σ'_{ij} dưới tác dụng của lực mặt P_{vi} và lực khối F_i. Các hệ ứng suất này đều phải thoả mãn hệ phương trình vi phân cân bằng (2.2) và điều kiện biên (2.3):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0 \ ; \quad \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0$$

$$p_{vj} = \sigma_{ij} v_i \quad ; \ p_{vj} = \sigma'_{ij} v_i \ ;$$

Trừ các phương trình cho nhau, ta nhận được hệ phuơng trình với các điều kiện biên mới :

$$\frac{\partial(\sigma_{ij} - \sigma'_{ij})}{\partial x_i} = 0; \quad (\sigma_{ij} - \sigma'_{ij})v_i = 0$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có thể xem ứng suất trong hệ phương trình cuối thu được là hệ ứng suất khi không có lực thể tích và lực mặt. Nhưng theo giả thiết về trạng thái tự nhiên của vật liệu, các ứng suất này phải bằng không, tức là $\sigma_{ij} - \sigma'_{ij} = 0$; có nghĩa hai hệ ứng suất này phải trùng nhau. Đó là điều cần phải chứng minh.

Dựa trên các nguyên lý cơ bản và đường lối chung trên, ta có thể giải một loạt các bài toán về vật thể đàn hồi.

Ví dụ 4: Trạng thái ứng suất tại điểm bất kỳ biểu diễn bằng ten-xơ ứng suất :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{pmatrix}$$

Hỏi dạng lực khối phải như thế nào để thoả mãn phương trình vi phân cân bằng tĩnh học ?

Giải : Thay các giá trị của ứng suất vào phương trình cân bằng, ta có :

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=3y\ ;\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\ ;\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=10y\ ;\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0\ ;\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}=0\ ;\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=2\ ;\ \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0$$

$$\begin{cases}3y+10y+0+\rho X=0\\0+0+2+\rho Y=0\\0+0+0+\rho Z=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\rho X=-13y\\\rho Y=-2\\\rho Z=0\end{cases}$$

Ví dụ 5: Trạng thái ứng suất tại điểm bất kỳ biểu diễn bằng ten-xơ ứng suất :

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}0 & Cx_3 & 0\\Cx_3 & 0 & -Cx_1\\0 & -Cx_1 & 0\end{pmatrix}\quad;\qquad C=\text{const}\neq 0$$

Hãy chỉ ra rằng nếu lực khối bằng không thì phương trình cân bằng thoả mãn.

Tính các thành phần của ten-xơ biến dạng. Trạng thái ứng suất và biến dạng tại điểm P (4 ; - 4 ; 7) là trạng thái nào?

Giải :

a) Thay các thành phần ứng suất vào phương trình

$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}=0$; $(F_j=0)$. Vậy phương trình cân bằng tĩnh học thoả mãn.

b) Áp dụng định luật Húc tổng quát, ta có :

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{E}\left[0-\nu(0+0)\right]=0\ ;\quad \varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=0$$

$$2\varepsilon_{12}=\gamma_{12}=\frac{Cx_3}{G}\ ;\ 2\varepsilon_{13}=\gamma_{13}=0\ ;2\varepsilon_{23}=\gamma_{23}=\frac{-Cx_1}{G}\ ;$$

Vậy ten-xơ biến dạng được viết dưới dạng :

$$T_\varepsilon=\frac{1}{2G}\begin{pmatrix}0 & Cx_3 & 0\\Cx_3 & 0 & -Cx_1\\0 & -Cx_1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2G}T_\sigma$$

Thay tọa độ của điểm P (4 ; - 4 ; 7) vào ten-xơ ứng suất, ta có :

$$T_\sigma^{(P)} = \begin{pmatrix} 0 & 7C & 0 \\ 7C & 0 & -4C \\ 0 & -4C & 0 \end{pmatrix};$$

Phương trình xác định ứng suất chính có dạng:

$$\sigma_3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0 \qquad (*)$$

$$I_1 = 0; I_2 = -\left\{ \begin{vmatrix} 0 & 7C \\ 7C & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4C \\ -4C & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} = 65\,C^2$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 7C & 0 \\ 7C & 0 & -4C \\ 0 & -4C & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nghiệm của (*) là:

$$\sigma_1 = |C|\sqrt{65}\ ;\ \sigma_2 = 0\ ;\ \sigma_3 = -|C|\sqrt{65}$$

Ta thấy có một ứng suất chính bằng không, vậy trạng thái ứng suất tại P là phẳng. Các biến dạng chính được tính theo định luật Húc :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \gamma(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = \frac{1}{E}|C|\sqrt{65}(1+\nu) \neq 0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \gamma(\sigma_1 + \sigma_3)\right] = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \gamma(\sigma_1 + \sigma_2)\right] = -\frac{1}{E}|C|\sqrt{65}(1+\nu) \neq 0$$

Vậy trạng thái biến dạng cũng là phẳng

Ví dụ 6: Cho trường chuyển vị theo quy luật :

$$\begin{cases} u = 3xy^2 \\ v = 2xz \\ w = z^2 - xy \end{cases}$$

a) Xác định các thành phần biến dạng và kiểm tra điều kiện tương thích.

b) Xác định các thành phần ứng suất

Giải **:**

a) Áp dụng hệ thức Côsi, ta có ten-xơ biến dạng :

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3y^2 & 3xy+z & -\frac{y}{2} \\ 3xy+z & 0 & \frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} & 2z & 2z \end{pmatrix}$$

Thay các thành phần biến dạng vào phương trình tương thích Saint-Venant (2.5), ta thấy hoàn toàn thoả mãn.

b) Áp dụng định luật Húc, ta có các thành phần ứng suất :

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = \lambda\left(3y^2 + 2z\right) + 6\mu y^2$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y = \lambda\left(3y^2 + 2z\right)$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = \lambda\left(3y^2 + 2z\right) + 4\mu z$$

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy}.\mu = \mu(6xy + 2z);$$

$$\tau_{yz} = \gamma_{yz}.\mu = \mu.x;$$

$$\tau_{xz} = \gamma_{xz}.\mu = -\mu.y;$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Hãy xét xem các thành phần biến dạng sau có thỏa mãn phương trình tương thích biến dạng không?

a) $\varepsilon_x = k(x^2 + y^2)$; $\varepsilon_y = ky^2$; $\gamma_{xy} = 2kxy$; $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$

b) $\varepsilon_x = kz(x^2 + y^2)$; $\varepsilon_y = ky^2.z$; $\gamma_{xy} = 2kxyz$;

$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$; với k là hằng số $\neq 0$

2.2. Xác định mối quan hệ giữa các hằng số sao cho các thành phần biến dạng sau thoả mãn phương trình tương thích :

$$\varepsilon_x = A_0 + A_1(x^2 + y^2) + x^4 + y^4;\ \gamma_{xy} = C_0 + C_1 xy(x^2 + y^2 + C_2)$$

$$\varepsilon_y = B_0 + B_1(x^2 + y^2) + x^4 + y^4; \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

2.3. Cho các thành phần biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right); \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

Trong đó φ là hàm số của x, y. Hãy tìm điều kiện đối với φ. Các hằng số E, μ có ảnh hưởng đến φ không?

2.4. Trường ứng suất của một điểm bất kỳ trong vật thể đàn hồi xác định bởi ten-xơ:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & \left(1-x_2^2\right) & 0 \\ \left(1-x_2^2\right)x_1 & \dfrac{\left(x_2^3-3x_2\right)}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}$$

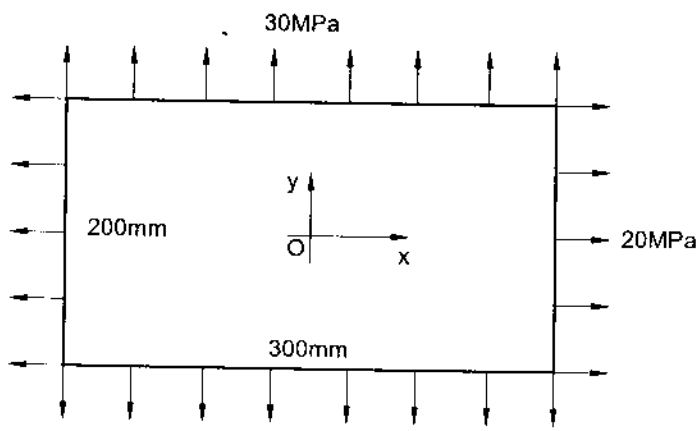
Hãy xác định:

a) Sự phân bố lực khối, nếu phương trình cân bằng tĩnh học thỏa mãn.

b) Ứng suất chính tại điểm P(a, 0, $2\sqrt{a}$) với a = const > 0. Trạng thái ứng suất và biến dạng tại điểm P là trạng thái nào?

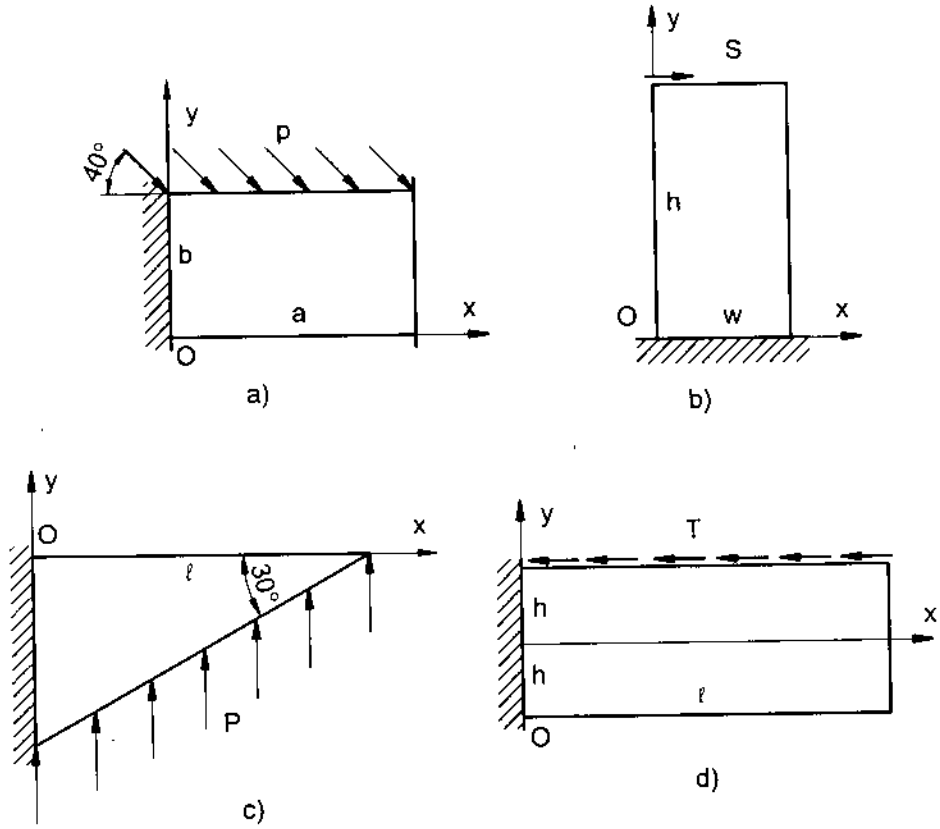
c) Ứng suất tiếp cực đại?

2.5. Tấm mỏng hình chữ nhật có bề dày 4mm chịu tác dụng của các ứng suất theo hai phương vuông góc như hình vẽ. Xác định sự thay đổi kích thước của tấm ? Cho biết $E = 2.10^4$ kN/cm^2, ν = 0,3.



Hình 2.10

2.6. Biểu diễn điều kiện biên cho các vật thể chịu lực như hình 2.11.



Hình 2.10

2.7. Hãy chỉ ra rằng trường ứng suất sau thỏa mãn phương trình cân bằng tĩnh học, với lực khối bằng không, nhưng không là nghiệm của bài toán đàn hồi:

$$\sigma_x = c[y^2 + \nu(x^2 - y^2)]$$

$$\sigma_y = c[x^2 + \nu(y^2 - x^2)]$$

$$\sigma_z = c\nu(x^2 + y^2)$$

$$\tau_{xy} = -2c\nu xy$$

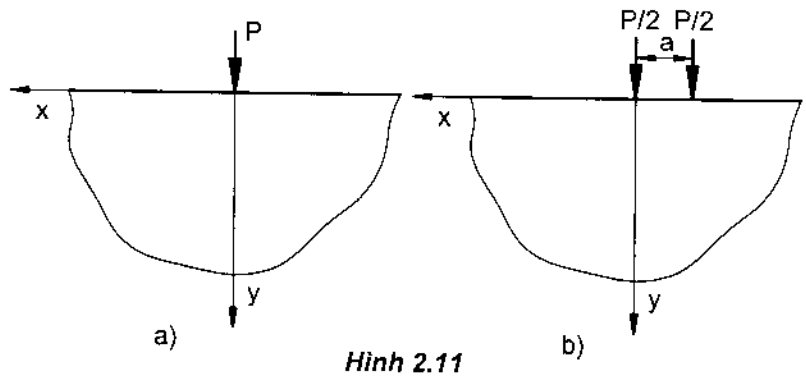
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,\ c = \text{const} \neq 0$$

2.8. Xét vật rắn nửa vô hạn chịu tác dụng của lực vuông góc với mặt phẳng biên (hình 2.10a). Trường ứng suất của vật thể cho bởi :

$$\sigma_x = -\frac{2Px^2y}{\pi(x^2+y^2)^2}$$

$$\sigma_y = -\frac{2Py^3}{\pi(x^2+y^2)^2}$$

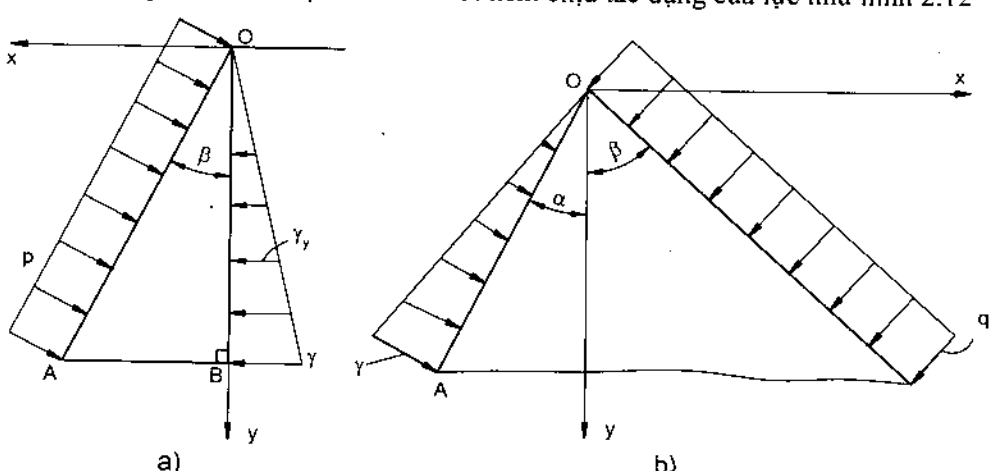
$$\tau_{xy} = -\frac{2Pxy^2}{\pi(x^2+y^2)^2}$$



Hình 2.11

Sử dụng phương pháp cộng tác dụng, hãy giải bài toán với 2 lực tác dụng vuông góc lên mặt phẳng biên với khoảng cách bằng a (hình 2.11 b). Do hai trường hợp có hợp lực trên mặt phẳng biên là bằng nhau nên các điểm ở xa miền đặt lực có ứng suất gần như nhau, hãy vẽ đồ thị ứng suất σ_y và τ_{xy} tại bề mặt có y = 10a và y = 100a?

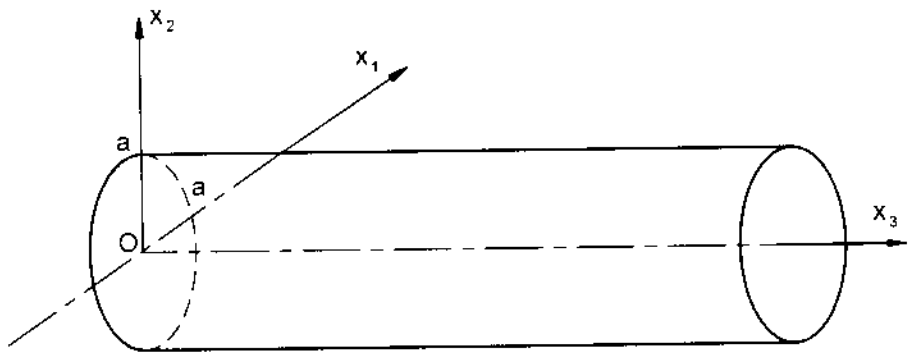
2.9. Hãy viết điều kiện biên đối với nêm chịu tác dụng của lực như hình 2.12



Hình 2.12

2.10. Chứng minh rằng ma trận sau có thể sử dụng làm trường ứng suất của vật rắn đàn hồi (coi lực khối bằng không).

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Cx_2 \\ 0 & 0 & Cx_1 \\ -Cx_2 & Cx_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{với } C = \text{const} > 0$$



Hình 2.13

Giả sử vật rắn là hình trụ tròn, hãy xác định các lực tác dụng lên bề mặt phù hợp với trường ứng suất nói trên (hình 2.13)

Nếu vật rắn là hình elip $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ thì các lực bề mặt tác dụng như thế nào?

Chương 3

BÀI TOÁN PHẲNG TRONG HỆ TỌA ĐỘ ĐỀ-CÁC

1 – BÀI TOÁN ỨNG SUẤT PHẲNG – BÀI TOÁN BIẾN DẠNG PHẲNG

1.1. Bài toán ứng suất phẳng

Xét một tấm mỏng, bề dày không đổi, chịu tác dụng của lực phân bố đều trên biên và song song với mặt phẳng (hình 3.1). Ten-xơ ứng suất có dạng sau:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Do đó đây gọi là bài toán ứng suất phẳng

Áp dụng định luật Húc, ta có ten-xơ biến dạng sau:

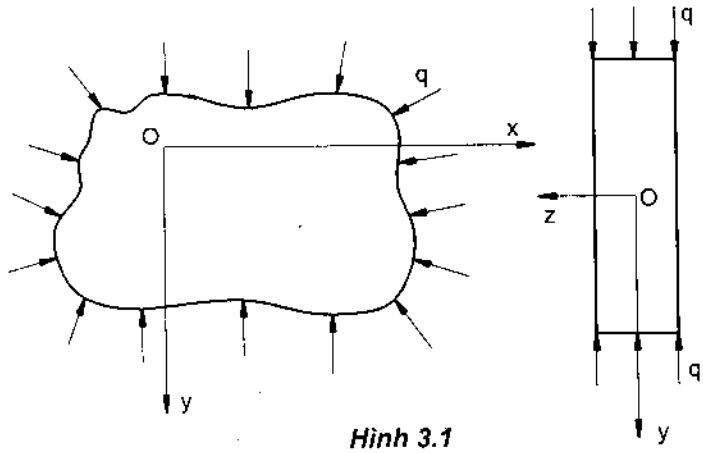
$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Hệ phương trình vi phân cân bằng có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \rho X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Phương trình tương thích Saint-Venant chỉ còn biểu thức đầu:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{3.4}$$



Hình 3.1

Định luật Húc tổng quát viết dưới dạng :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Phương trình Bentrami-Michell có dạng :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -\left(1+\nu\right)\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y}\right) \tag{3.6}$$

Phương trình vi phân cân bằng biểu diễn qua chuyển vị :

$$\left.\begin{aligned} G\Delta u + G\frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \rho X = 0 \\ G\Delta v + G\frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} + \rho Y = 0 \end{aligned}\right\} \text{ với } \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (3.7)$$

1.2. Bài toán biến dạng phẳng

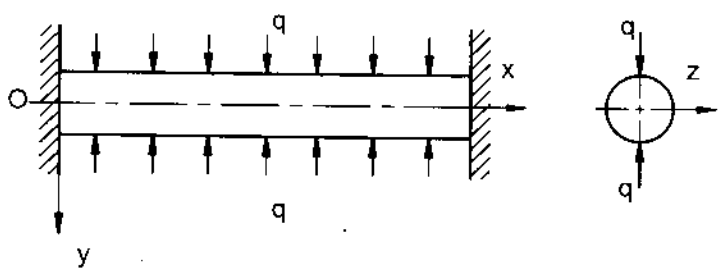
Xét thanh hình lăng trụ, hai đầu ngàm chặt, và chịu tải trọng phân bố vuông góc với trục thanh (hình 3.3).

Ten-xơ ứng suất có dạng:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

Ten-xơ biến dạng:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$



Hình 3.2

Phương trình cân bằng tĩnh học (3.3) giữ nguyên.

Phương trình tương thích Saint – Venant (3.4) giữ nguyên.

Định luật Húc tổng quát (3.5) trở thành :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\left(\sigma_x - \nu_1\sigma_y\right)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E_1}\left(\sigma_y - \nu_1\sigma_x\right)\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xy}\\
\varepsilon_z &= 0\ ;\ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.5')$$

Trong đó :

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\ ;\ \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \qquad (3.10)$$

Ta có thể tìm sự liên hệ của các hằng số vật liệu từ trạng thái biến dạng phẳng sang trạng thái ứng suất phẳng:

$$E = \frac{E_1(1+2\nu_1)}{(1+\nu_1)}\ ;\ \nu = \frac{\nu_1}{1+\nu_1} \qquad (3.10')$$

Phương trình Bentrami- Michell (3.6) sau khi thay ν bằng ν_1 trở thành :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y}\right) \qquad (3.6')$$

Phương trình cân bằng biểu diễn qua chuyển vị (3.7):

$$\left.\begin{aligned}
G\Delta u + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \rho X = 0\\
G\Delta v + (\lambda + G)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \rho Y = 0
\end{aligned}\right\} \text{ với } \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y \qquad (3.7')$$

Như vậy, ta thấy mặc dù hai bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng là khác nhau về phương diện vật lý, nhưng về mặt toán học là tương tự, vì các phương trình chỉ khác nhau bởi hằng số. Nhờ đó việc giải hai loại bài toán này có thể áp dụng chung một phương pháp toán học, đó là sử dụng *hàm ứng suất* mà ta sẽ đề cập đến trong phần sau.

1.3. Bài toán biến dạng không phẳng

Ngoài hai loại bài toán trên, trong thực tế có những vật thể khi chịu tác dụng của ngoại lực thì *chỉ có một thành phần chuyển vị khác không* :

$$u = v = 0 \; ; \; w = w(x,y) \qquad (3.11)$$

Thành phần chuyển vị theo phương z còn gọi là " độ vênh" (warping) của mặt cắt ngang, thường gặp trong bài toán xoắn tự do thanh mặt cắt bất kỳ. Bài toán loại này còn được mang tên là *biến dạng không phẳng* (*antiplane strain*).

Từ (3.11), ta có trường biến dạng sau:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \; ; \; \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial x}, \; \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (3.12)$$

Áp dụng định luật Húc ta có:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \; ; \; \tau_{xz} = G\gamma_{xz}; \; \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad (3.13)$$

Để thỏa mãn phương trình vi phân cân bằng tĩnh học ta phải có điều kiện sau:

$$\rho X = \rho Y = 0; \; \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho Z = 0 \qquad (3.14)$$

Biểu diễn ứng suất qua thành phần chuyển vị duy nhất w, ta có:

$$G\nabla^2 w + \rho Z = 0 \qquad (3.15)$$

Trong đó $\nabla^2 = \Delta$ là toán tử Laplace. Ta thấy trong trường hợp lực khối bằng không, phương trình (3.13) trở thành phương trình Laplace đối với w :

$$\Delta w = 0 \qquad (3.16)$$

2 – HÀM ỨNG SUẤT AIRY – ÁP DỤNG ĐỐI VỚI CÁC BÀI TOÁN PHẲNG

Bài toán ứng suất phẳng và bài toán biến dạng phẳng giống nhau về mặt toán học và được gọi chung là bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi. Các thành phần của ten-xơ ứng suất xác định thông qua hàm ứng suất Airy $\varphi = \varphi(x,y)$:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \;;\; \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \;;\; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \rho X.y - \rho Y.x \qquad (3.17)$$

Phương trình (3.6), (3.6') sẽ trở thành :

biến dạng phẳng :

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = -\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial^2(\rho X)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\rho Y)}{\partial y^2}\right) \qquad (3.18)$$

ứng suất phẳng:

$$\Delta\Delta\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = -(1-\nu)\left(\frac{\partial^2(\rho X)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\rho Y)}{\partial y^2}\right) \qquad (3.18')$$

Điều kiện biên đối với hàm φ như sau :

$$\left.\begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \\ Y_v &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

Với : $\frac{dy}{ds} = \cos\alpha$; $\frac{dx}{ds} = -\sin\alpha$, (α là góc tạo bởi pháp tuyến trên biên với trục x).

Trong trường hợp lực khối bằng không, ta có (3.18) trở thành phương trình điều hòa kép:

$$\Delta\Delta\varphi = 0 \qquad (3.20)$$

Để tìm nghiệm của (3.20), ta có thể sử dụng chuỗi hàm lũy thừa của x, và y:

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}x^m y^n \qquad (3.21)$$

Trong đó A_{mn} là hằng số cần xác định. Ta nhận thấy, các số hạng của chuỗi với $m+n \le 1$ không tham gia vào biểu thức của thành phần ứng suất, do đó không có mặt trong chuỗi. Các số hạng với lũy thừa bậc 2 của x và y sẽ gây nên ứng suất là hằng, và với lũy thừa bậc 3 sẽ cho trường ứng suất phân bố tuyến tính, tương tự như vậy với các lũy thừa bậc cao hơn.

Với $m + n \le 3$, các số hạng của chuỗi sẽ tự động thỏa mãn phương trình điều hòa kép với mọi giá trị của A_{mn}. Khi $m + n > 3$, các số hạng của chuỗi

vừa phải thỏa mãn phương trình (3.20), vừa thỏa mãn điều kiện biên để xác định các hệ số A_{mn}.

Thế (3.21) vào (3.20) ta thu được :

$$\sum_{m=4}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} m(m-1)(m-2)(m-3)A_{mn}x^{m-4}y^{n} +$$

$$+2\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} m(m-1)n(n-1)A_{mn}x^{m-2}y^{n-2} +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)A_{mn}x^{m}y^{n-4} = 0 \qquad (3.22)$$

Tập hợp các lũy thừa cùng bậc của x và y, ta có phương trình sau:

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}[(m+2)(m+1)m(m-1)A_{m+2,n-2} + 2m(m-1)n(n-1)A_{mn} +$$

$$+(n+2)(n+1)n(n-1)A_{m-2,n+2}]x^{m-2}y^{n-2} = 0 \qquad (3.23)$$

Biểu thức trên phải thỏa mãn với mọi x, y nên ta có:

$$(m+2)(m+1)m(m-1)A_{m+2,n-2} + 2m(m-1)n(n-1)A_{mn} +$$

$$+(n+2)(n+1)n(n-1)A_{m-2,n+2} = 0 \qquad (3.24)$$

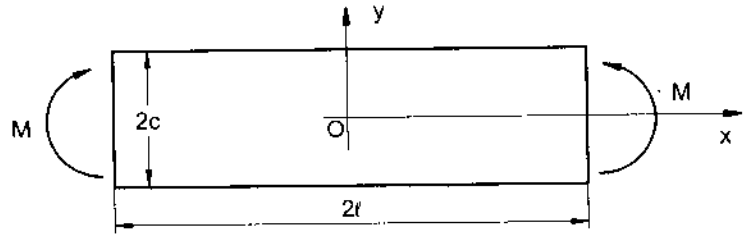
Với mỗi cặp m, n phương trình trên phải thỏa mãn sao cho chuỗi đa thức là nghiệm của (3.20).

Ta có thể áp dụng nguyên lý Saint-Venant để thay điều kiện trên biên bất kỳ bằng hệ lực cân bằng dạng đa thức, từ đó có thể xác định các hằng số chưa biết để thu được trường ứng suất, biến dạng và chuyển vị của vật thể dưới tác dụng của ngoại lực cho trước.

Dưới đây là một số ví dụ áp dụng hàm ứng suất Airy để giải một số bài toán về thanh và tấm mỏng.

Ví dụ 1: Xác định trường ứng suất trong thanh mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp (hình 3.4), chịu uốn bởi mômen ngẫu lực M = k.c ở hai đầu thanh (k là hằng số).

Việc chọn hàm ứng suất dựa trên cơ sở là dạng luỹ thừa bậc 3 của đa thức theo x và y sẽ cho ứng suất phân bố tuyến tính, hơn nữa điều kiện tại 2 đầu thanh x = ± thu gọn thành mômen tập trung.Từ đó ta chọn $\varphi = Ay^3$ với $A = const \neq 0$.



Hình 3.4

Hình 3.4

Dễ dàng thấy hàm φ thỏa mãn phương trình ΔΔφ = 0. Ta tính các thành phần ứng suất, bỏ qua ảnh hưởng của lực khối:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 6Ay \; ; \; \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \; ;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = 0 \; ;$$

Bây giờ ta tiến hành kiểm tra điều kiện biên:

$$y = \pm c; \; \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \; ;$$

$$M_z = \int_F \sigma_x . ydF = \int_{-c}^{c} \sigma_x . ydy = M$$

Thay giá trị của σ_x vào biểu thức dưới dấu tích phân:

$$6A\int_{-c}^{c} y^2\,dy = 2Ay^3\Big|_{-c}^{c} = 4Ac^3 = kc$$

Rút ra: $A = \frac{k}{4c^2}$. Vậy trường ứng suất trong thanh có dạng:

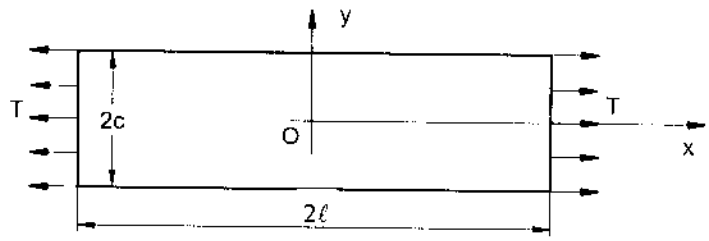
$$\sigma_x = \frac{3ky}{2c^2} \; ; \; \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

Công thức này hoàn toàn trùng với công thức trong Sức bền vật liệu của thanh chịu uốn thuần tuý:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} . y \; ; \left(J_z = \frac{2c^3}{3} \right)$$

Ví dụ 2:

Xác định trường ứng suất, biến dạng và chuyển vị của thanh chịu kéo dọc trục bởi lực phân bố đều T (hình 3.5).



Hình 3.5

Đây cũng là bài toán ứng suất phẳng và có thể mở rộng cho trường hợp chịu kéo bởi lực phân bố không đều (dựa theo nguyên lý Saint-Venant bằng cách thay tại $x = \pm \ell$ hệ lực cân bằng phân bố đều và xét ứng suất biến dạng của các điểm cách xa hai đầu thanh.

Giải: Điều kiện biên :

$$\sigma_x(\pm\ell, y) = T \;;\; \sigma_y(x, \pm c) = 0;$$

$$\tau_{xy}(\pm\ell, y) = \tau_{xy}(x, \pm c) = 0$$

Do ứng suất trên biên là hằng số nên ta chọn hàm ứng suất Airy dưới dạng lũy thừa bậc hai:

$\varphi = A\,y^2$; các thành phần ứng suất xác định như sau(bỏ qua ảnh hưởng của lực khối):

$$\sigma_x = 2A \;;\; \sigma_y = \tau_{xy} = 0;$$

Từ điều kiện biên thứ nhất rút ra: A = T/2, các điều kiện biên khác tự thỏa mãn.

Vậy trường ứng suất trong thanh chịu kéo xác định như sau:

$$\sigma_x = T \;;\; \sigma_y = \tau_{xy} = 0;$$

Các thành phần biến dạng và chuyển vị được xác định từ công thức:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{T}{E};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = -\nu\frac{T}{E}$$

Suy ra:

$$u = \frac{T}{E}x + f(y);$$

$$v = -\nu\frac{T}{E}y + g(x)$$

Thay vào công thức biến dạng góc bằng không (do $\tau_{xy} = 0$) , ta có:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = f'(y) + g'(x) = 0$$

Hay: $f'(y) = -g'(x) = const$

Từ đó ta có:

$$f(y) = -\omega_0 y + u_0;$$

$$g(x) = \omega_0 x + v_0$$

Trong đó u_0, v_0, là chuyển vị , và ω_0 là góc xoay của vật rắn tuyệt đối. Giả thiết rằng thanh không có chuyển dịch và góc xoay quanh trọng tâm , ta có f = g = 0.

Vậy trường chuyển vị của thanh chịu kéo là:

$$u = \frac{T}{E}x$$

$$v = -\nu\frac{T}{E}y$$

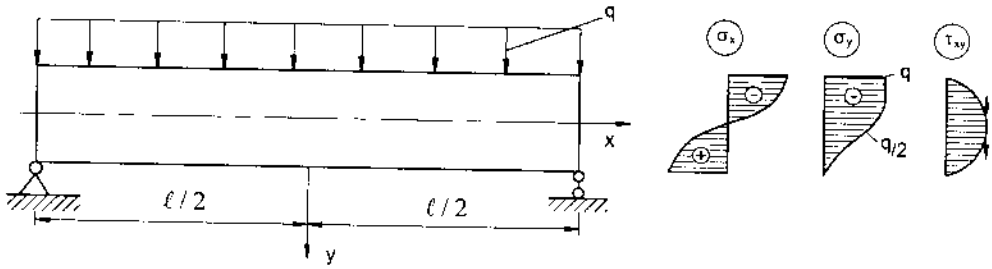
Ví dụ 3: Xác định trường ứng suất của dầm đặt trên hai gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều (hình 3.6).

Hàm ứng suất Airy được chọn dưới dạng:

$$\phi(x,y) = \frac{d}{6}y^3\left(x^2 - \frac{y^2}{5}\right) + \frac{b}{2}x^2y + \frac{k}{6}y^3 + \frac{a}{2}x^2$$

Với a, b, d, k là các hằng số chưa biết.

Giải : Ta có : $\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0$ vì bậc cao nhất của x là 2.



Hình 3.6

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}&=-4dy\\ 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}&=-4dy\end{aligned}\right\}\text{ Vậy hàm } \varphi \text{ thỏa mãn phương trình } \Delta\Delta\varphi = 0$$

$$\text{Ta có: }\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=d\left(x^2-\dfrac{2}{3}y^2\right)y+k.y\\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\left(\dfrac{d}{3}y^2+b\right)y+a\\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=-\left(dy^2+b\right)x\end{cases}$$

Ta xét các điều kiện biên của bài toán:

Tại $y=-\dfrac{h}{2}$: $\qquad \sigma_y=-q$ (b)

$\tau_{xy}=0$ (c)

Tại $y=\dfrac{h}{2}$: $\qquad \sigma_y=0\ ;\ \tau_{xy}=0$ (d)

Tại $x=\pm\dfrac{\ell}{2}$: $\qquad N_x=\displaystyle\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x.dy=0$ (e)

$$M_z=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x.ydy=0 \qquad (f)$$

$$Q_y=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}.dy=\mp\frac{ql}{2} \qquad (g)$$

Từ (b) ÷ (d) ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{dh^3}{24} - \dfrac{bh}{2} + a = -q \\ \dfrac{dh^2}{4} + b = 0 \\ \dfrac{dh^3}{24} + \dfrac{bh}{2} + a = 0 \end{cases} \qquad \text{suy ra :} \quad \begin{cases} a = -\dfrac{q}{2}\ ; \\ b = \dfrac{3q}{2h}\ ; \\ d = -\dfrac{6q}{h^3}\ ; \end{cases}$$

Điều kiện biên (e) và (g) tự thỏa mãn sau khi thay các giá trị a, b, d vào. Từ (f) ta rút ra:

$$k = \frac{q}{2J_z}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{10}\right)$$

Trong đó $J_z = \dfrac{h^3}{12}$: mômen quán tính của mặt cắt ngang.

Thay các giá trị của a, b, d, k vào (a) ta có:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{q}{2J_z}\left(\dfrac{2}{3}y^2 - x^2\right)y + ky = \dfrac{q}{2J_z}\left(\dfrac{l^2}{4} - x^2 + \dfrac{2}{3}y^2 - \dfrac{h^2}{10}\right)y\ ; \\ \sigma_y = -\dfrac{q}{2J_z}\left(\dfrac{1}{3}y^3 - \dfrac{1}{4}h^2y + J_z\right); \\ \tau_{xy} = -\dfrac{q}{2J_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)x. \end{cases}$$

Biểu đồ phân bố ứng suất theo hình 3.6b.

Theo công thức trong chương uốn của Sức bền vật liệu :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z}.y = \frac{q}{2J_z}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right)y\ ;$$

Ta thấy trong công thức của sức bền vật liệu, ứng suất σ_x phân bố theo quy luật bậc nhất theo chiều cao mặt cắt ngang, còn theo lý thuyết đàn hồi, ứng suất σ_x phân bố theo quy luật bậc 3 (hình 3.7a)

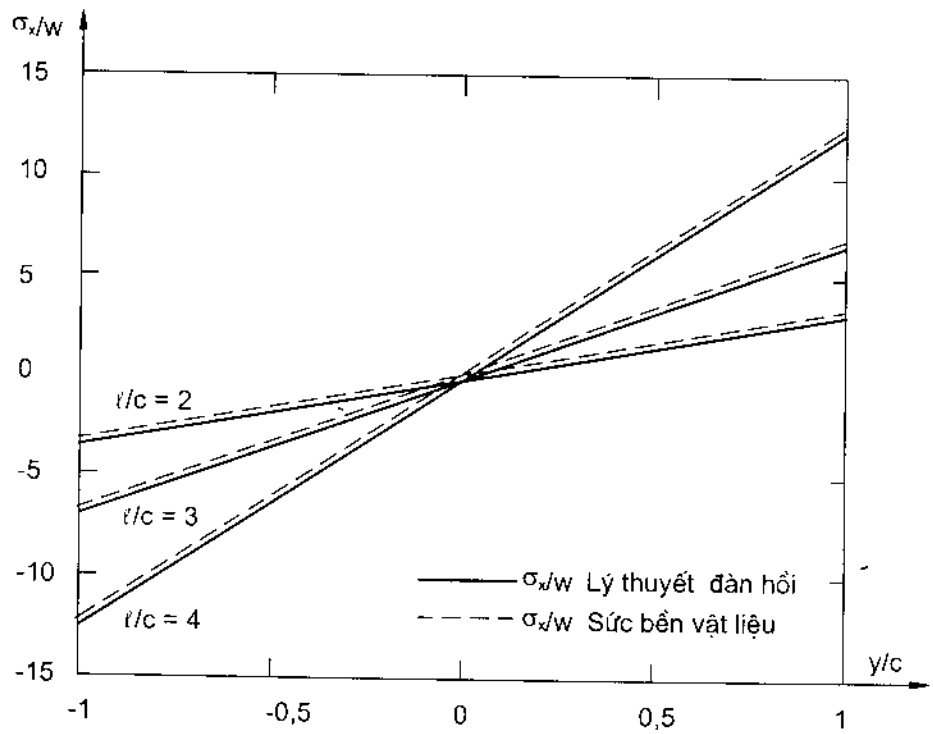
Tương tự, sự khác nhau còn thể hiện ở $\sigma_y = 0$ theo sức bền vật liệu, còn theo đàn hồi thì nó là hàm số bậc 3 theo y (hình 3.7b). Đối với ứng suất tiếp, theo công thức của sức bền vật liệu:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y . S_z^c}{J_z . \ell^c} \; ; \; Q_y = -qx \; ; \; S_z^c = \frac{1}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2) \; ; \; \ell^c = 1$$

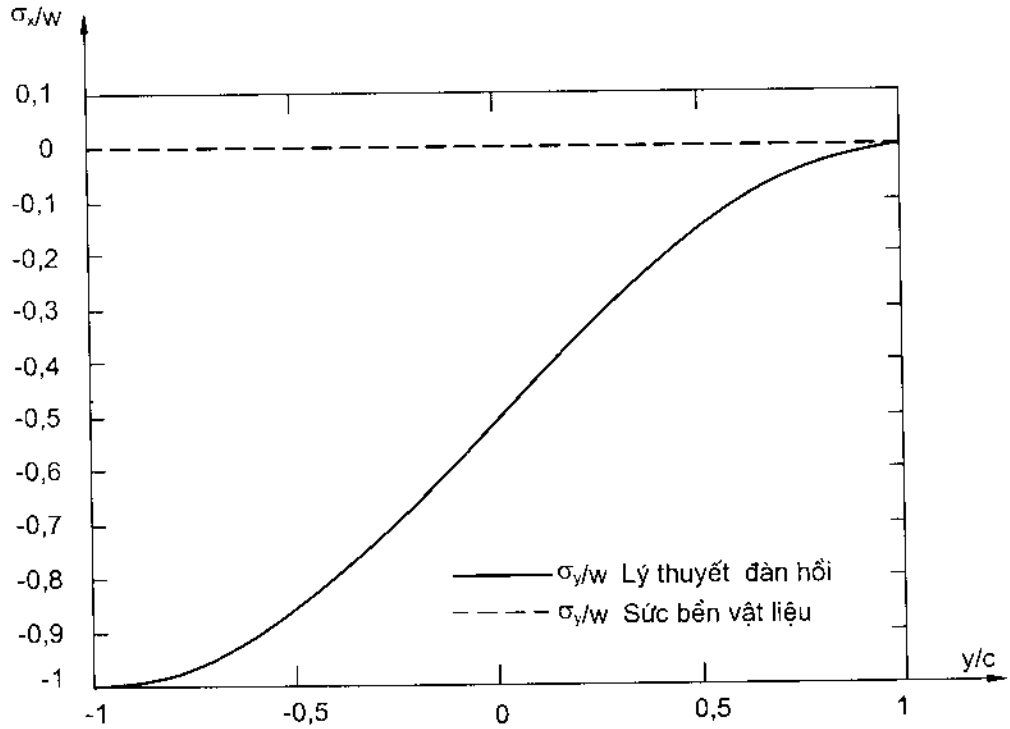
Vậy: $\tau_{xy} = -\frac{q}{2J_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)x$ (ta thấy giống công thức (h) theo Lý thuyết đàn hồi).

Từ giá trị của ứng suất, ta có thể xác định được các thành phần biến dạng, rồi áp dụng hệ thức Côsi để tính chuyển vị u, v, w. Các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên :

Tại (± ℓ, 0) : v = 0 do có liên kết khớp ở 2 đầu thanh; tại (0, y) : u = 0 do tính đối xứng qua trục y.



Hình 3.7a



Hình 3.7b

Ví dụ 3: Chứng minh rằng, hàm φ dưới đây là hàm ứng suất Airy; xác định trường ứng suất và trạng thái chịu lực của thanh mặt cắt ngang chữ nhật hẹp (δ = 1).

$$\phi = \frac{3F}{4c}\left(xy - \frac{xy^3}{3c^2}\right) + \frac{P}{4c}y^2 \; ; \qquad 0 \le x \le \ell, \; -c \le y \le c$$

Các hệ số P, F, c là hằng số cho trước.

<u>Giải</u>:

Đây là bài toán ngược, ta cần tìm điều kiện liên kết, trạng thái chịu lực của dầm khi biết được hàm ứng suất. Dễ dàng nhận thấy φ thỏa mãn ΔΔφ = 0. Vậy φ (x,y) là hàm ứng suất Airy.Ta đi tính các thành phần ứng suất :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{3F}{2c^3}xy + \frac{P}{2c}\ ; \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -\frac{3F}{4c^3}\left(c^2 - y^2\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Sử dụng liên hệ giữa nội lực và ứng suất, ta có: $N_x = \int_{-c}^{c}\sigma_x dy = P > 0$

Vậy thanh chịu kéo bởi lực P theo phương x.

$$Q_y = \int_{-c}^{c}\tau_{xy}dy = \int_{-c}^{c} -\frac{3F}{4c^3}\left(c^2 - y^2\right)dy = -\frac{3F}{4c^3}\left(c^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-c}^{c} = -F < 0$$

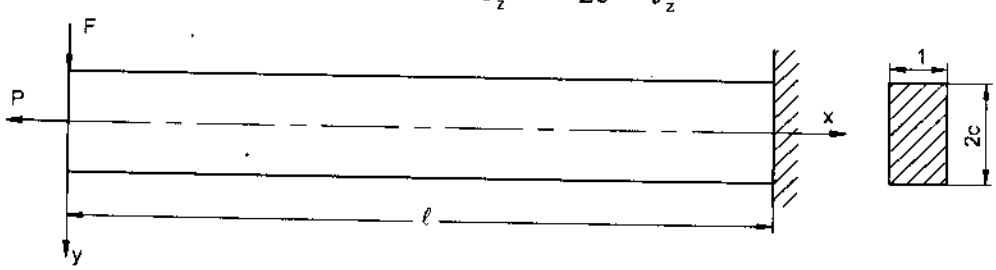
Ta có thanh chịu lực F vuông góc với trục thanh, chiều lực hướng từ trên xuống.

$$M_z = \int_{-c}^{c}\sigma_x y dy = \int_{-c}^{c}\left(-\frac{3F}{2c^3}xy^2 + \frac{Py}{2c}\right)dy = -Fx < 0$$

Từ công thức trên ta có tại x = 0, $M_z = 0$, và tại x = ℓ ; $M_z = -F\ell \neq 0$. Do đó thanh chịu liên kết ngàm tại x = ℓ, đầu tự do tại x = 0. Vậy trạng thái ứng suất trên tương ứng với dầm công xôn chịu tác dụng của lực dọc P và lực cắt F như hình 3.8

Công thức (*) hoàn toàn phù hợp với công thức trong chương uốn của sức bền vật liệu của thanh chịu kéo đồng thời với uốn:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F^*} + \frac{M_z}{J_z}.y = \frac{P}{2c} - \frac{F.x}{J_z}.y$$



Hình 3.8

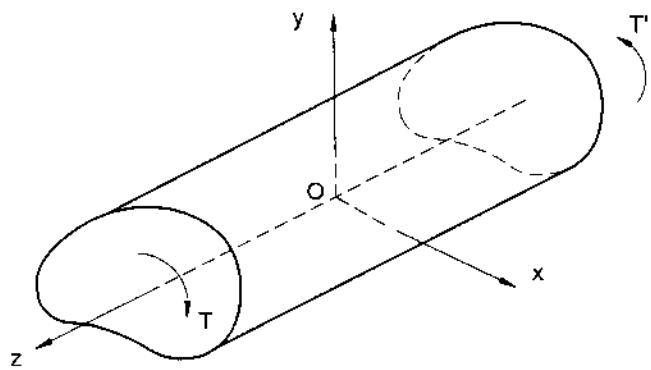
Với $J_z = \frac{2}{3}c^3$: mômen quán tính mặt cắt ngang.

$F^* = 2c$: diện tích mặt cắt ngang

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y . S_z^c}{J_z . \ell^c} = \frac{-F.\frac{1}{2}\left(c^2 - y^2\right)}{J_z.} = -\frac{3F}{4c^3}\left(c^2 - y^2\right)$$

3 – HÀM ỨNG SUẤT PRANDTL - ÁP DỤNG ĐỐI VỚI BÀI TOÁN BIẾN DẠNG KHÔNG PHẲNG

3.1. Hàm ứng suất Prandtl (1903)



Hình 3.9

Xét thanh thẳng, mặt cắt ngang không đổi theo chiều dài, hai đầu tự do chịu ngẫu lực xoắn T (hình 3.9). Do mặt ngoài của thanh không chịu lực nên ta có:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \; ; \; \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

Vì vậy các thành phần của ten-xơ ứng suất và biến dạng có dạng:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{pmatrix}; \; T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.25)$$

Phương trình cân bằng tĩnh học, bỏ qua thành phần lực khối, có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 & (*) \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 & (**) \end{cases} \tag{3.26}$$

Phương trình trên sẽ thoả mãn, nếu đặt các ứng suất tiếp thông qua hàm ứng suất Prandtl Φ (x,y):

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \ ; \ \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{3.27}$$

Để tìm hàm $\Phi(x,y)$, trước tiên ta xác định các thành phần chuyển vị trên mặt cắt ngang của thanh. Từ hình 3.10 ta có:

$$\begin{cases} u = -\theta . y \\ v = \theta . x \end{cases} \tag{3.28}$$

Trong đó: u, v là chuyển vị của điểm P, θ là góc xoắn.

Thay vào hệ thức Côsi, ta có:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{d\theta}{dz} . y \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{d\theta}{dz} . x \end{cases}$$

Áp dụng định luật Húc giữa ứng suất tiếp và biến dạng góc tương đối, ta rút ra:

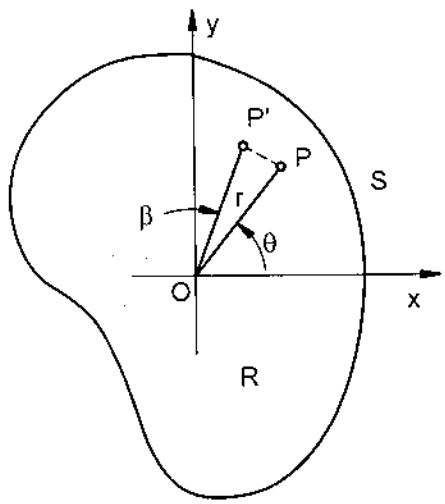
$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\tau_{zx}}{G} + \dfrac{d\theta}{dz} . y \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\tau_{zy}}{G} - \dfrac{d\theta}{dz} . x \end{cases} \tag{3.29}$$

Lấy đạo hàm của biểu thức thứ nhất trong (3.29) theo y, biểu thức thứ 2 theo x rồi trừ hai kết quả cho nhau, chú ý đến (3.27) ta được:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G \frac{d\theta}{dz} = \text{const} \ \forall x, y \tag{3.30}$$

với $\frac{d\theta}{dz}$ là góc xoắn tỷ đối trên một đơn vị dài của thanh.Ta xét đến điều kiện biên :

$$\begin{cases} X_n = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z = 0 \\ Y_n = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z = 0 \\ Z_n = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$



Hình 3.10

Hai biểu thức đầu tự thoả mãn do $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{yx} = n_z = 0$; từ biểu thức thứ ba thay các cô-sin chỉ phương của pháp tuyến đơn vị bằng:

$$n_x = \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dn}; n_y = -\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn} \quad (3.32)$$

Thay giá trị của ứng suất tiếp theo (3.27) và chú ý đến (3.32), ta có điều kiện biên trở thành:

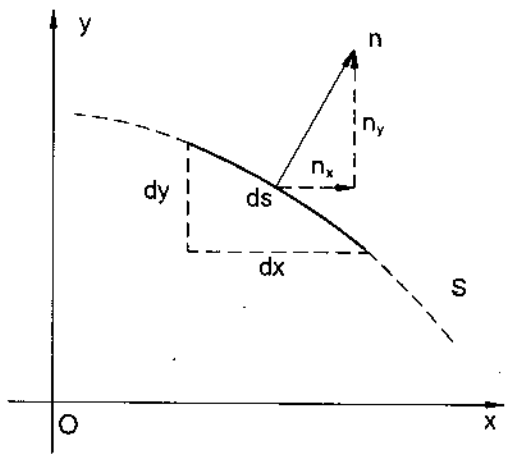
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{d\Phi}{ds}\Big|_S = 0 \quad (3.33)$$

hay : $\Phi|_S$ = const , ta có thể chọn hằng số tuỳ ý đó bằng không:

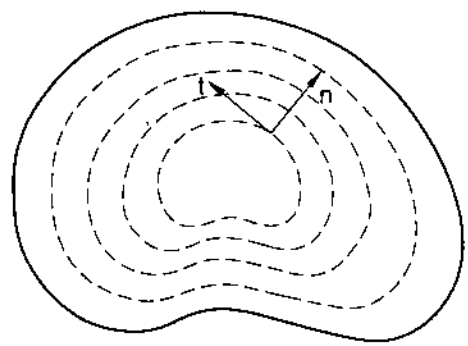
$$\Phi|_S = 0 \quad (3.34)$$

Mặt khác, ứng suất tiếp toàn phần có thể phân tích thành ứng suất theo phương pháp tuyến và phương tiếp tuyến với quỹ đạo chuyển dịch của điểm P (hình 3.11).

$$\begin{cases} \tau_{zn} = \tau_{zx}n_x + \tau_{zy}n_y = \dfrac{d\Phi}{ds} = 0 \\ \tau_{zs} = \tau_{zy}n_x - \tau_{zx}n_y = -\dfrac{d\Phi}{dn} \end{cases} \qquad (3.35)$$



Hình 3.11



Hình 3.12

Như vậy, *ứng suất tiếp toàn phần có phương trùng với tiếp tuyến của quĩ đạo chuyển vị* của điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang. Trên hình 3.12 biểu diễn đường đẳng trị của ứng suất tiếp.

Ta tìm sự liên hệ giữa mômen xoắn T và hàm Φ, từ phương trình liên hệ giữa nội lực và ứng suất, thay (3.27) vào giá trị của ứng suất tiếp, ta có:

$$T = \iint_D (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)dxdy \qquad (3.36)$$

Hay : $T = -\iint_D (x\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + y\dfrac{\partial\Phi}{\partial y})dxdy$

Ta biến đổi từng số hạng :

$$\iint_D x\frac{\partial\Phi}{\partial x}dxdy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x\Phi)dxdy - \iint_D \Phi dxdy$$

$$\iint_D y\frac{\partial\Phi}{\partial y}dxdy = \iint_D \frac{\partial}{\partial y}(y\Phi)dxdy - \iint_D \Phi dxdy$$

Sử dụng công thức Green đối với các số hạng đầu, ta có:

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}(x\Phi)dxdy = \oint_S x\,\Phi\, n_x\, ds$$

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial y}(y\Phi)dxdy = \oint_S y\,\Phi\, n_y\, ds$$

Do hàm $\Phi = 0$ trên biên S nên cuối cùng ta nhận được :

$$T = 2\iint_D \Phi\, dxdy \qquad (3.37)$$

Mặt khác: $\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ}$; $\Delta\Phi = -2G\frac{d\theta}{dz}$ thay T từ (3.37) vào, ta có:

$$J = -\frac{4}{\Delta\Phi}\iint_D \Phi dxdy \qquad (3.38)$$

J gọi là hằng số xoắn của mặt cắt ngang (Torsional constant).

3.2. Giải theo chuyển vị. Hàm vênh

Chuyển vị theo phương z khác không do hai đầu thanh tự do, ta đặt

$$w = \frac{d\theta}{dz}\psi(x, y) = \alpha\psi(x, y) \qquad (3.39)$$

Trong đó, $\psi(x, y)$ gọi là hàm vênh. Từ (3.29), chú ý đến (3.27) ta có:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ hay: } \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \text{ (từ 3.39)} \qquad (3.40)$$

Như vậy, hàm vênh phải thoả mãn phương trình Laplace. Thay vào điều kiện biên (3.35) ta có:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\alpha\right)n_x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\alpha\right)n_y = 0$$

Thay các cô sin chỉ phương của pháp tuyến đơn vị từ (3.32) vào (3.41), ta thu được :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn}\right) = \alpha\left(x\frac{\partial x}{\partial s} + y\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

Hay: $\dfrac{dw}{dn} = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{d}{ds}(x^2 + y^2)$ (3.41)

Từ đó, ta rút ra điều kiện biên đối với hàm ψ (chú ý đến (3.32)):

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right) n_x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right) n_y = 0 \qquad (3.43)$$

Liên hệ giữa ứng suất tiếp và hàm vênh thu được nhờ (3.29):

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\frac{d\theta}{dz}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right) \\ \tau_{zy} &= G\frac{d\theta}{dz}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned} \qquad (3.44)$$

Tương tự như trên, liên hệ giữa mômen xoắn và hàm vênh có dạng:

$$T = \iint_D (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y)\,dxdy\,;$$

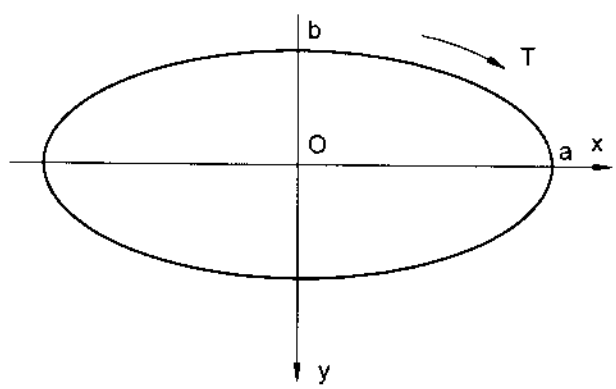
$$\text{hay}: T = G\frac{d\theta}{dz}\iint_D \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)x - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)y\right]dxdy \qquad (3.45)$$

Từ đó, hằng số xoắn có dạng:

$$J = \iint_D \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)x - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)y\right]dxdy \qquad (3.46)$$

Ví dụ 4: Xác định trường ứng suất, góc xoắn tỷ đối và độ vênh của thanh mặt cắt ngang hình elip chịu xoắn bởi mômen ngẫu lực T (hình 3.13)

Giải :



Hình 3.13

Phương trình đường elip:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ta chọn hàm ứng suất có dạng:

$$\Phi = C\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \text{ với } C = \text{const.}$$

Ta dễ dàng nhận thấy, Φ thoả mãn điều kiện bằng không trên biên, và có :

$$\Delta\Phi = 2C\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = -2G\frac{d\theta}{dz}$$

Từ đó : $C = -G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)}$

Vậy : $\Phi = -G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$

Thay giá trị của Φ vào (3.37) ta có :

$$T = -2G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}\left\{\frac{1}{a^2}\iint_D x^2dxdy + \frac{1}{b^2}\iint_D y^2dxdy - \iint_D dxdy\right\}$$

Thay $J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$; $J_x = \frac{\pi ab^3}{4}$; $F = \pi ab$ ta có :

$$T = G\frac{d\theta}{dz}\frac{\pi a^3b^3}{(a^2 + b^2)}; \quad \frac{d\theta}{dz} = \frac{T(a^2 + b^2)}{\pi Ga^3b^3} \quad ; \quad J = \frac{\pi a^3b^3}{(a^2 + b^2)}$$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{2T.y}{\pi ab^3} \Rightarrow \left|\tau_{zx}^{max}\right|_{y=\pm b} = \frac{2T}{\pi ab^2} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{2T.x}{\pi a^3b} \Rightarrow \left|\tau_{zy}^{max}\right|_{x=\pm a} = \frac{2T}{\pi a^2b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau_{zS} = \frac{2Tx}{\pi a^3b}\cos\alpha + \frac{2Ty}{\pi ab^3}\sin\alpha$$

Ứng suất tiếp toàn phần đạt giá trị lớn nhất tại hai đầu mút của bán trục nhỏ ($\alpha=\pi/2$;$|y| = b/2$).

Với mặt cắt ngang hình tròn a = b: $\left|\tau_{zy}^{max}\right| = \left|\tau_{zy}^{max}\right| = \dfrac{2T}{\pi a^3}$

Ta đi tính chuyển vị theo phương của trục thanh:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d\theta}{dz}y + \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{T(a^2+b^2)}{G\pi a^3b^3}y - \frac{2T.y}{\pi Gab^3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{d\theta}{dz}x + \frac{\tau_{zy}}{G} = -\frac{T(a^2+b^2)x}{G\pi a^3b^3} + \frac{2T.x}{\pi Ga^3b}$$

hay : $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{T(b^2-a^2)y}{\pi Ga^3b^3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{T(b^2-a^2)x}{\pi Ga^3b^3}$$

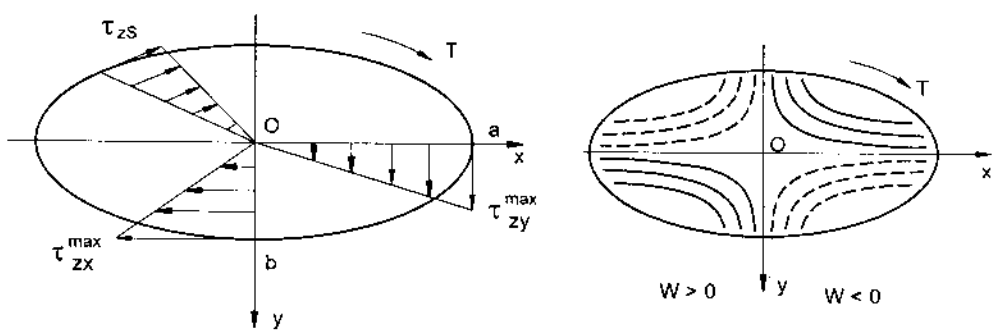
Tích phân các biểu thức trên, ta nhận được:

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{T(b^2-a^2)xy}{\pi Ga^3b^3} + f_1(y) \\ w &= \frac{T(b^2-a^2)xy}{\pi Ga^3b^3} + f_2(x) \end{aligned}\right\}$$

Vì tại mỗi điểm của mặt cắt có cùng độ vênh như nhau, nên $f_1(y) = f_2(x) \equiv 0$

Vậy : $w(x, y) = \dfrac{T(b^2-a^2)xy}{\pi Ga^3b^3}$

Trên hình 3.14 biểu diễn sự phân bố của ứng suất tiếp và độ vênh trên mặt cắt ngang hình elip.



Hình 3.14

Ví dụ 5: Mặt cắt ngang hình elip rỗng (hình 3.15)

Hàm ứng suất có thể chọn dưới dạng:

$$\varphi(x, y) = G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

Đối với biên trong của elip, chọn hàm ứng suất :

$$\varphi_0(x, y) = G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}(k^2-1).$$

Ta dễ dàng kiểm tra thấy hàm ứng suất $\varphi_0(x,y)$ thỏa mãn điều kiện biên. Giá trị mômen xoắn ngẫu lực cho phép được chọn bằng cách lấy giá trị của mômen trong trường hợp mặt cắt đặc trừ đi mômen tác dụng lên elip trong:

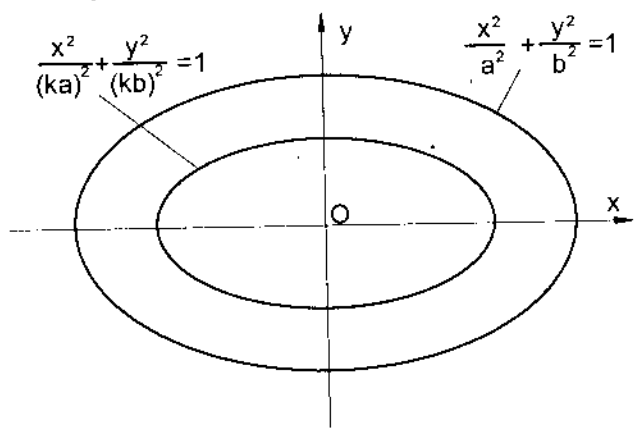
$$T = G\frac{d\theta}{dz}\left[\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}-\frac{\pi(ka)^3(kb)^3}{(ka)^2+(kb)^2}\right]$$

$$= G\frac{d\theta}{dz}\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}(1-k^4)$$

Ứng suất lớn nhất đạt được tại hai đầu mút bán trục nhỏ (a>b) và có trị số là:

$$\tau_{max} = \frac{2T}{\pi ab^2}\frac{1}{1-k^4}$$

Phương pháp giải trên có thể áp dụng đối với các mặt cắt ngang rỗng khác, khi đường chu tuyến trong trùng với dạng của chu tuyến ngoài.



Hình 3.15

3.3. Lý thuyết tương tự màng mỏng

Xét một màng mỏng chịu tác dụng của áp suất p làm nó phồng lên so với mặt phẳng ban đầu (hình 3.16a), tại biên của màng có chuyển vị bằng không (do có liên kết). Lý thuyết tương tự với màng mỏng như vậy do Prandtl nêu ra có thể áp dụng đối với các mặt cắt đặc biệt, trong đó hàm ứng suất Φ không thể xác định dưới dạng giải tích.

Đối với một phân tố của màng mỏng sau khi bị biến dạng (hình 3.16b,c), ta có phương trình cân bằng tĩnh học có dạng:

$$N\,dy\,(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx)-N\,dy\,(\frac{\partial z}{\partial x})+N\,dx\,(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy)$$

$$-N\,dx\,(\frac{\partial z}{\partial y})+p\,dxdy=0$$

Hoặc rút gọn thành:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad (3.47)$$

Trong đó, N là lực căng của màng mỏng dưới tác dụng của áp suất p, z là chuyển vị của màng theo phương của p.

Rõ ràng phương trình trên hoàn toàn giống như (3.40). Như vậy độ vồng lên của màng có thể coi tương tự như hàm ứng suất Φ. Ta đi tính các thành phần ứng suất tiếp :

$$\tau_{xz}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-\frac{\partial z}{\partial x} \qquad (3.48)$$

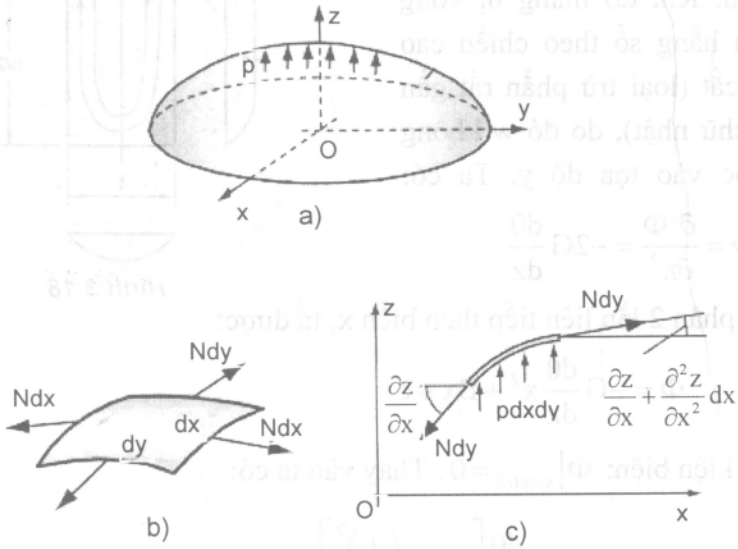
Đường đồng mức của chuyển vị trên màng có dạng z = const, sử dụng sự tương tự ta có :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=0$$

Hay : $\tau_{yz}n_y+\tau_{xz}n_x=\tau_{zn}=0$ (3.49)

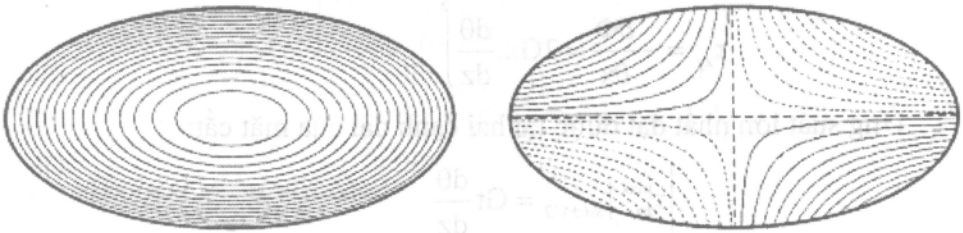
Như vậy ta có *ứng suất tiếp toàn phần theo phương tiếp tuyến với đường đồng mức bằng độ dốc* của màng khi bị thổi phồng lên, *độ vênh của mặt cắt ngang bằng độ vồng lên* của màng.

Thay giá trị của Φ = w vào (3.37) ta có *mômen xoắn T bằng hai lần thể tích giới hạn bởi mặt cong của màng và mặt phẳng x0y.*



Hình 3.16

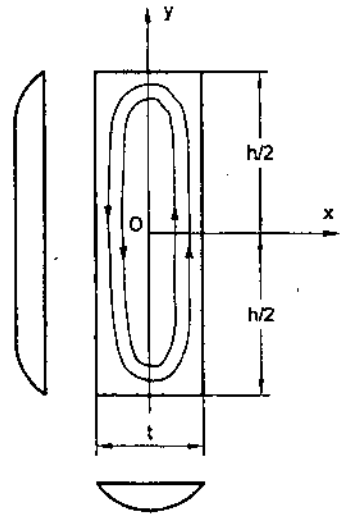
Trên hình 3.17 biểu diễn đường đồng mức của ứng suất tiếp và độ vênh của mặt cắt hình elip.



Hình 3.17

Ví dụ 5: Xác định trường ứng suất và góc xoắn tỷ đối của thanh mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp, (t << h) chịu xoắn bởi mômen ngẫu lực T (hình 3.18).

Giải: Giả sử mặt cắt ngang được phủ một lớp màng mỏng, chịu áp lực phân bố đều q vuông góc với bề mặt màng và lực căng N trên một đơn vị chiều dài của chu tuyến. Khi đó màng bị vồng lên và là hằng số theo chiều cao của mặt cắt (loại trừ phần rất gần hai đầu chữ nhật), do đó w không phụ thuộc vào tọa độ y. Ta có:



Hình 3.18

$$\Delta w = \Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = -2G\frac{d\theta}{dz}$$

Tích phân 2 lần liên tiếp theo biến x, ta được:

$$\Phi = -G\frac{d\theta}{dz}x^2 + Bx + c$$

Điều kiện biên: $\Phi\big|_{x=\pm t/2} = 0$. Thay vào ta có:

$$\Phi = -G\frac{d\theta}{dz}\left[x^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2\right]$$

Ta tính các thành phần ứng suất:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx} &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0\\ \tau_{zy} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2Gx.\frac{d\theta}{dz}\end{aligned}\right\}$$

Ứng suất lớn nhất đạt được tại hai cạnh dài của mặt cắt:

$$\left|\tau_{zy}^{max}\right|_{x=\pm t/2} = Gt\frac{d\theta}{dz}$$

Hằng số xoắn:

$$J = -\frac{4}{\Delta\Phi}\iint_D \Phi dxdy = \frac{ht^3}{3}$$

Thay $G\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{J}$ vào ta có : $\left|\tau_{zy}{}^{max}\right| = \frac{3T}{ht^2} = \frac{T.t}{J}$

Góc xoắn tỷ đối có dạng : $\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ} = \frac{3T}{Ght^3}$

Từ bài toán trên ta có thể áp dụng đối với thanh thành mỏng chịu xoắn, ta chia làm hai loại mặt cắt: thành mỏng hở và thành mỏng kín.

a) Mặt cắt ngang thành mỏng hở

Trường hợp có thể khai triển thành hình chữ nhật dài:

(ví dụ chữ L, [, ...), ta có hằng số xoắn được tính theo công thức:

$$J = \frac{S\,t^3}{3} = \frac{1}{3}\int t^3 ds\,;$$

Góc xoắn tỷ đối và ứng suất tiếp lớn nhất có dạng:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ}\ ;\ \tau_{max} = \frac{T.t_{max}}{J}$$ với t_{max} là chiều dày lớn nhất

Trường hợp không thể khai triển thành hình chữ nhật (chữ I, T,...)

Công thức đối với hằng số xoắn, góc xoắn tỷ đối và ứng suất tiếp lớn nhất như sau:

$$\begin{cases} J = \sum_i s_i t_i^3 / 3 \\ \frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ}, \quad \tau_{max} = \frac{T.t_{max}}{J} \end{cases}$$

b) Mặt cắt ngang thành mỏng kín (hình 3.19)

Áp dụng lý thuyết tương tự màng mỏng. Ký hiệu q là tích của ứng suất tiếp và bề dày của thành mỏng, ta giả thiết: $q = \tau.t = const$ (3.50)

Hợp lực của nội lực trong mặt cắt ngang phải cân bằng với ngẫu lực T:

$$T = \iint dM_0 = \iint q(2dA)$$

Hay $T = 2qA^*$ (3.51)

Với A* là diện tích bao bởi đường trung gian của thành mỏng (hình 3.20).

Ứng suất tiếp được tính theo công thức:

$$\tau = \frac{T}{2A^{*}t} \tag{3.52}$$

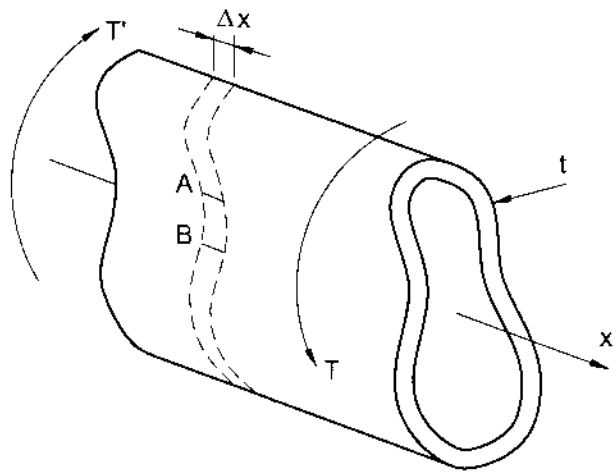
Góc xoắn tỷ đối trên một đơn vị chiều dài được tính như sau:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{4GA^{*2}} \int_{s} \frac{ds}{t}$$

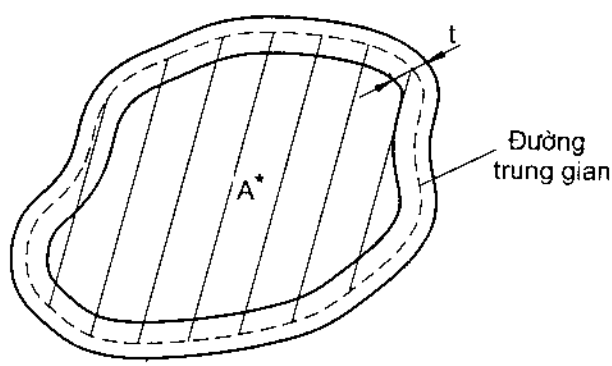
Từ đó, góc xoắn của toàn bộ thanh có chiều dài L có dạng:

$$\theta = \frac{TL}{4A^{*2}G} \oint \frac{ds}{t} \tag{3.53}$$

Trong đó tích phân được tính theo chu tuyến của mặt cắt ngang.



Hình 3.19



Hình 3.20

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1. Chứng minh rằng, hàm ứng suất $\phi = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 - 6x_2^4$ thoả mãn phương trình điều kiện hoà kép. Tìm các thành phần của ten-xơ ứng suất và ten-xơ biến dạng khi coi biến dạng là phẳng.

3.2. Chứng minh hàm số sau có thể chọn làm hàm ứng suất Ery, xác định trường ứng suất và trạng thái chịu lực của thanh mặt cắt ngang chữ nhật hẹp ($\delta = 1$).

$$\phi(x,y) = \frac{q}{8c^3}\left[x^2(y^3 - 3c^2y + 2c^3) - \frac{1}{5}y^3(y^2 - 2c^2)\right]$$

với q, c = const, $0 \le x \le l$; $-c \le y \le c$.

3.3. Cho hàm ứng suất Ery có dạng:

$$\phi(x,y) = -\frac{F}{d^3}xy^2(3d - 2y) + \frac{Py^2}{3C} \text{ với F, d = const.}$$

Hãy xác định trường ứng suất, trạng thái chịu lực của thanh với:

$-l \le x \le l$; $-c \le y \le c$ (bề dày mặt cắt ngang hình chữ nhật coi bằng 1)

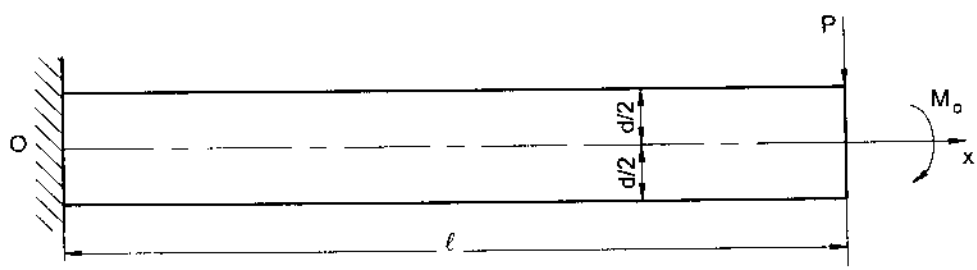
3.4. Cho hàm ứng suất Ery có dạng

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}sy\ (1 - \frac{1}{6}\frac{y^2}{c^2}) + \frac{Py^2}{4C}, \text{ với s, P, c = const.}$$

Hãy xác định trường ứng suất, trạng thái chịu lực của thanh: $0 \le x \le \ell$; $-d \le y \le d$ (bề dày mặt cắt ngang hình chữ nhật coi bằng 1).

3.5. Cho dầm côngxon chịu lực như hình 3.21, hãy xác định trường ứng suất, chọn hàm ứng suất Ery có dạng:

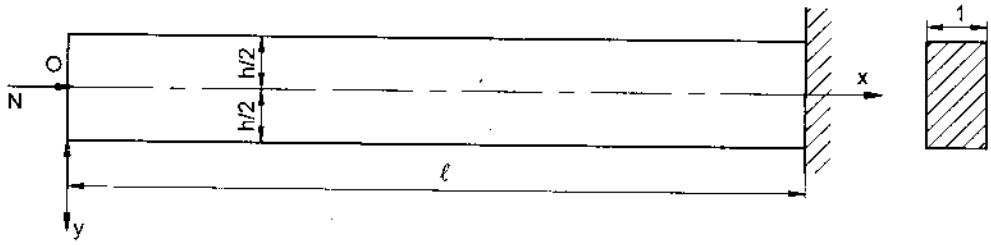
$$\phi(x,y) = Ay^3 + Bxy^3 + Cxy \text{, với A, B, C = const}$$



Hình 3.21

3.6. Cho dầm côngxon chịu lực như hình 3.22, hãy xác định trường ứng suất, chọn hàm ứng suất Ery có dạng:

$$\phi(x,y) = Ay^2 + Bxy^3 + Cxy \text{ , với A, B, C = const}$$

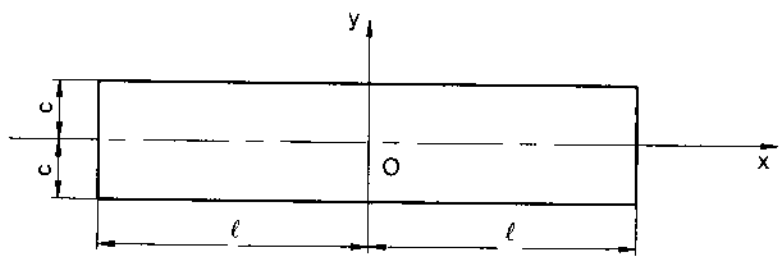


Hình 3.22

3.7. Cho hàm ứng suất Ery:

$$\varphi(x,y) = -\frac{q}{8c^3}\left[x^2y^3 - \frac{y^5}{5} - 3c^2y^2 + 2c^3x^2 - c\left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right)y^3\right]$$

Hãy xác định trường ứng suất, trạng thái chịu lực và điều kiện liên kết của dầm (hình 3.23)?



Hình 3.23

3.8. Xác định trường ứng suất, góc xoắn tỷ đối và độ vênh của thanh mặt cắt ngang hình tròn bán kính a chịu xoắn bởi mômen ngẫu lực T, chọn hàm ứng suất Prandtl có dạng:

$$\varphi = k(r^2 - a^2) \text{ với } k = \text{const}$$

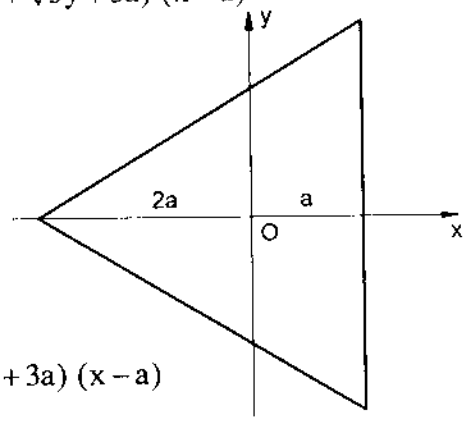
Chứng minh rằng hàm ứng suất đó cũng có thể áp dụng đối với mặt cắt ngang hình vành khăn có bán kính trong là a, bán kính ngoài là b.

3.9. Giải bài toán trên xuất phát từ hàm vênh: $\psi(x,y) \equiv 0$ và so sánh với công thức trong sức bền vật liệu.

3.10. Cho hàm ứng suất Prandtl có dạng:

$$\varphi(x,y) = K(x - \sqrt{3}y + 3a)\ (x + \sqrt{3}y + 3a)\ (x - a)$$

Với K – hằng số chưa biết, a – chiều cao mặt cắt ngang hình tam giác đều của thanh chịu xoắn bởi mômen xoắn T (hình 3.24). Hãy xác định: ứng suất tiếp, góc xoắn tỉ đối, độ vênh, ứng suất tiếp lớn nhất đạt được tại vị trí nào và giá trị τ_{max}?



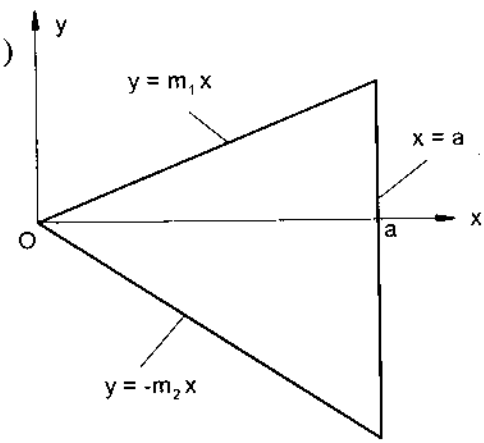
Hình 3.24

$$\varphi(x,y) = K(x - \sqrt{3}\ y + 3a)\ (x + \sqrt{3}\ y + 3a)\ (x - a)$$

3.11 Sử dụng điều kiện biên tương tự như bài trên, với hàm ứng suất có dạng :

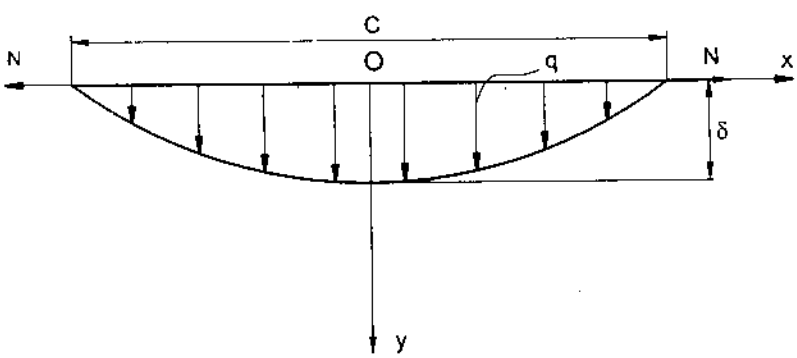
$$\varphi(x,y) = K(x - a)\ (y - m_1 x)\ (y + m_2 x)$$

Trong đó, K = const, m_1, m_2, a là các thông số về hình học của tam giác thường. Chứng minh rằng, lời giải của bài toán chỉ đúng trong trường hợp tam giác đều (hình 3.25).



Hình 3.25

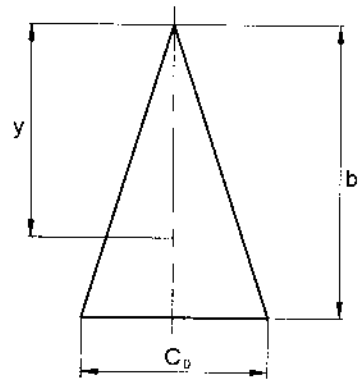
3.12. Chứng minh rằng, hàm ứng suất Prandtl có thể áp dụng đối với màng mỏng hình Parabol (hình 3.26) $\varphi = -G\dfrac{d\theta}{dz}(x^2 - \dfrac{c^2}{4})$



Hình 3.26

3.13. Đối với mặt cắt ngang có dạng tam giác hẹp (hình 3.27) có thể thu được nghiệm gần đúng nếu coi tại mọi mức y, màng mỏng có dạng Parabol như bài trên. Chứng tỏ rằng mômen xoắn khi đó của mặt cắt ngang tam giác có chiều cao b là :

$$T = \frac{1}{2} G \frac{d\theta}{dz} b c_0^3$$

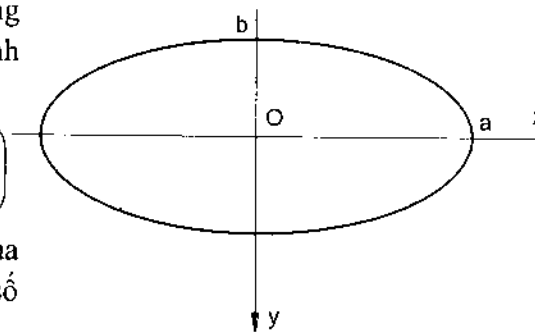


Hình 3.27

3.14. Hãy sử dụng phương pháp trong ví dụ 4, chứng minh rằng hàm ứng suất Prandtl của mặt cắt ngang elip (hình 3.28) có thể chọn gần đúng như sau:

$$\phi = -G \frac{d\theta}{dz} b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

Chứng minh lời giải chính xác của bài toán tiến gần đến giá trị trên với tỷ số $\frac{b}{a}$ rất nhỏ, tìm mômen xoắn T, τ_{max} ?



Hình 3.28

3.15. Xác định ứng suất, góc xoắn tỷ đối và độ vênh của thanh mặt cắt ngang chữ nhật chịu xoắn (hình 3.29), chọn hàm ứng suất có dạng: $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$,

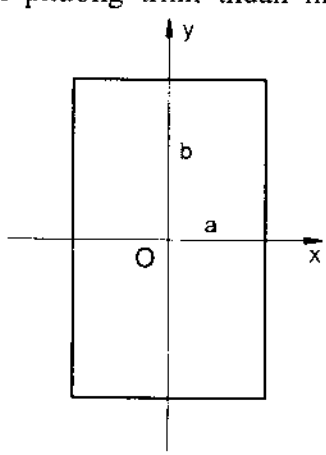
Trong đó $\varphi_0(x, y) = X(x).Y(y)$, thỏa mãn phương trình thuần nhất $\Delta\varphi = 0$ và điều kiện biên:

$$\varphi_0(\pm a, y) = 0;$$

$$\varphi_0(x, \pm b) = -G \frac{d\theta}{dz}(a^2 - x^2)$$

Và $\varphi_1(x, y) = G \frac{d\theta}{dz}(a^2 - x^2)$, thỏa mãn phương trình không thuần nhất:

$$\Delta\varphi = -2G \frac{d\theta}{dz}$$



Hình 3.29

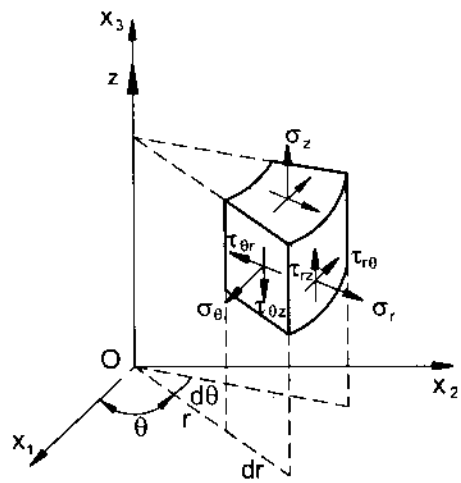
Chương 4

BÀI TOÁN PHẲNG TRONG TỌA ĐỘ ĐỘC CỰC

1 – CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

1.1. Phương trình cân bằng

Xét sự cân bằng của một phân tố trong hệ trục tọa độ trụ (hình 4.1). Phương trình tổng hình chiếu của các lực theo phương bán kính, theo phương vuông góc với bán kính và phương $x_3 \equiv z$ có dạng :

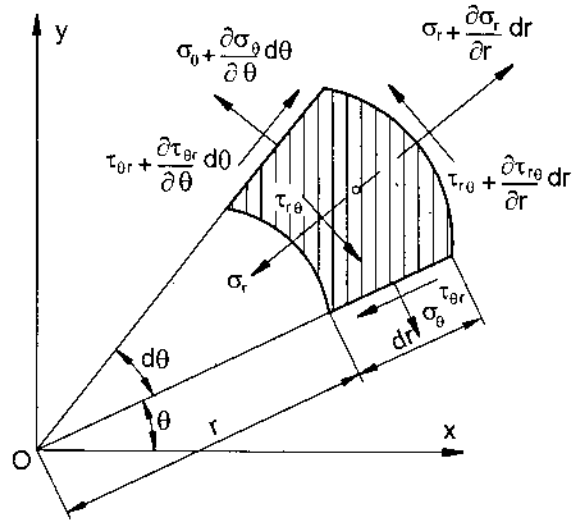


Hình 4.1

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+S=0\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}+Z=0
\end{aligned}\right\}\qquad(4.1)$$

Trong đó: R, S, Z là hình chiếu của lực khối tương ứng theo phương bán kính, phương vòng và phương z. Trong trường hợp bài toán phẳng (hình 4.2), ta có các thành phần hình chiếu theo phương z bằng không, hệ (4.1) trở thành :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0\\&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+S=0\end{aligned}\right\}\qquad(4.2)$$



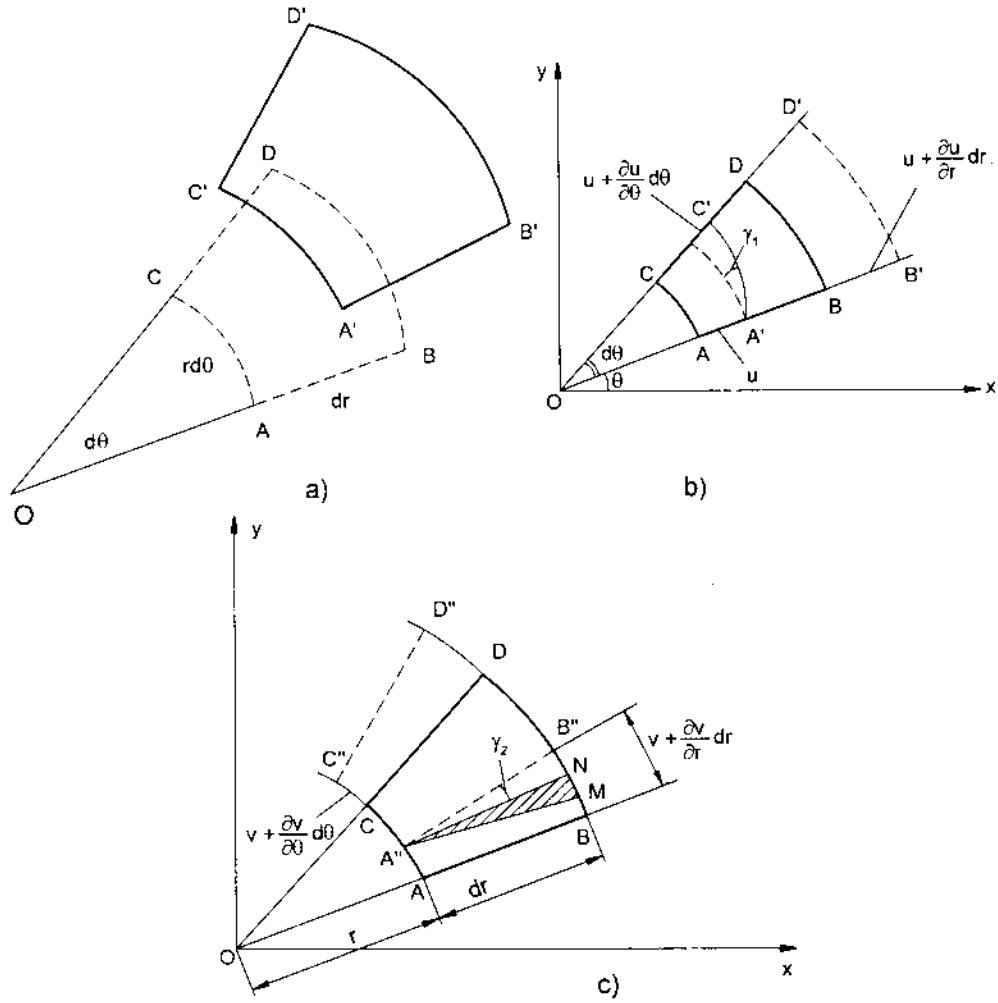
Hình 4.2

1.2. Các phương trình hình học

Xét phân tố ABDC trước khi biến dạng, sau khi biến dạng phân tố có vị trí mới là A'B'D'C'(hình 4.3a). Gọi u, v là chuyển vị theo phương bán kính và phương vòng của điểm A, chuyển vị của điểm B, C lần lượt theo hai phương nói trên là: $(u+\frac{\partial u}{\partial r}dr;\ v+\frac{\partial v}{\partial r}dr)$ và $(u+\frac{\partial u}{\partial\theta}d\theta;\ v+\frac{\partial v}{\partial\theta}d\theta)$.

Các thành phần biến dạng liên hệ với chuyển vị có dạng:

$$\varepsilon_r=\frac{(u+\frac{\partial u}{\partial r}dr)-u}{dr}=\frac{\partial u}{\partial r}\qquad(*)$$



Hình 4.3

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} + \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial \theta}d\theta) - v}{rd\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad (**)$$

$\gamma_{r\theta} = \gamma_1 + \gamma_2$, với γ_1 là biến dạng góc chỉ do u gây nên, γ_2 là biến dạng góc chỉ do v gây nên (hình 4.3 b,c) :

$$\gamma_1 = \frac{(u + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta) - u}{rd\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\gamma_2 = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial r} dr) - v}{dr} - \frac{v}{r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (***)$$

Từ (*, **, ***), ta có:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \;;\; \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \\ &\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

Trong đó: ε_r, ε_0, $\gamma_{r\theta}$ lần lượt là biến dạng dài tỷ đối theo phương bán kính, phương vòng, và biến dạng góc tương đối.

Phương trình cân bằng tĩnh học biểu diễn qua chuyển vị có dạng:

$$\left.\begin{aligned} &G\nabla^2 u + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + R = 0 \\ &G\nabla^2 v + (\lambda + G)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + S = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

(trạng thái biến dạng phẳng).

$$\left.\begin{aligned} &G\nabla^2 u + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + R = 0 \\ &G\nabla^2 v + \frac{E}{2(1-\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) + S = 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

(trạng thái ứng suất phẳng).

1.3. Các phương trình vật lý

Liên hệ giữa ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Húc:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta);\;\; \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_0 - \nu\sigma_r) \\ &\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \;;\; G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

hay: $$\left.\begin{aligned}&\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta);\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r)\\&\tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}\end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

Đối với trạng thái biến dạng phẳng thay : $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$, $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$

Phương trình tương thích biểu diễn qua ứng suất có dạng:

$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = -\frac{1}{(1-\nu)}(\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \theta})$ (4.8) trạng thái biến dạng phẳng.

$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = -(1+\nu)(\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \theta})$ (4.9) trạng thái ứng suất phẳng.

1.4. Hàm ứng suất

Các thành phần của ten-xơ ứng suất liên hệ với hàm ứng suất Airy $\varphi(r, \theta)$ theo công thức:

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\\&\sigma_\theta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\\&\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\end{aligned}\right\} \quad (4.10)$$

Phương trình điều hoà kép trong toạ độ độc cực:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\varphi = 0$$

hay $\nabla^4\varphi = 0$ (4.11)

Ta xét nghiệm tổng quát của phương trình trên bằng phương pháp tách biến:

$\varphi(r,\theta) = f(r)e^{k\theta}$, trong đó k là thông số cần xác định, f(r) phải thoả mãn phương trình vi phân cấp bốn, sau khi thay φ vào phương trình (4.11):

$$f^{(4)} + \frac{2}{r}f''' - \frac{1-2k^2}{r^2}f'' + \frac{1-2k^2}{r^3}f' + \frac{k^4(4+k^2)}{r^4}f = 0 \quad (4.12)$$

Nghiệm của phương trình vi phân cấp 4 có thể tìm được dễ dàng, đặt $r=e^{\xi}$, khi đó ta có phương trình vi phân theo biến ξ như sau:

$$f^{(4)} - 4f''' + (4+2k^2)f'' - 4k^2 f' + k^2(4+k^2)f = 0$$

Đặt $f = e^{a\xi}$ ta có phương trình đặc trưng :

$$(a^2 + k^2)(a^2 - 4a + 4 + k^2) = 0$$

Nghiệm của phương trình này là: $\left[\begin{array}{l} a = \pm ik \\ a = 2 \pm ik \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} k = \pm ia \\ k = \pm i(a-2) \end{array}\right.$

Đối với bài toán có tính chu kỳ theo góc θ, ta có thể chọn $k = i.n$ (n là số nguyên), và a là số nguyên. Khi đó hàm ứng suất φ có dạng tổng quát sau:

$$\begin{aligned}
\varphi &= a_0 + a_1 \ln r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r + (a_4 + a_5 \ln r + a_6 r^2 + a_7 r^2 \ln r)\theta \\
&+ (a_{11} r + a_{12} r \ln r + \frac{a_{13}}{r} + a_{14} r^3 + a_{15} r\theta + a_{16} r\theta \ln r)\cos\theta + \\
&+ (b_{11} r + b_{12} r \ln r + \frac{b_{13}}{r} + b_{14} r^3 + b_{15} r\theta + b_{16} r\theta \ln r)\sin\theta + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n1} r^n + a_{n2} r^{n+2} + a_{n3} r^{-n} + a_{n4} r^{2-n})\cos n\theta + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}(b_{n1} r^n + b_{n2} r^{n+2} + b_{n3} r^{-n} + b_{n4} r^{2-n})\sin n\theta
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Đây là lời giải của Michell (1899), trong đó các hệ số a, b cần được xác định. Đối với bài toán đối xứng trục, hàm φ không phụ thuộc vào góc θ, ta có:

$$\varphi = a_0 + a_1 \ln r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \ln r \tag{4.14}$$

Các thành phần ứng suất khi đó sẽ xác định theo công thức :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= 2a_3 \ln r + \frac{a_1}{r^2} + a_3 + 2a_2 \\
\sigma_\theta &= 2a_3 \ln r - \frac{a_1}{r^2} + 3a_3 + 2a_2 \\
\tau_{r\theta} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Trường chuyển vị xác định theo công thức:

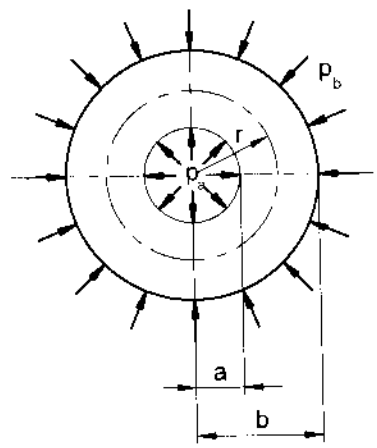
$$u = \frac{1}{E}[-\frac{(1+\nu)}{r}a_1 + 2(1-\nu)a_3 r\ln r - (1+\nu)a_3 r + 2a_2(1-\nu)r]$$
$$+ A\sin\theta + B\cos\theta \qquad (4.16)$$
$$v = \frac{4r\theta}{E}a_3 + A\cos\theta + B\sin\theta + Cr$$

Trong đó A, B, C là các hằng số bất kỳ từ điều kiện chuyển vị của vật rắn. Chú ý rằng nếu vật thể có chứa điểm r = 0 thì các hệ số a_1, a_3 phải bằng không để chuyển vị là đại lượng hữu hạn, khi đó ứng suất là hằng số. Đối với bài toán biến dạng phẳng, các hằng số vật liệu được thay bởi E_1, ν_1 theo (3.10).

Lời giải trên của Michell có thể áp dụng đối với một loạt các bài toán phẳng có nhiều ứng dụng trong thực tiễn mà ta sẽ lần lượt xét đến sau đây.

2 – ỐNG DÀY CHỊU ÁP SUẤT PHÂN BỐ ĐỀU BÊN TRONG P_a VÀ BÊN NGOÀI P_b

Xét ống có bán kính trong a, bán kính ngoài b, chịu áp suất phân bố đều bên trong p_a và bên ngoài p_b (hình 4.4); ta cần xác định trạng thái ứng suất, biến dạng và chuyển vị tại điểm bất kỳ trên thành ống.



Hình 4.4

2.1. Ứng suất

Ứng suất theo phương bán kính và phương vòng xác định theo công thức (từ (4.15), với $a_3 = 0$ vì $r \neq 0$) :

$\sigma_{r,\theta} = A \pm \frac{B}{r^2}$, với các hệ số A, B xác định từ điều kiệu biên của bài toán:

$r = a$, $\sigma_r = -p_a$; $r = b$, $\sigma_r = -p_b$, ta có:

$$A = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}; B = \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Vậy :

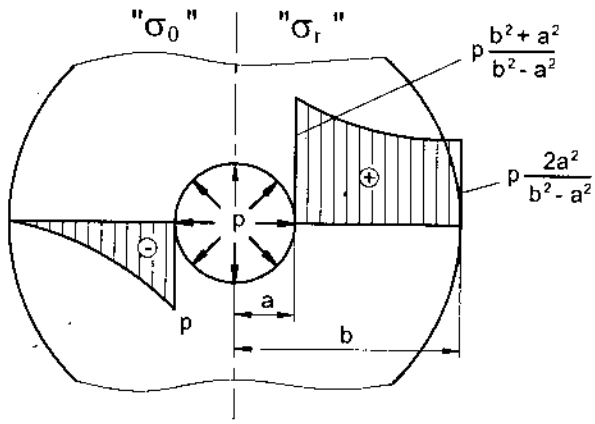
$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_b - p_a)a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} \qquad (4.17)$$

Trường hợp riêng, khi $p_a = p$, $p_b = 0$.

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right); \quad \sigma_\theta = \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \qquad (4.18)$$

Biểu đồ ứng suất như trong hình 4.5



Hình 4.5

Ứng suất tương đương, theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất phải không vượt quá giá trị ứng suất cho phép để ống đủ bền:

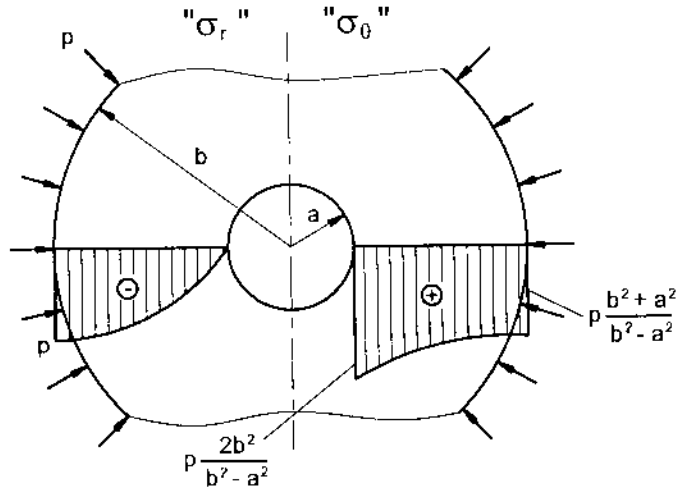
$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2pb^2}{b^2 - a^2} \le [\sigma] \quad (4.19), \text{ với } \sigma_1 = \sigma_0;\ \sigma_3 = \sigma_r \text{ tại } r = a;$$

– Khi $p_a = 0$, $p_b = p$ ta có :

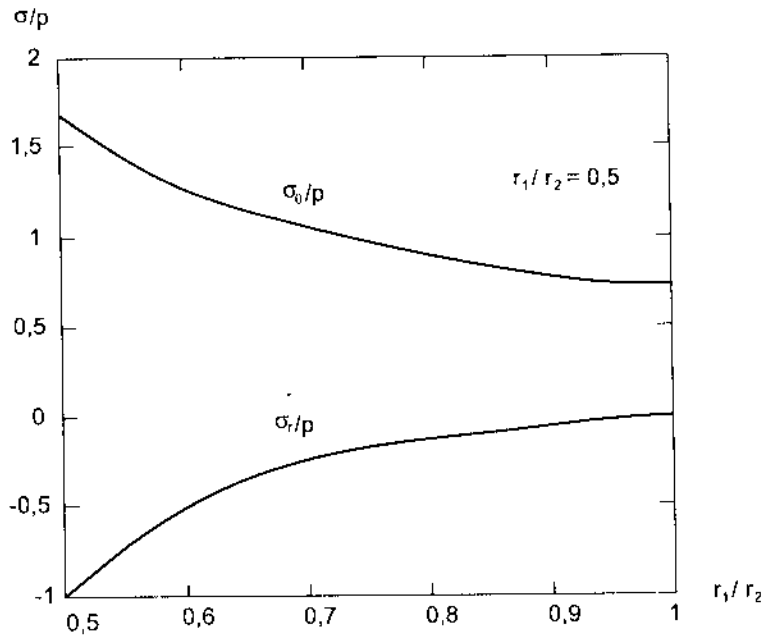
$$\sigma_r = \frac{-pb^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \quad \sigma_\theta = \frac{-pb^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \qquad (4.20)$$

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2pb^2}{b^2 - a^2} \le [\sigma], \text{ với } \sigma_3 = \sigma_0;\ \sigma_1 = 0 \text{ tại } r = a$$

Ta thấy ứng suất tương đương lớn nhất trong hai trường hợp trên đều bằng nhau và cùng đạt tại mép trong của ống. Biểu đồ ứng suất như trong hình 4.6.



Hình 4.6



Hình 4.7

Trên hình 4.7 biểu diễn sự phụ thuộc của ứng suất pháp theo kích thước của ống dày trong trường hợp $p_a = p$, $p_b = 0$. Ta thấy khi a/b = 0,5 ; ứng suất vòng đạt giá trị lớn nhất và bằng 5/3 p. Nếu ống mỏng chịu áp suất đều bên

trong p thì ta có: $\sigma_0 = \frac{p r_0}{t}$, với t = b – a : bề dày ống ; r_0 =(a+b)/2 : bán kính trung bình của ống.

Biểu thức này chính là công thức trong sức bền vật liệu đối với vỏ mỏng chịu áp suất bên trong p.

2.2. Chuyển vị

Xét phân tố ABFE tách ra từ ống dày (hình 4.8). Chuyển vị theo phương bán kính tại điểm bất kỳ cách tâm khoảng cách bằng r là u. Ta có phương trình Navier trong trường hợp bài toán đối xứng trục u = u(r) trở thành:

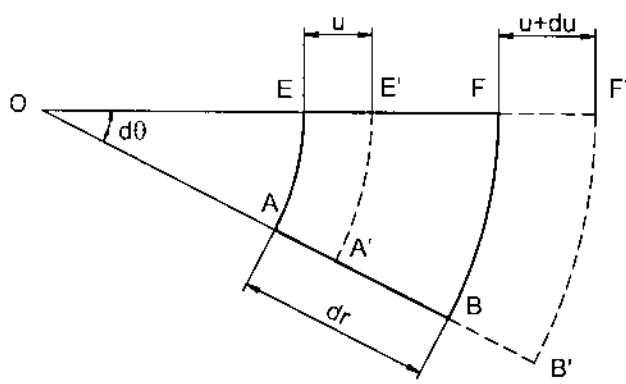
$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2}u = 0$$

Nghiệm của phương trình đó là:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{4.21}$$

Trong đó :

$$C_1 = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1-v}{E}$$
$$C_2 = \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1+v}{E} \tag{4.22}$$



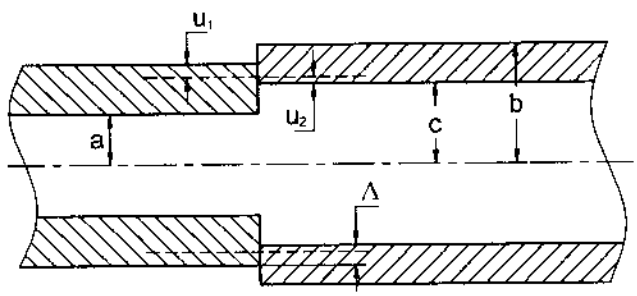
Hình 4.8

Đối với bài toán biến dạng phẳng (ví dụ, ống dày ngàm tại hai đầu, chịu áp suất phân bố đều bên trong), ta cần thay các hằng số vật liệu thành E_1, ν_1 theo 3.10, ứng suất theo phương z xác định từ điều kiện biến dạng $\varepsilon_z = 0$:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$$

2.3. Ống ghép

Nếu ống đơn chịu áp suất bên trong tương đối lớn thì ta gặp phải khó khăn khi thiết kế để ống đảm bảo điều kiện bền. Dễ dàng rút ra từ (4.19), nếu áp suất bên trong đạt tới $[\sigma]/2$ thì phải chế tạo ống có bán kính ngoài rất lớn, điều đó trên thực tế không thể thực hiện được và tốn kém vật liệu. Do đó phải ghép hai ống bằng cách nung nóng chúng lên rồi lồng vào nhau. Tại chỗ nối ghép sẽ xuất hiện áp suất tiếp xúc, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể xác định ứng suất toàn phần do áp suất tiếp xúc và áp suất tác dụng bên trong ống gây nên.



Hình 4.9

Xét một ống được ghép từ 2 ống làm bằng vật liệu khác nhau với độ dôi Δ cho trước, a là bán kính bên trong, c là bán kính chỗ nối ghép, b là bán kính bên ngoài (hình 4.9).

Ứng suất tiếp xúc tại chỗ nối ghép xác định từ điều kiện ghép ống :

$$|u_1| + |u_2| = \Delta \qquad (4.23)$$

với u_1, u_2 lần lượt là chuyển vị của ống trong và ống ngoài tại r = c và xác định bởi (4.21). Từ đó ta có:

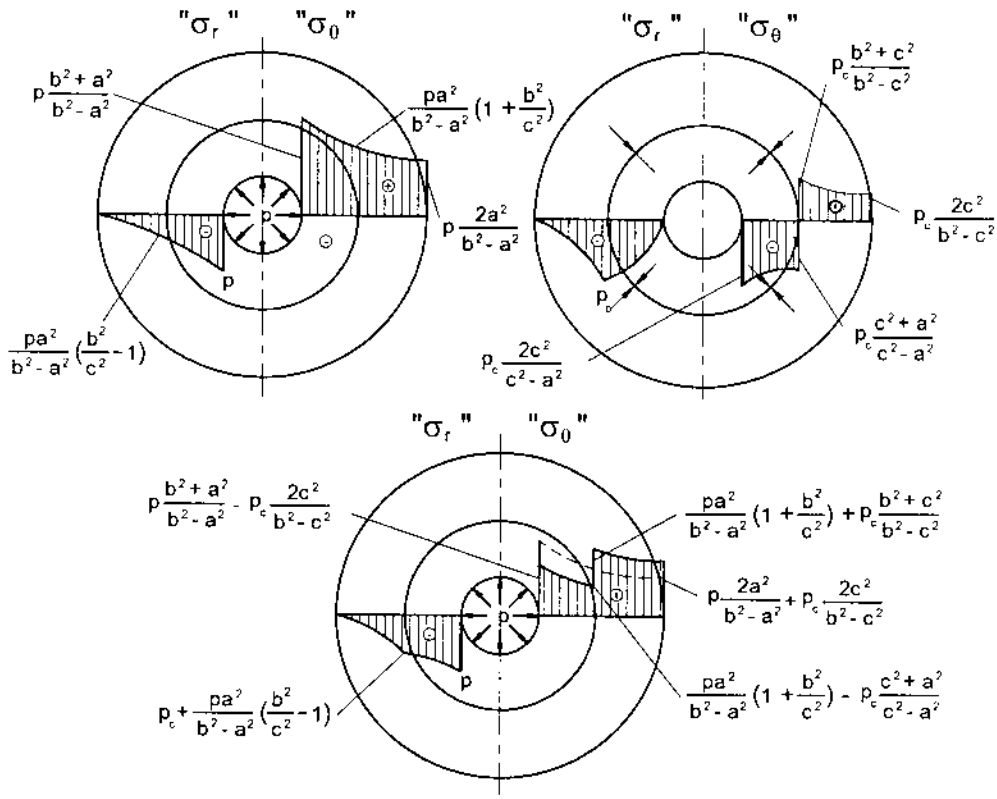
$$P_c = \frac{\Delta}{c\left(\frac{C_a}{E_a} + \frac{C_b}{E_b}\right)} \tag{4.24}$$

$$C_a = \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \nu_a; \qquad C_b = \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \nu_b$$

Trường hợp hai ống cùng vật liệu: $E_a = E_b = E$, $\nu_a = \nu_b = \nu$, ta có:

$$P_c = \frac{E\Delta}{2c^3}\frac{\left(c^2 - a^2\right)\left(b^2 - c^2\right)}{\left(b^2 - a^2\right)} \tag{4.25}$$

Biểu đồ phân bố ứng suất theo phương bán kính và phương vòng của ống ghép chịu áp suất bên trong thu được bằng phương pháp cộng tác dụng các biểu đồ trong hình 4.10a và 4.10b và biểu diễn trên hình 4.10c.



Hình 4.10

Ta thấy có hai điểm nguy hiểm trong ống ghép : Điểm A tại mép ngoài của ống trong, và điểm B tại mép trong của ống ngoài. Điều kiện bền của ống ghép thỏa mãn khi ứng suất tương đương ở cả hai điểm đó không vượt quá ứng suất cho phép.

Độ dôi hợp lý khi $\sigma_{td}^{A} = \sigma_{td}^{B}$

Khi đó độ dôi trong trường hợp hai ống cùng một vật liệu, chịu áp suất bên trong p được tính theo công thức:

$$\Delta = \frac{2p}{E} \cdot \frac{c\,b^2\left(c^2 - a^2\right)}{b^2\left(c^2 - a^2\right) + c^2\left(b^2 - c^2\right)} \qquad (4.26)$$

Điều kiện ghép ống tối ưu của Gađôlin khi $\sigma_{td}^{A} = \sigma_{td}^{B} = \min$ cho ta giá trị bán kính chỗ nối ghép:

$$c = \sqrt{ab} \qquad (4.27)$$

Khi đó ứng suất tương đương đạt giá trị nhỏ nhất:

$$\min \sigma_{td} = p\frac{b}{b-a} \text{ và độ dôi tối ưu: } \Delta = \frac{p}{E}\sqrt{ab} \qquad (4.28)$$

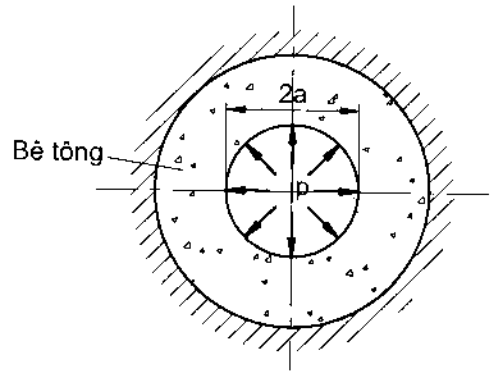
Việc ghép ống sẽ cho ta độ bền có lợi hơn so với ống đơn cùng kích thước và chịu áp lực bên trong p là:

$$\frac{\sigma_{td}^{don}}{\sigma_{td}^{ghep}} = \frac{2p\dfrac{b^2}{b^2 - a^2}}{p\dfrac{b}{b-a}} \approx 2.$$

Có nghĩa là *ống ghép lợi hơn gấp 2 lần so với ống đơn về độ bền.*

Ví dụ 1: Một ống dày bằng bêtông đặt vừa khít trong lòng đá (hình 4.11) (được coi là tuyệt đối cứng), ống chịu áp suất phân bố đều bên trong p = 0,86 MN/m^2. Tính áp suất trên mặt tiếp xúc giữa ống và đá, sau đó kiểm tra độ bền của ống theo thuyết bền Mo.

Cho biết $\frac{a}{b} = 0,5$. Các đặc trưng của bêtông: $[\sigma]_k$ = 0,5 MN/m^2; $[\sigma]_n$ = 5 MN/m^2; E = 2.10^4 MN/m^2.



Hình 4.11

Giải: Gọi áp suất giữa đá và bêtông là p' và coi p' phân bố đều. Vì bán kính ngoài của ống bêtông không bị biến dạng, có nghĩa:

$$\Delta b = u_{r=b} = 0$$

Khai triển ta được:

$$\frac{1-\nu}{E}.\frac{pa^2-p'b^2}{b^2-a^2}.b+\frac{1+\nu}{E}.\frac{a^2b^2}{b}.\frac{p-p'}{b^2-a^2}=0$$

hay $(1 - \nu)(pa^2 - p'b^2) + (1 + \nu)\, a^2\, (p - p') = 0$

Rút ra: $$p'=\frac{2p\dfrac{a^2}{b^2}}{1-\nu+(1+\nu)\dfrac{a^2}{b^2}}$$

Thay số vào ta được:

$$p' = 0{,}38\ MN/m^2$$

Tại mép trong của ống (r = a).

$$\sigma_r = -p = -0{,}86\ MN/m^2 = \sigma_3$$

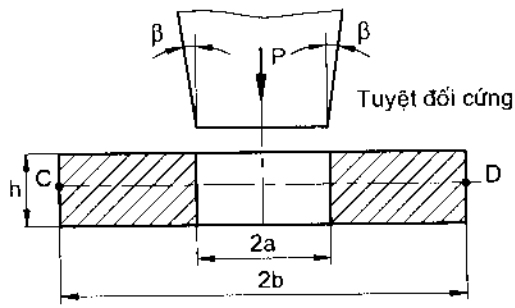
$$\sigma_\theta=\frac{p\left(a^2+b^2\right)-2p'b^2}{b^2-a^2}=\frac{p\left(\dfrac{a^2}{b^2}+1\right)-2p'}{1-\dfrac{a^2}{b^2}}=0{,}42\,MN/m^2=\sigma_1$$

Ứng suất tương đương theo thuyết bền Mohr:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]}\sigma_3 = 0,42 - \frac{0,5}{5}(-0,86) = 0,506 MN/m^2 > [\sigma]_k$$

Ứng suất này chỉ lớn hơn ứng suất cho phép 1,2%, nên ta có thể coi điều kiện bền được thoả mãn.

Ví dụ 2: Tính góc β (coi như rất nhỏ) sao cho khi đóng ngập nêm hình nón cụt tuyệt đối cứng vào vành tròn (hình 4.12) thì bán kính ngoài của vành tròn sẽ tăng lên một lượng là u (tính ở mặt trung gian CD của vành). Vành có môđun đàn hồi E và hệ số Poát-xông υ.



Hình 4.12

Giải: Khi nêm tuyệt đối cứng được đóng ngập vào vành ở mặt trung gian sẽ dãn ra một lượng bằng $\frac{\beta h}{2}$.

Do đó ta có điều kiện: $u_{(r=a)} = \frac{\beta h}{2}$

Gọi p là áp suất tiếp xúc giữa vành và nêm tuyệt đối cứng, ta có:

$$\frac{1-\nu}{E}.\frac{pa^2}{b^2-a^2}.a + \frac{1+\nu}{E}.\frac{a^2b^2}{a}.\frac{p}{b^2-a^2} = \frac{\beta h}{2}$$

Từ đó ta có:

$$p = \frac{Eh\left(b^2-a^2\right)}{2a\left[(1-\nu)a^2(1+\nu)b^2\right]} \qquad (a)$$

Để tính góc β ta dựa vào điều kiện sau đây: dưới áp suất p, bán kính ngoài của vành ở mặt trung gian CD sẽ dãn ra một lượng là u:

$$u_{r=b} = u$$

Khai triển ta được:

$$\frac{1-\nu}{E}.\frac{pa^2}{b^2-a^2}.b+\frac{1+\nu}{E}.\frac{a^2b^2}{b}.\frac{p}{b^2-a^2}=u \qquad (b)$$

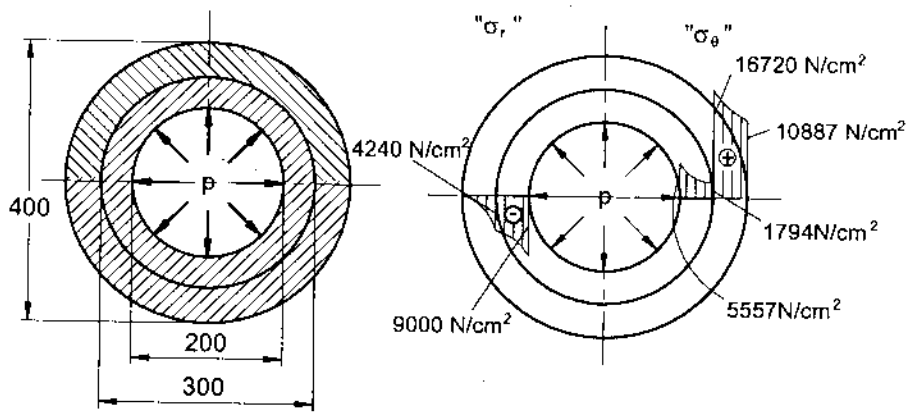
Rút ra: $$u=\frac{2pa^2b^2}{E\left(b^2-a^2\right)}$$

Thay giá trị của p ở (a) vào (b), ta được:

$$u=\frac{2pa^2b^2}{E\left(b^2-a^2\right)}=\frac{\beta Eh\left(b^2-a^2\right)}{2a\left[(1-\nu)a^2+(1+\nu)b^2\right]}$$

Vậy: $$\beta=\frac{u}{hab}\left[(1-\nu)a^2+(1+\nu)b^2\right]$$

Ví dụ 3: Hai ống cùng vật liệu ghép với nhau (hình 4.13) với độ dôi $2\Delta = 0{,}02$cm. Vẽ biểu đồ ứng suất σ_r và σ_θ trong thành ống khi ống chịu áp suất bên trong $p = 8000N/cm^2$. Biết rằng $E = 2.10^7$ N/cm^2 và $\nu = 0{,}3$.



Hình 4.13

Giải:

Đây là một bài toán về ống ghép có độ dôi nên trước hết ta phải xác định áp suất p_c do độ dôi gây ra. Vì hai ống cùng loại vật liệu nên áp suất p_c có giá trị:

$$p_c=\frac{E\Delta}{2c^3}\frac{\left(c^2-a^2\right)\left(b^2-c^2\right)}{b^2-a^2}$$

$$p_c=\frac{2.10^7.0{,}01}{2.15^3}.\frac{\left(15^2-10^2\right)\left(20^2-15^2\right)}{\left(20^2-10^2\right)}=2160N/cm^2$$

Theo hình 4.13, ta tính được ứng suất:

– Ở mặt trong của ống trong:

$$\sigma_r = -p = -8000 N/cm^2$$

$$\sigma_\theta = 8000.\frac{20^2+10^2}{15^2-10^2} - 2160\frac{2.15^2}{15^2-10^2} = 5557 N/cm^2$$

– Ở mặt ngoài của ống trong:

$$\sigma_r = -2160 + \frac{8000.10^2}{15^2-10^2}\left(1-\frac{20^2}{15^2}\right) = -4240 N/cm^2$$

$$\sigma_\theta = -\frac{8000.10^2}{15^2-10^2}\left(1+\frac{20^2}{15^2}\right) - 2160\frac{15^2+10^2}{15^2-10^2} = 1784 N/cm^2$$

– Ở mặt trong của ống ngoài:

$$\sigma_r = -4240 N/cm^2$$

$$\sigma_\theta = 8000.\frac{2.10^2}{20^2-15^2}\left(1+\frac{20^2}{15^2}\right) + 2160\frac{20^2+15^2}{20^2-15^2} = 16720 N/cm^2$$

– Ở mặt ngoài của ống ngoài:

$$\sigma_r = 0;\ \sigma_\theta = 8000.\frac{2.10^2}{20^2-15^2}\left(1+\frac{20^2}{15^2}\right) + 2160\frac{20^2+15^2}{20^2-15^2} = 10887 N/cm^2$$

Biểu đồ ứng suất được biểu diễn trên hình vẽ. Qua biểu đồ này, ta thấy một điều không hợp lý về độ dôi : vì ứng suất σ_θ ở mặt trong của ống trong ($5557 N/cm^2$) khác xa với ứng suất ở mặt trong của ống ngoài ($16720 N/cm^2$) nên dẫn đến ứng suất tương đương ở hai mặt này khác nhau nhiều ($13557 N/cm^2$ và $19340 N/cm^2$). Để khắc phục sự bất hợp lý này ta sẽ chọn lại độ dôi sao cho ứng suất tương đương ở hai mặt đó bằng nhau, tức là ta tính độ dôi Δ theo công thức tính độ dôi hợp lý sau:

$$\Delta = \frac{2p}{E}.\frac{cb^2\left(c^2-a^2\right)}{b^2\left(b^2-a^2\right)+c^2\left(b^2-c^2\right)}$$

$$= \frac{2.8000}{2.10^7}.\frac{15.20^2\left(15^2-10^2\right)}{20^2\left(15^2-10^2\right)+15^2\left(20^2-15^2\right)} = 0,0067 cm$$

Như vậy, lúc này có thể vẽ lại biểu đồ ứng suất σ_r và σ_θ tương đương với độ dôi chọn lại $\Delta = 0{,}0067$cm.

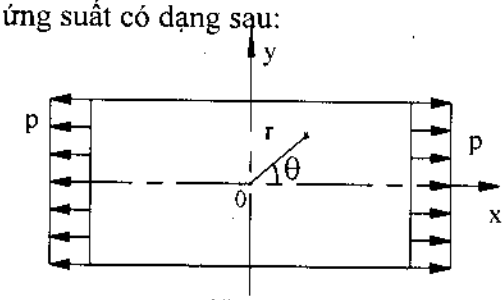
3 – TẤM CHỊU KÉO CÓ LỖ TRÒN NHỎ

Xét một tấm mỏng hình chữ nhật chiều rộng b chịu kéo theo phương x (hình 4.14), ta có phương trình điều hòa kép đối với hàm ứng suất :

Khi tấm không có lỗ, trường ứng suất tại điểm bất kỳ của tấm xác định bởi công thức: $\sigma_x = p$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, các thành phần đó tương ứng với hàm ứng suất:

$\varphi_0 = \frac{1}{2} p y^2$, hay trong tọa độ độc cực ta có: $\varphi_0 = \frac{1}{4} p r^2 (1 - \cos 2\theta)$.

Ta tính được ứng suất có dạng sau:



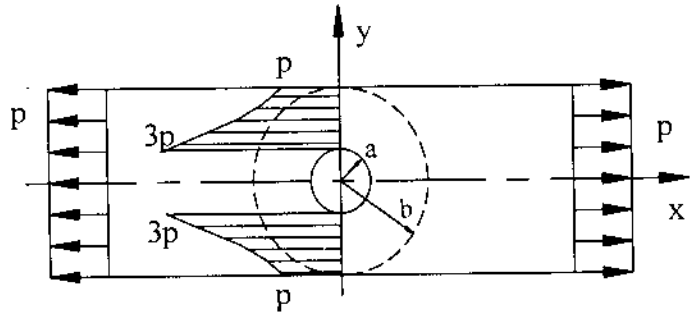
Hình 4.14

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \theta^2} = \dfrac{p}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_\theta = \dfrac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} = \dfrac{p}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial \theta}\right) = -\dfrac{p}{2}\sin 2\theta \end{cases} \qquad (4.29)$$

Xét trường hợp tại tâm của tấm có khoan một lỗ tròn nhỏ bán kính a (hình 4.15). Dựa theo dạng của hàm φ_0, ta chọn hàm ứng suất có dạng:

$\varphi(r,\theta) = f_1(r) + f_2(r)\cos 2\theta$, với f_1, f_2 là các hàm số cần tìm thỏa mãn phương trình điều hoà kép, từ (4.13) ta có :

$$f_1 = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4$$
$$f_2 = C_5 r^2 \ln r + C_6 r^2 + C_7 \ln r + C_8$$



Hình 4.15

Thay vào hàm φ ta có thể tính được các thành phần ứng suất σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$. Các hằng số tích phân xác định từ điều kiện $C_1 = C_6 = 0$ để giá trị ứng suất tại r = 0 và r = ∞ là hữu hạn ; và tại r = a thì $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$:

Ta có: $C_2 = - C_5 = p/4$;

$C_3 = - C_8 = -pa^2/2$;

$C_7 = -pa^4/4$.

Biểu thức cuối cùng của các thành phần ứng suất có dạng:

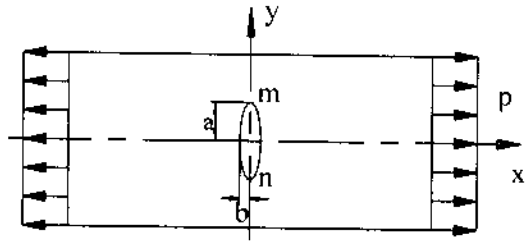
$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{p}{2}\left[1 - \dfrac{a^2}{r^2} + \left(1 + \dfrac{3a^4}{r^4} - \dfrac{4a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right] \\ \sigma_\theta = \dfrac{p}{2}\left[1 + \dfrac{a^2}{r^2} - \left(1 + \dfrac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{p}{2}\left[1 - \dfrac{3a^4}{r^4} + \dfrac{2a^2}{r^2}\right]\sin 2\theta \end{cases} \qquad (4.30)$$

Ta thấy tại mép lỗ tròn $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ thì ứng suất σ_θ đạt giá trị cực đại, còn khi : θ = 0 và θ = π thì đạt cực tiểu:

$$\begin{cases} \sigma_{max} = 3p \\ \sigma_{min} = -p \end{cases}$$ Hệ số tập trung ứng suất tại mép lỗ bằng 3

Trường hợp lỗ có hình elip với bán trục lớn là a, bán trục nhỏ là b (hình 4.16) ta có ứng suất được xác định theo công thức:

$$\sigma_{max} = p\left(1 + \frac{2a}{b}\right)$$



Hình 4.16

Với tỷ lệ a/b và phương của các bán trục so với phương của lực khác nhau, ta có giá trị của ứng suất lớn nhất tại mép lỗ là khác nhau. Nếu trục lớn của lỗ nằm vuông góc với lực kéo (a > b) thì $\sigma_{\theta max} > 3$. Nếu trục lớn của lỗ nằm theo phương lực kéo (a < b) thì $\sigma_{\theta max} < 3$

Trường hợp tấm chịu lực *phân bố đều theo hai phương vuông góc nhưng có chiều trái dấu nhau* (hình 4.17). Sử dụng nghiệm (4.30) của bài toán trên, ta cộng thêm ứng suất khi thay p bằng –p và xoay hệ trục tọa độ đi một góc $\theta = 90^0$, ta có các thành phần ứng suất có dạng:

$$\sigma_r = p(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2})\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = -p(1 + \frac{3a^4}{r^4})\cos 2\theta \qquad (4.31)$$

$$\tau_{r\theta} = -p(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2})\sin 2\theta$$

Ứng suất lớn nhất tại mép lỗ bằng:

$$\sigma_\theta(a,0) = \sigma_\theta(a,\pi) = -4p$$

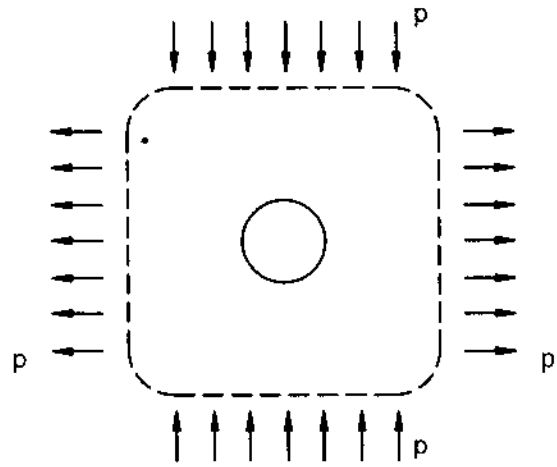
$$\sigma_\theta(a,\frac{\pi}{2}) = \sigma_\theta(a,\frac{3\pi}{2}) = 4p$$

Như vậy hệ số tập trung ứng suất là 4. Ta thấy *trường hợp tấm chịu lực có chiều ngược nhau trên các cạnh, hệ số tập trung ứng suất là lớn nhất.*

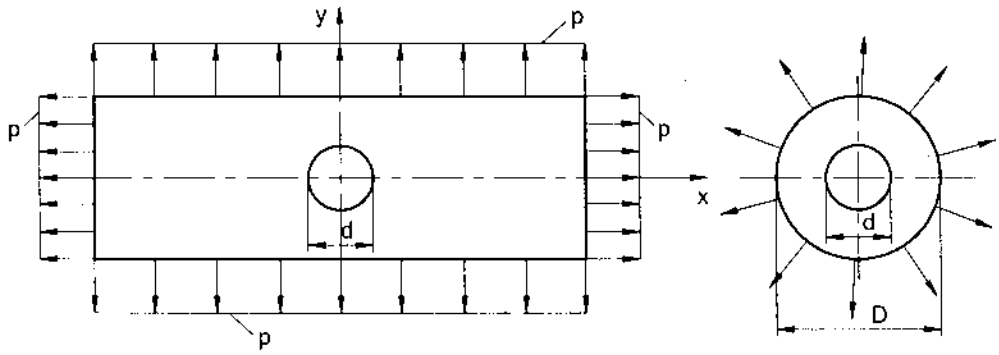
Xét trường hợp tấm chịu kéo đều theo hai phương vuông góc (hình 4.18a), với cách làm như trên, bằng phương pháp cộng tác dụng ta có ứng suất lớn nhất tại hình tròn có đường kính D, đồng tâm với lỗ là (hình 4.18b).

$\sigma_{max} = 2p.\dfrac{D^2}{D^2 - d^2}$ (d là đường kính của lỗ). Với D>>d, ta có hệ số tập trung ứng suất bằng 2.

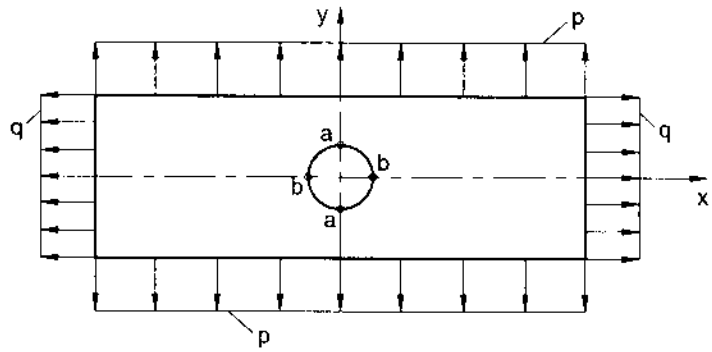
Nếu tấm chịu kéo theo *hai phương vuông góc bởi hai cường độ lực khác nhau* (hình 4.19).



Hình 4.17



Hình 4.18



Hình 4.19

Tương tự như trên, ta có công thức ứng suất tại mép lỗ như sau:

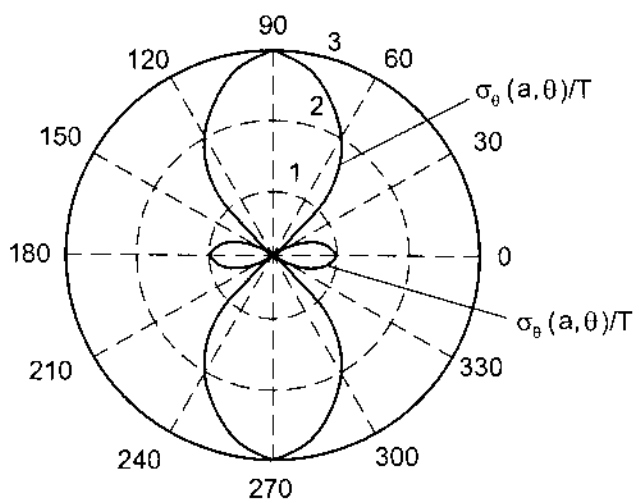
$$\begin{cases} \sigma^{b}_{max} = 3p - q \\ \sigma^{a}_{min} = 3q - p \end{cases}$$

Dễ dàng nhận thấy khi thay p = 0, q = p ta nhận được giá trị như trường hợp chịu kéo đều theo một phương.

Hình 4.26 biểu diễn sự phân bố ứng suất σ_θ /T (T là lực kéo phân bố đều song song với một cạnh của tấm) trên mép lỗ theo các góc θ.

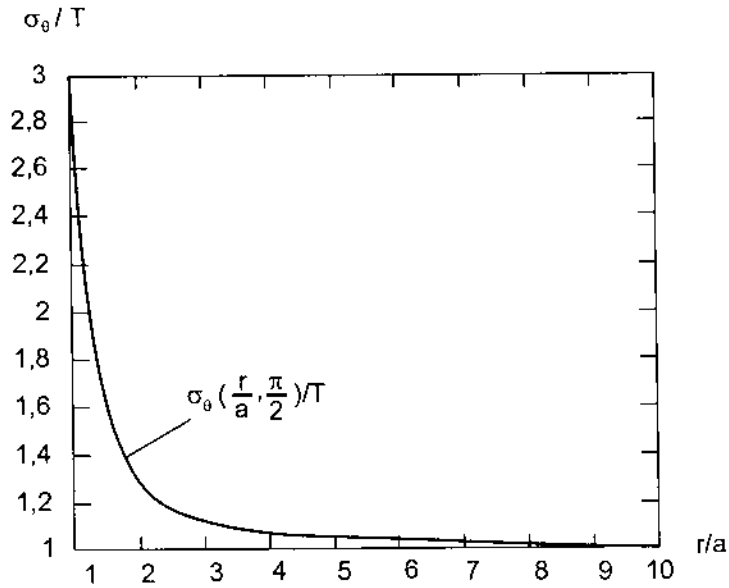
Hình 4.21 biểu diễn đồ thị ứng suất σ_0/T phụ thuộc vào tỷ số giữa khoảng cách của điểm đang xét so với giữa bán kính lỗ a.

Ta thấy khi r/a > 5 thì hiện tượng tập trung ứng suất tại mép lỗ hầu như không còn nữa.



Hình 4.20

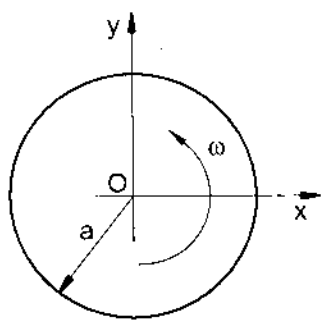
Tóm lại, hiện tượng tập trung ứng suất lại mép lỗ có ý nghĩa quan trọng đối với tính toán độ bền của kết cấu như vỏ tàu thủy, vỏ cánh hoặc thân máy bay. Để giảm hiện tượng này, người ta có thể gia cố mép lỗ bằng cách tăng cường vành đai hoặc đóng nêm vào lỗ.



Hình 4.21

4 – ĐĨA QUAY

Xét đĩa quay đều với vận tốc góc ω, bề dày đĩa không đổi và nhỏ so với bán kính a (hình 4.22). Các ứng suất gây ra do lực ly tâm. Do tính chất đối xứng nên các thành phần σ_r, σ_θ không phụ thuộc vào góc cực θ, còn $\tau_{r\theta} = 0$



Hình 4.22

Lực khối theo phương hướng kính do lực quán tính của đĩa khi quay có trị số là: $R = \rho\omega^2 r$, trong đó ρ là khối lượng riêng của đĩa, r là bán kính tại điểm bất kỳ.

Phương trình cân bằng tĩnh học theo phương hướng kính có dạng:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \qquad (4.32)$$

Nghiệm của phương trình có thể tìm dễ dàng từ hàm ứng suất φ (r), ta có:

$$\begin{cases} \sigma_r = \varphi / r \\ \sigma_\theta = \dfrac{d\varphi}{dr} + \rho\omega^2 r^2 \end{cases} \qquad (4.33)$$

Sử dụng phương trình tương thích biến dạng của Saint-Venant trong bài toán ứng suất phẳng, thay trị số của biến dạng bằng thành phần ứng suất nhờ định luật Húc, ta thu được :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = \dfrac{1}{E}(\dfrac{\varphi}{r} - \nu\dfrac{d\varphi}{dr} - \nu\rho\omega^2 r^2) \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = \dfrac{1}{E}(\dfrac{d\varphi}{dr} + \rho\omega^2 r^2 - \nu\dfrac{\varphi}{r}) \end{cases} \qquad (4.34)$$

Mặt khác ta có liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{du}{dr} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r} \\ \gamma_{r\theta} = 0 \end{cases} \qquad (4.35)$$

Khử u từ hệ thức trên và thay vào phương trình tương thích biến dạng :

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = 0 \qquad (4.36)$$

ta có:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} + (3+\nu)\rho\omega^2 r = 0 \qquad \text{hay:}$$

$$\frac{d}{dr}(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\varphi)) = -(3+\nu)\rho\omega^2 r \qquad (4.37)$$

Nghiệm của phương trình có dạng:

$\varphi = -\dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\omega^2 r^3 + \dfrac{1}{2}C_1 r + C_2\dfrac{1}{r}$, với C_1, C_2 là hằng số tích phân (4.38)

Ta tính các thành phần ứng suất:

$$\begin{cases} (\sigma_r = -\dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\omega^2 r^2 + \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{r^2} \\ \sigma_\theta = -\dfrac{(1+3\nu)}{8}\rho\omega^2 r^2 + \dfrac{C_1}{2} - \dfrac{C_2}{r^2} \end{cases}$$

Từ điều kiện tại r = 0 phải có trị số của ứng suất là hữu hạn, ta có: $C_2 = 0$, điều kiện biên tự do tại r = a cho ta:

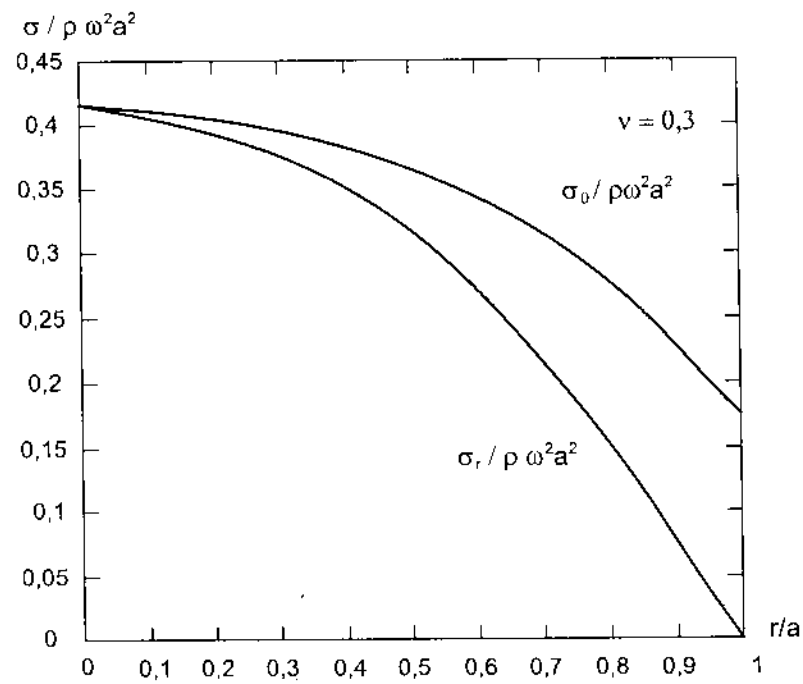
$$C_1 = \frac{(3+\nu)}{4}(\rho a^2\omega^2)$$

Biểu thức cuối cùng của ứng suất có dạng:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{(3+\nu)}{8}\rho\omega^2(a^2 - r^2) \\ \sigma_\theta = \dfrac{\rho\omega^2}{8}[(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2 \end{cases} \tag{4.39}$$

Ta nhận thấy giá trị lớn nhất của ứng suất đạt được tại tâm của đĩa (mặc dù lực khối lớn nhất tại biên của đĩa) :

$$\sigma_{max} = \sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = \frac{(3+\nu)}{8}\rho a^2\omega^2 \tag{4.40}$$

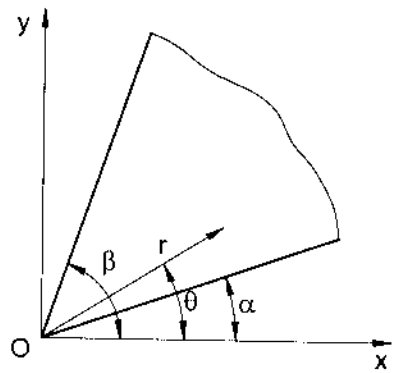


Hình 4.23

Trên hình 4.23 biểu diễn sự phân bố ứng suất theo khoảng cách đến tâm của đĩa, với hệ số Poát-xông $\nu = 0,3$.

- Đối với đĩa bán kính b, bị khoét lỗ tròn ở tâm có bán kính a, ta có ứng suất lớn nhất đạt được ở biên trong của đĩa, và khi a << b, ta có *ứng suất của đĩa rỗng gấp hai lần đĩa đặc.*

5 – NÊM PHẲNG VÀ NÁT PHẲNG NỬA VÔ HẠN



Hình 4.24

Xét nêm phẳng như hình 4.24 với góc cực $\alpha \le \theta \le \beta$. Sử dụng nghiệm tổng quát của Michell, ta chọn hàm ứng suất Airy có dạng sau:

$$\varphi = r^2 (a_2 + a_6\theta + a_{21}\cos 2\theta + b_{21}\sin 2\theta)$$

Trường ứng suất được xác định như sau:

$$\begin{cases} \sigma_r = 2a_2 + 2a_6\theta - 2a_{21}\cos 2\theta - 2b_{21}\sin 2\theta \\ \sigma_\theta = 2a_2 + 2a_6\theta + 2a_{21}\cos 2\theta + 2b_{21}\sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -a_6 - 2b_{21}\cos 2\theta + 2a_{21}\sin 2\theta \end{cases} \qquad (4.41)$$

Các ứng suất đó không phụ thuộc vào khoảng cách r. Ta có thể ứng dụng lời giải trên cho một số ví dụ cụ thể sau:

5.1. Một phần tư mặt phẳng chịu trượt trên một cạnh

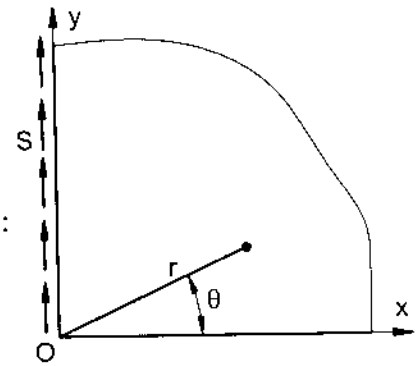
Trên hình 4.25 ta có nêm dạng một phần tư mặt phẳng chịu ứng suất trượt S trên biên $\theta = \pi/2$ và tự do tại biên $\theta = 0$.

Ta có điều kiện biên như sau:

$\sigma_\theta(r,0) = \tau_{r\theta}(r,0) = 0$

$\sigma_\theta(r,\frac{\pi}{2}) = 0$

$\tau_{r\theta}(r,\frac{\pi}{2}) = S$



Hình 4.25

Thay các giá trị của ứng suất vào, ta có :

$2a_2 + 2a_{21} = 0$

$-a_6 - 2b_{21} = 0$

$2a_2 - 2a_{21} + a_6\pi = 0$

$-a_6 + 2b_{21} = S$

Từ đó thu được : $a_2 = \frac{S\pi}{8}$; $a_6 = -\frac{S}{2}$; $a_{21} = -\frac{S\pi}{8}$; $b_{21} = \frac{S}{4}$

Vậy các thành phần ứng suất có dạng:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{S}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta + \frac{\pi}{2}\cos 2\theta - \sin 2\theta\right) \\ \sigma_\theta = \frac{S}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta - \frac{\pi}{2}\cos 2\theta + \sin 2\theta\right) \\ \tau_{r\theta} = \frac{S}{2}\left(1 - \cos 2\theta - \frac{\pi}{2}\sin 2\theta\right) \end{cases} \quad (4.42)$$

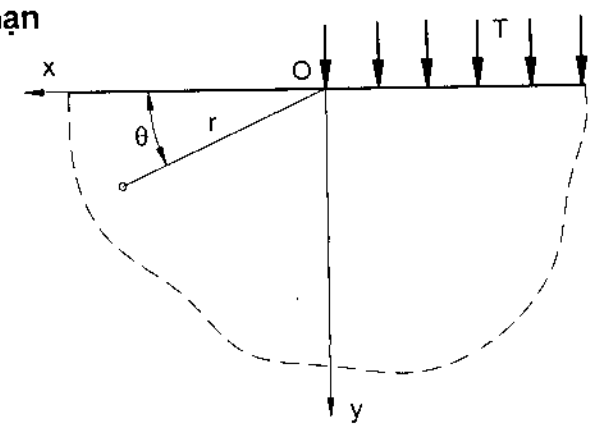
Tương tự, ta có thể tìm được ứng suất cho các trường hợp chịu lực khác:

5.2. Lát phẳng nửa vô hạn

Bài toán nêm phẳng với $\beta = \pi$ được áp dụng cho tấm vô hạn, chịu lực trên biên với cường độ T (hình 4.26).

Ta chọn hàm ứng suất Airy có dạng:

$$\varphi = a_6 r^2\theta + b_{21} r^2 \sin 2\theta$$



Hình 4.26

Khi đó các thành phần ứng suất vòng và ứng suất tiếp có dạng:

$$\sigma_\theta = 2a_6\theta + 2b_{21}\sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -a_6 - 2b_{21}\cos 2\theta$$

Áp dụng điều kiện biên:

$$\sigma_\theta(r,0) = \tau_{r\theta}(r,0) = \tau_{r\theta}(r,\pi) = 0$$

$$\sigma_\theta(r,\pi) = -T$$

Các hằng số tích phân xác định được như sau: $a_6 = -\dfrac{T}{2\pi}$; $b_{21} = \dfrac{T}{4\pi}$

Trường ứng suất có dạng sau:

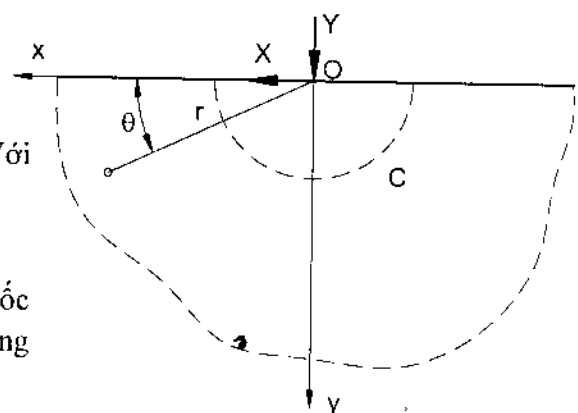
$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{T}{2\pi}(\sin 2\theta + 2\theta) \\ \sigma_\theta = \dfrac{T}{2\pi}(\sin 2\theta + 2\theta) \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{T}{2\pi}(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$$

Ta thấy có sự không liên tục về ứng suất tiếp tại gốc tọa độ. Đưa về tọa độ Đề các ta có:

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{2\pi}(1 - \cos 2\theta).$$

Với $\theta = 0$ ta có $\tau_{xy} = 0$. Với $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ có : $\tau_{xy} = -\dfrac{T}{\pi}$.

Như vậy, khi tịnh tiến đến gốc tọa độ, các ứng suất trên không trùng nhau.



Hình 4.27

Xét lát phẳng chịu lực tập trung tại gốc tọa độ (hình 4.27). Chọn hàm ứng suất có dạng:

$$\varphi = (a_{12}\, r\ln r + a_{15}\, r\theta)\cos\theta + (b_{12}\, r\ln r + b_{15}\, r\theta)\sin\theta$$

Các thành phần ứng suất tính theo công thức:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r}[(a_{12} + 2b_{15})\cos\theta + (b_{12} - 2a_{15})\sin\theta] \\ \sigma_\theta = \dfrac{1}{r}[a_{12}\cos\theta + b_{12}\sin\theta] \\ \tau_{r\theta} = \dfrac{1}{r}[a_{12}\sin\theta - b_{12}\cos\theta] \end{cases}$$

Điều kiện bằng không của ứng suất tại $\theta = 0$ và $\theta = \pi$ cho ta $a_{12} = b_{12} = 0$, do đó : $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \forall r, \theta$, ta gọi đây là trường hợp ứng suất *phân phối hướng kính*, đặc biệt có thể áp dụng cho nêm phẳng với các góc α, β bất kỳ. Để xác định các hằng số a_{15}, b_{15} ta sử dụng phương trình cân bằng các thành phần của ngoại lực tác dụng trên nửa hình tròn C bán kính a:

$$X = -\int_0^\pi \sigma_r(a,\theta) a\cos\theta d\theta = -\pi b_{15}$$

$$Y = -\int_0^\pi \sigma_r(a,\theta) a\sin\theta d\theta = \pi a_{15}$$

Từ đó : $a_{15} = \dfrac{Y}{\pi}$; $b_{15} = -\dfrac{X}{\pi}$ và ứng suất có dạng :

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2}{\pi r}(X\cos\theta + Y\sin\theta) \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad \text{tại gốc tọa độ ứng suất } \sigma_r \neq 0$$

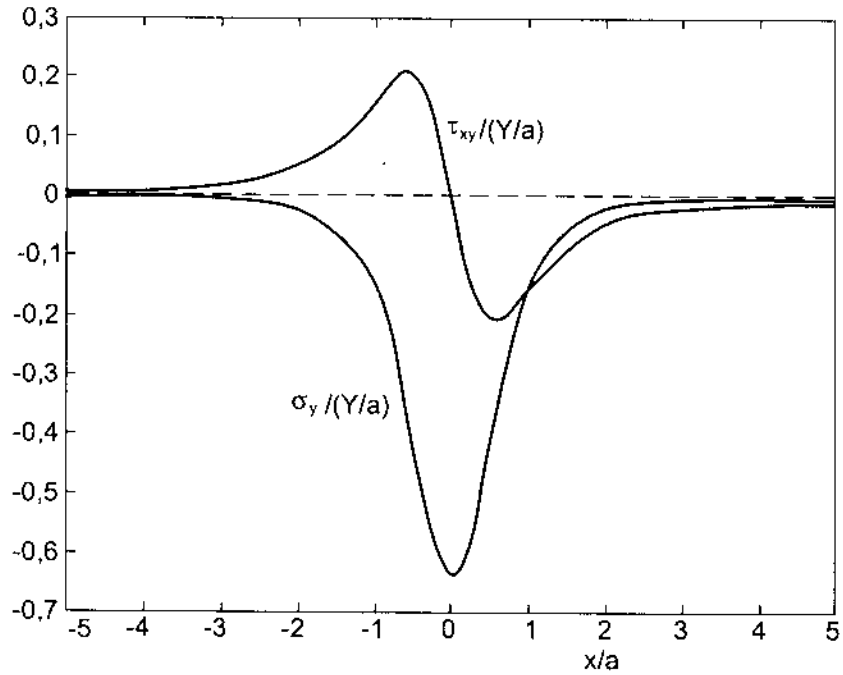
Xét trường hợp lực tác dụng theo phương thẳng đứng (X = 0), ta có:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2}{\pi r} Y\sin\theta \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

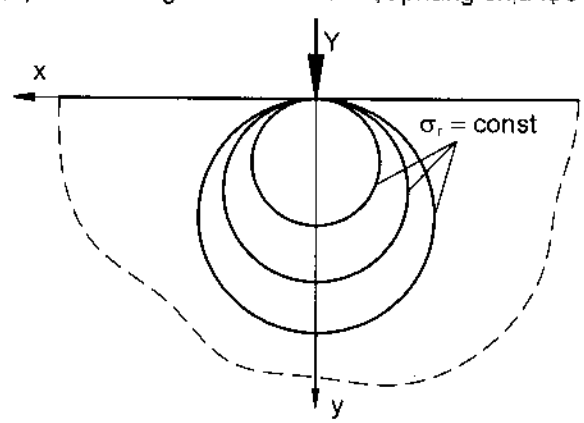
Chuyển sang tọa độ Đề-các, ta có:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_r\cos^2\theta = -\dfrac{2Yx^2y}{\pi(x^2+y^2)^2} \\ \sigma_y = \sigma_r\sin^2\theta = -\dfrac{2Yy^3}{\pi(x^2+y^2)^2} \\ \tau_{xy} = \sigma_r\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{2Yxy^2}{\pi(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

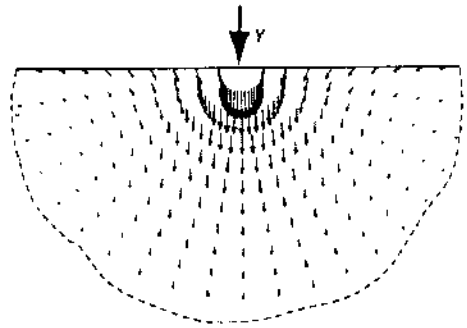
Trên hình 4.28 biểu diễn đồ thị của các ứng suất phụ thuộc tỷ lệ x/a, ta thấy khi $|x/a| \geq 5$, ứng suất tiến dần đến không.



Hình 4.28. Sự phân bố ứng suất của nửa mặt phẳng chịu lực tập trung



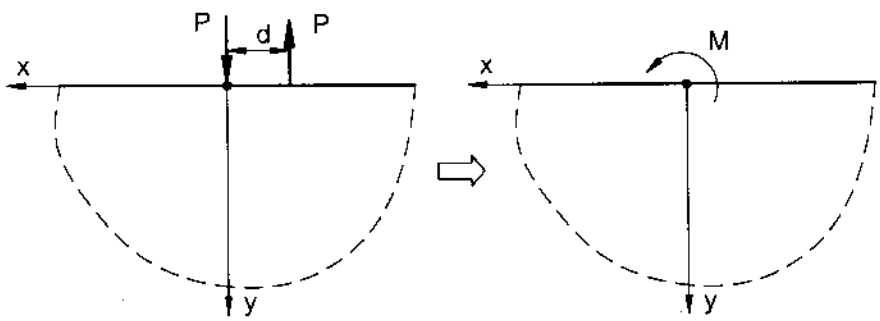
Hình 4.29. Đường đồng mức ứng suất



Hình 4.30. Véctơ chuyển vị

Trường hợp tấm nửa vô hạn chịu mômen tập trung tại gốc tọa độ có thể coi như lực P đặt cách O khoảng cách d (hình 4.30). Các thành phần ứng suất trong trường hợp này có dạng sau:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{4M}{\pi r^2}\sin\theta\cos\theta \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{2M}{\pi r^2}\sin^2\theta \end{cases}$$



Hình 4.31

5.3. Nêm chịu lực tập trung và mômen tập trung tại đỉnh

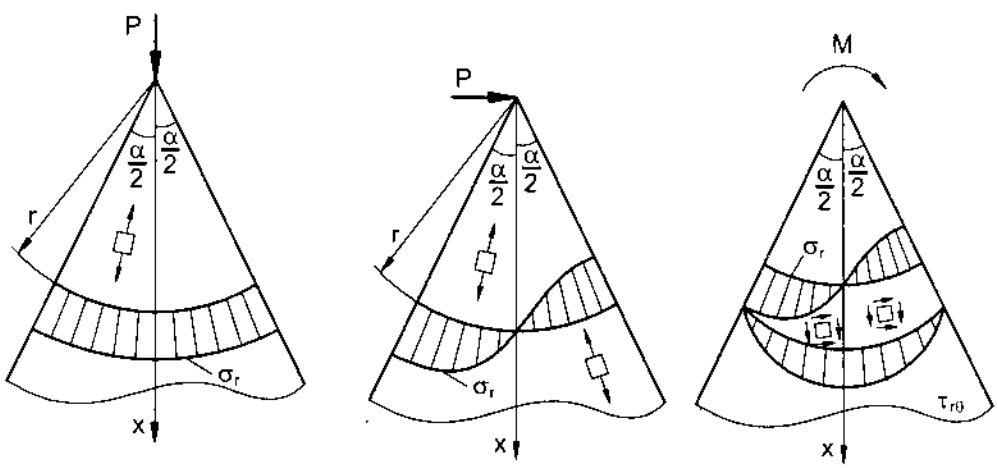
Ứng dụng các kết quả từ mục trên, ta có thể thu được trường ứng suất trong nêm phẳng đối xứng với góc ở đỉnh là α, chịu tác dụng của lực tập trung hoặc mômen tập trung:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P}{r}\dfrac{\cos\theta}{\alpha+\sin\alpha} \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$ khi lực P tác dụng theo phương thẳng đứng tại đỉnh (hình 4.32a).

$$\begin{cases} \sigma_r = -\dfrac{2P}{r}\dfrac{\sin\theta}{\alpha+\sin\alpha} \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$ khi lực P tác dụng theo phương vuông góc với trục nêm (hình 4.32b).

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{2M}{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\theta}{r^2} \\ \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = -\dfrac{M}{r^2}\cdot\dfrac{\cos 2\theta-\cos\alpha}{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha} \end{cases}$$ khi mômen M đặt tại đỉnh nêm (hình 4.32c)

Hình 4.32 biểu diễn sự phân bố ứng suất trong nêm ở các trường hợp trên.



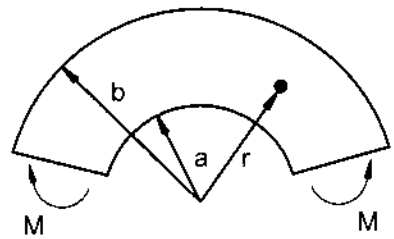
Hình 4.32

6 – THANH CONG

Xét thanh cong bán kính trong a, bán kính ngoài b, chịu mômen tập trung tại hai đầu thanh (hình 4.33).

Từ điều kiện biên :

$$\begin{cases} \sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0 \\ \tau_{r\theta}(a) = \tau_{r\theta}(b) = 0 \\ \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M \\ \int_a^b \sigma_\theta dr = 0 \end{cases}$$



Hình 4.33

Sử dụng nghiệm của bài toán đối xứng (4.15), ta tìm các hệ số từ hệ phương trình:

$$2A\ln a + \frac{C}{a^2} + A + 2B = 0$$

$$2A\ln b + \frac{C}{b^2} + A + 2B = 0$$

$$b(2A\ln b + \frac{C}{b^2} + A + 2B) - a(2A\ln a + \frac{C}{a^2} + A + 2B) = 0$$

$$-C\ln(\frac{b}{a}) + A(b^2\ln b - a^2\ln a) + B(b^2 - a^2) = -M$$

Chú ý rằng, biểu thức thứ 3 là tổ hợp tuyến tính của hai biểu thức đầu, ta giải ra tìm được các hệ số:

$$A = -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2)$$

$$B = \frac{M}{N}[b^2 - a^2 + 2(b^2\ln b - a^2\ln a)]$$

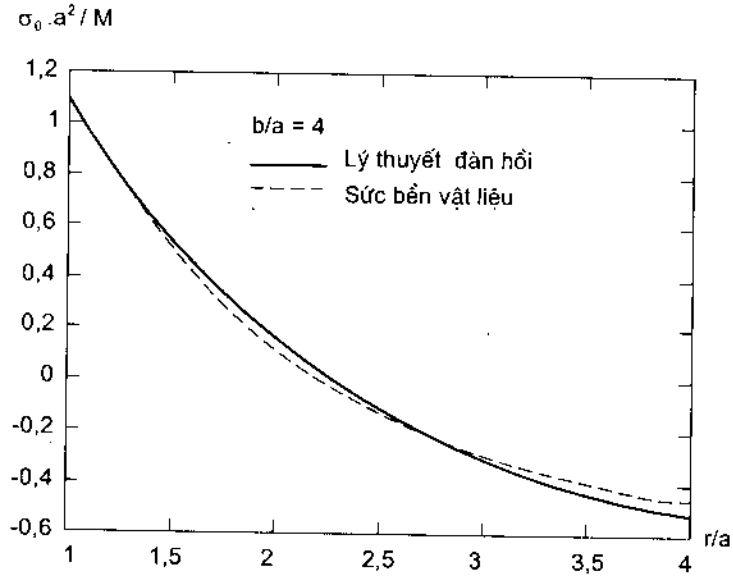
$$C = -\frac{4M}{N}a^2b^2\ln(\frac{b}{a})$$

với: $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2\ln^2(\frac{b}{a})$

Trường ứng suất cuối cùng có dạng:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N}[\frac{a^2b^2}{r^2}\ln(\frac{b}{a}) + b^2\ln(\frac{r}{b}) + a^2\ln(\frac{a}{r})] \\ \sigma_\theta = -\frac{4M}{N}[-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln(\frac{b}{a}) + b^2\ln(\frac{r}{b}) + a^2\ln(\frac{a}{r})] \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Trên hình 4.34 là đồ thị ứng suất phụ thuộc tỷ số r/a với b/a = 4 theo công thức Sức bền vật liệu và theo Lý thuyết đàn hồi, ta thấy giá trị lớn nhất của ứng suất vòng đạt được tại bán kính trong, kết quả theo hai lý thuyết gần như trùng nhau.



Hình 4.34

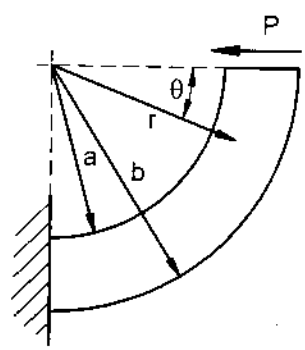
Trường hợp thanh cong chịu lực P tại đầu thanh (hình 4.35).

Điều kiện biên tương tự như trên:

$$\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0$$

$$\tau_{r\theta}(a) = \tau_{r\theta}(b) = 0$$

$$\begin{cases} \int_a^b \tau_{r\theta}(r,0)dr = P; \ \int_a^b \sigma_\theta(r,\frac{\pi}{2})dr = -P \\ \int_a^b \tau_{r\theta}(r,\frac{\pi}{2})dr = 0 \\ \int_a^b \sigma_\theta(r,0)rdr = \int_a^b \sigma_\theta(r,0)dr = 0 \\ \int_a^b \sigma_\theta(r,\frac{\pi}{2})rdr = \frac{P(a+b)}{2} \end{cases} \quad (*)$$



Hình 4.35

Hàm ứng suất chọn từ nghiệm tổng quát của Michell phụ thuộc vào góc θ nên có dạng:

$$\varphi = (Ar^3 + \frac{B}{r} + Cr + Dr\ln r)\sin\theta$$

Ta tính các ứng suất:

$$\begin{cases} \sigma_r = (2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r})\sin\theta \\ \sigma_\theta = (6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r})\sin\theta \\ \tau_{r\theta} = -(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r})\cos\theta \end{cases}$$

Thay vào (*) và giải hệ, ta tìm được các hệ số:

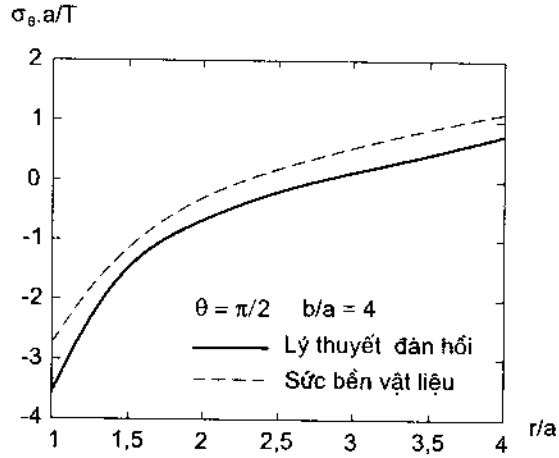
$$A = \frac{P}{2N}\ ;\ B = -\frac{Pa^2b^2}{2N}\ ;\ D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2)$$

Với: $N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2)\ln(\frac{b}{a})$

Các thành phần ứng suất có dạng cuối cùng:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r})\sin\theta \\ \sigma_\theta = \frac{P}{N}(3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r})\sin\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r})\cos\theta \end{cases}$$

Hình (4.36) biểu diễn đồ thị ứng suất tại ngàm ($\theta = \pi/2$, $b/a = 4$) và so sánh với sức bền vật liệu, ta thấy có sự sai khác giữa hai lý thuyết và ứng suất càng tăng khi r càng lớn.



Hình 4.36

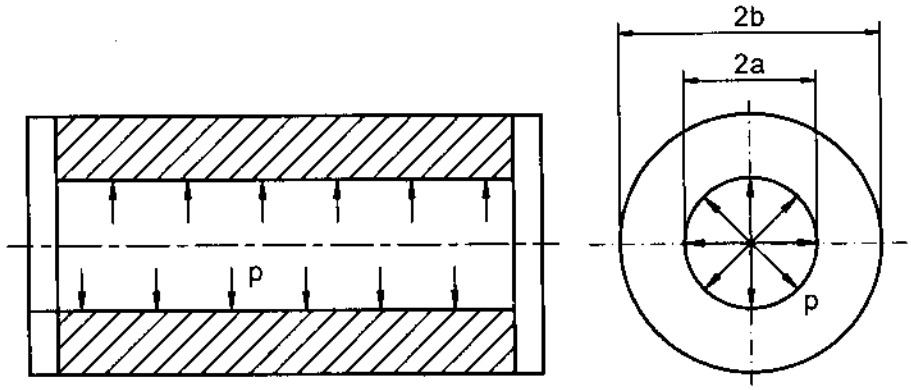
BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1. Một ống thép đường kính ngoài bằng 5cm, thành dày 5mm, chịu áp suất phân bố đều bên trong. Dựa vào thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, tính giá trị cho phép lớn nhất của áp suất, biết rằng thép có $[\sigma] = 160MN/m^2$.

4.2. Một ống dày bằng thép, đường kính trong bằng 20mm, chịu áp suất bên trong $P_a = 25kN/cm^2$. Xác định bề dày ống theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng, biết rằng $\sigma_{ch} = 65kN/cm^2$, hệ số an toàn bằng 1,3.

4.3. Một ống dày chịu áp suất bên trong P_a và bên ngoài $P_b = 0,1kN/cm^2$ (với giả thiết $P_a > P_b$). Xác định P_a, độ biến dạng dài của bán kính trong và bán kính ngoài. Biết ống dày có bán kính trong bằng 4cm, bán kính ngoài bằng 8cm. Ống làm bằng vật liệu có các đặc trưng cơ học sau: $[\sigma]_k = 3kN/cm^2$; $[\sigma]_n = 12kN/cm^2$; $E = 1,2.10^4kN/cm^2$; $\nu = 0,24$.

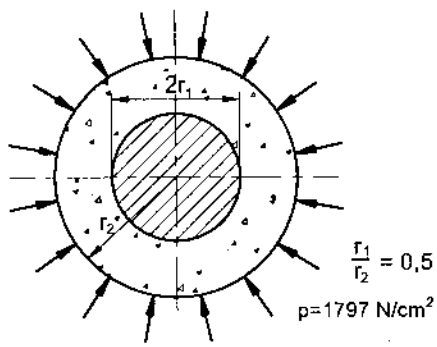
4.4. Cho một ống dày bịt kín ở hai đầu (hình 4.37) với a = 10cm, $p = 20N/cm^2$. Ống bằng thép có ứng suất cho phép $[\sigma] = 16kN/cm^2$, $E = 1.10^4kN/cm^2$ và $\nu = 0,3$. Hãy xác định bán kính ngoài b để đảm bảo độ bền của ống. Xác định chuyển vị tại các điểm trên bề mặt ngoài ống với giá trị b tìm được ở trên. Kết quả tính toán thay đổi như thế nào khi ống hở hai đầu. Khi tính độ bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.



Hình 4.37

4.5. Xác định áp lực P_0 giữa ống bêtông và lõi thép tuyệt đối cứng (hình 4.38), sau đó kiểm tra độ bền của ống theo thuyết bền Mohr. Biết bêtông có các đặc trưng sau:

$E_{bt} = 2.10^7 N/cm^2$, $\nu = 0,16$; $[\sigma]_k = 40kN/cm^2$; $[\sigma]_n = 200kN/cm^2$.



Hình 4.38

4.6. Người ta ghép căng một ống thép có đường kính trong 2a = 20mm và đường kính ngoài 2c = 30mm với một ống thép khác có đường kính ngoài 2b = 40mm. Cả ống ghép chịu áp suất bên trong $p = 25kN/cm^2$. Tính độ dôi Δ giữa hai ống ghép sao cho ứng suất σ_θ ở mép trong của ống ghép giảm đi 30% so với ứng suất σ_θ ở mép trong của ống đơn có cùng kích thước. Môđun đàn hồi của thép $E = 2.10^7 N/cm^2$.

4.7. Một ống đồng bán kính trong a = 10cm và bán kính ngoài c = 20cm, đặt vào trong một ống thép có bán kính ngoài b = 40cm (hình 4.39). Tính ứng suất pháp tại các điểm A, B, C theo 3 trường hợp sau:

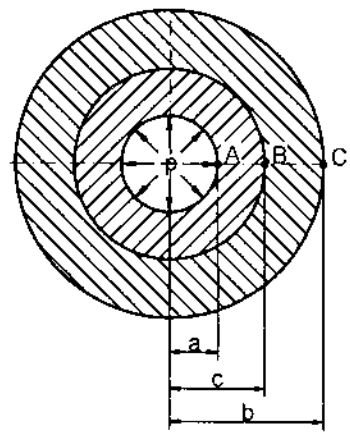
a) Hai ống được lồng khít vào nhau và chịu áp lực bên trong $p = 20N/cm^2$

b) Hai ống được ghép vào nhau với độ dôi $\Delta = 0,2mm$ và cùng chịu áp suất bên trong $p = 20N/cm^2$

c) Hai ống được ghép vào nhau với độ dôi $\Delta = 0,2mm$ và toàn bộ bị đốt nóng lên $\Delta T^0 = 100^0C$.

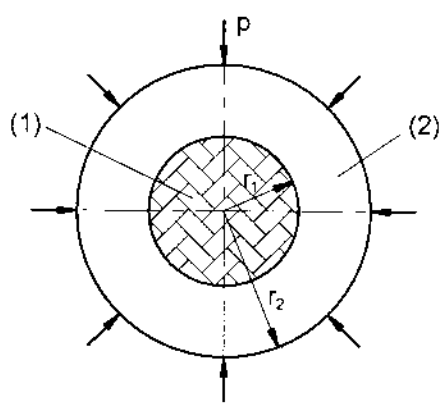
Đối với đồng: $E_đ = 1.10^4 kN/cm^2$, $\nu_đ = 0,34$, $\alpha_đ = 16,5.10^{-6}$.

Đối với thép: $E_{th} = 2.10^4 kN/cm^2$, $\nu_{th} = 0,3$, $\alpha_{th} = 12,5.10^{-6}$



Hình 4.39

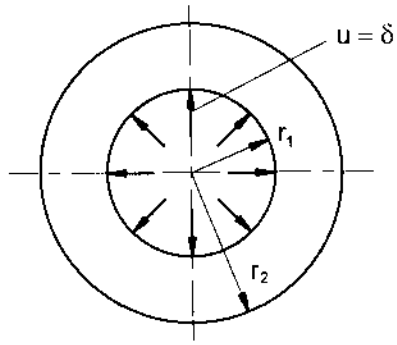
4.8. Hai ống làm từ hai vật liệu khác nhau được lồng khít vào nhau và chịu áp lực phân bố đều bên ngoài p như hình 4.40. Giả thiết mối ghép là lý tưởng và ứng suất, biến dạng là liên tục tại $r = r_1$. Xác định trường ứng suất và chuyển vị tại mỗi ống. Cho biết E_1, ν_1, E_2, ν_2.



Hình 4.40

4.9. Một ống hình trụ tuyệt đối cứng có bán kính $r_1 + \delta$ được lồng khít vào một ống dày có bán kính trong r_1, bán kính ngoài r_2 (hình 4.41). Mặt ngoài của ống

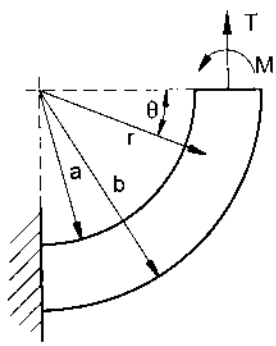
không chịu lực. Điều kiện biên tại $r = r_1$ là chuyển vị bằng δ. Giả thiết trạng thái biến dạng phẳng. Xác định trường ứng suất và chuyển vị của ống ($r_1 < r < r_2$).



Hình 4.41

4.10. Hãy chỉ ra rằng với thanh cong chịu lực như hình 4.42 có thể tìm được nghiệm, sử dụng hàm ứng suất có dạng:

$$\varphi = [A r^3 + \frac{B}{r} + C r + D r \ln r]\cos\theta$$



Hình 4.42

Chương 5

BÀI TOÁN ĐỐI XỨNG TRỤC

1 – LÝ THUYẾT VỀ TẤM MỎNG

1.1. Khái niệm

Tấm là một kết cấu được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song và cách nhau một khoảng t (gọi là chiều dày tấm). Mặt trung gian là mặt phẳng cách đều mặt phẳng tấm. Tùy theo tỷ số giữa bề dày tấm và kích thước nhỏ nhất của mặt phẳng tấm ($\frac{t}{b}$) mà người ta có thể chia tấm thành hai loại sau:

Tấm dày: $\frac{t}{b} \geq \frac{1}{5}$

Tấm mỏng: khi $\frac{1}{20} \leq \frac{t}{b} \leq \frac{1}{5}$ và điều kiện độ võng lớn nhất: $w_{max} \leq \frac{t}{4}$

Các giả thuyết cơ bản:

– Giả thuyết Kirchoff: Phần tử thẳng và vuông góc với mặt trung gian trước biến dạng, thì sau biến dạng vẫn thẳng và vuông góc với mặt trung gian bị uốn cong (mặt đàn hồi).

– Các điểm thuộc mặt trung gian chỉ có chuyển vị theo phương vuông góc với mặt tấm ($u = v = 0$; $w \neq 0$).

– Các lớp song song với mặt trung gian vẫn tiếp tục song song với mặt đó sau khi bị biến dạng (hay nói cách khác, ta giả thiết $\sigma_z = 0$, do đó trạng thái ứng suất là phẳng).

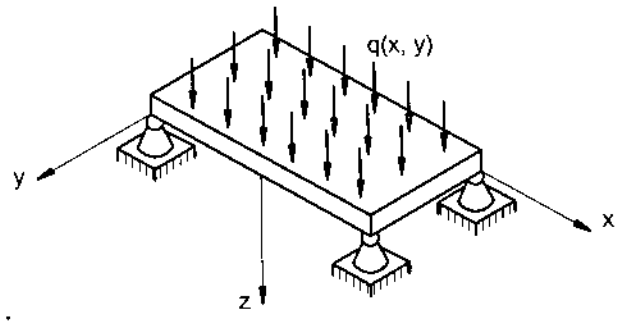
1.2. Các phương trình cơ bản

a) Liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị

Xét tấm chữ nhật có kích thước a × b, chiều dày là t, chịu tải trọng vuông góc với mặt tấm (hình 5.1). Gọi chuyển vị tại điểm A cách mặt trung

gian khoảng cách bằng z là u, v và w. Khi đó ta có tương tự như trường hợp dầm chịu uốn trong Sức bền vật liệu:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} \quad \text{và} \quad \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y} \tag{5.1}$$

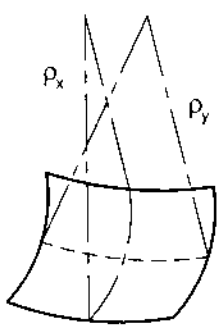


Hình 5.1

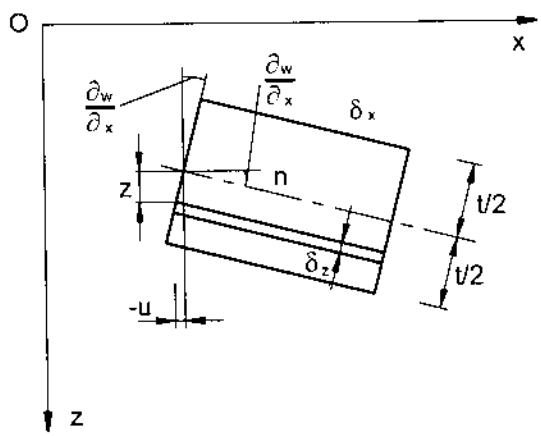
Trong đó ρ_x và ρ_y là bán kính cong của mặt trung gian theo phương x và y (hình 5.2).

$$\rho_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{và} \quad \rho_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{5.2}$$

Thay (5.2) vào (5.1) ta được liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị (hình 5.3):



Hình 5.2



Hình 5.3

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{z}{\rho_x} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \\ \varepsilon_y = \dfrac{z}{\rho_y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (5.3)$$

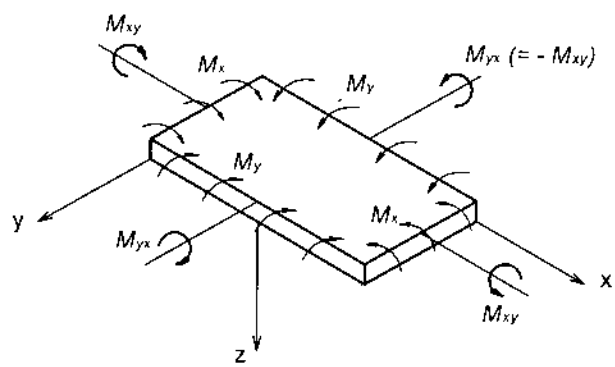
b) Liên hệ giữa biến dạng và ứng suất

Theo định luật Húc:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases} \quad (5.4)$$

c) Liên hệ giữa ứng suất và nội lực

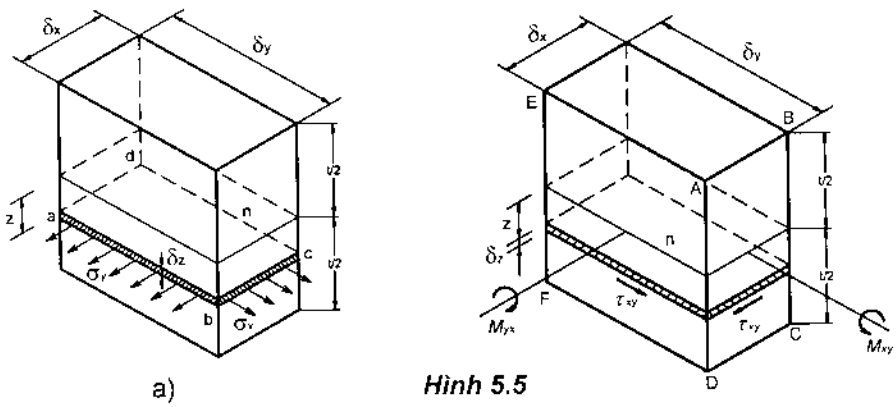
Gọi Q_x, Q_y là lực cắt, M_x, M_y là mômen uốn, và $M_{xy} = M_{yx}$ là mômen xoắn trên một đơn vị chiều dài của cạnh vuông góc với trục x, y (hình 5.4).



Hình 5.4

Xét phân tố của tấm có chiều dày δz, cách mặt trung gian một khoảng z, ta có liên hệ giữa nội lực và ứng suất như sau (hình 5.5):

$$
\begin{cases}
M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \\
M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \\
M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \\
Q_x = \int_{t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \\
Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz
\end{cases}
\qquad (5.5)
$$



a) **Hình 5.5** b)

a) Ứng suất pháp; b) Ứng suất tiếp

d) Liên hệ giữa nội lực và chuyển vị

Kết hợp (5.3), (5.4) & (5.5) ta được:

$$
\begin{aligned}
M_x &= D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
M_y &= D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (5.6) \\
M_{xy} &= D(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
$$

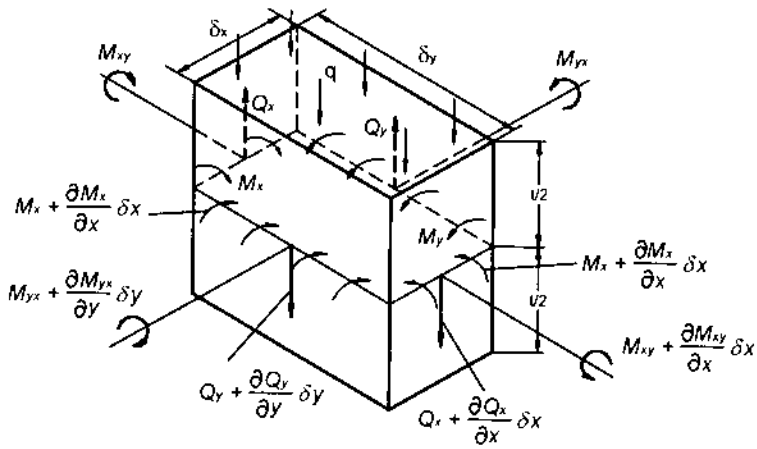
Trong đó: D là độ cứng chống uốn của tấm.

$$D = \frac{Et^3}{12\left(1 - v^2\right)}$$

với E là môđun đàn hồi, v là hệ số Poisson.

e) Phương trình cân bằng tĩnh học

Gọi q(x,y) là tải trọng phân bố vuông góc với mặt tấm (trong đó kể đến trọng lượng của tấm), lấy tổng hình chiếu theo phương z, và tổng mômen đối với trục x, y của các lực tác dụng lên phân tố cách mặt trung gian một khoảng là z (hình 5.6), ta có hệ phương trình cân bằng tĩnh học:



Hình 5.6. Trạng thái chịu lực của một phần tử tấm

$$\begin{cases} \sum F_i / z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial Q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \\ \sum m_x(F_i) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \dfrac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \\ \sum m_y(F_i) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \dfrac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = 0 \end{cases} \qquad (5.7)$$

g) Phương trình Sophie – Jermain

Từ (5.7) rút Q_x, Q_y ra từ hai phương trình cuối ta được:

$$\begin{cases} Q_x = \dfrac{\partial M_x}{\partial x} - \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} \\ Q_y = \dfrac{\partial M_y}{\partial y} - \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{cases}$$

Thay M_x, M_y, M_{xy} từ (5.6) theo w rồi thế Q_x, Q_y vào phương trình đầu tiên của (5.1.7), và ta được phương trình vi phân độ võng của tấm như sau:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial^4 x} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial^4 y} = \frac{q}{D} \qquad (5.8)$$

Hay : $\Delta\Delta w = \dfrac{q}{D}$ (5.8')

Với Δ là toán tử Laplace trong tọa độ Đề các

Trên đây là các phương trình cơ bản về lý thuyết tấm, để giải các bài toán cụ thể cần thêm vào các điều kiện biên.

1.3. Điều kiện biên

a) Tấm tựa tự do (Simply supported Edge)

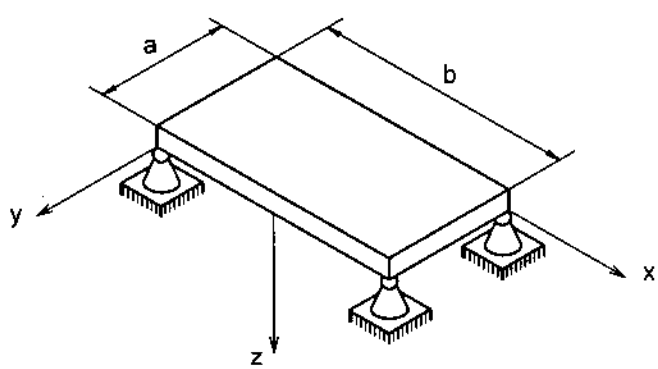
Trên cạnh có gối đỡ (hình 5.7), độ võng và mômen uốn phải bằng không.

Giả sử cạnh x = 0 tựa khớp, ta có:

$$w\big|_{x=0} = 0 \ ; \ M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0,$$

Mặt khác do w(0,y) = 0 nên $\left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{x=0} = 0$

Vậy điều kiện biên là: $w\big|_{x=0} = 0 \ ; \left.\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0$ (5.9)



Hình 5.7

b) Biên ngàm (Clamped Edge)

Độ võng và góc xoay phải bằng không :

$$x = 0 \quad w\Big|_{x=0} = 0; \ \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \qquad (5.10)$$

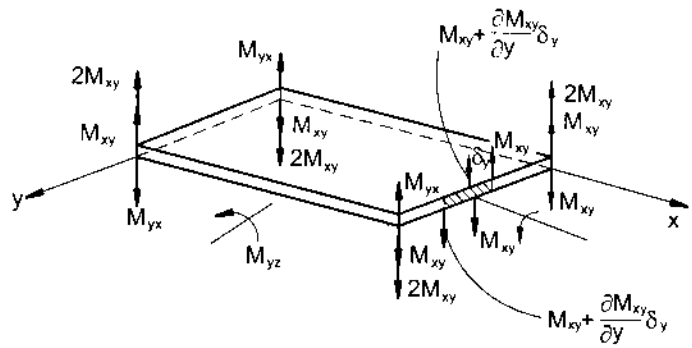
c) Biên tự do

Lực cắt, mômen uốn và mômen xoắn đều bằng không:

Nếu tại x = 0 không có liên kết, ta có: $M_x = 0$; $Q_x = 0$; $M_{xy} = 0$

Hai điều kiện biên cuối có thể sát nhập theo điều kiện Kirchoff như sau: xét hai đoạn kề nhau dọc theo cạnh của tấm mỏng như hình 5.8. Mômen xoắn trên phân tố thứ nhất là $M_{xy}dy_1$ và trên phân tố thứ hai là :

$$(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta y)dy_2$$



Hình 5.8

Các mômen trên có thể thay bằng cặp lực cắt như hình vẽ trên. Theo liên hệ vi phân giữa lực phân bố và lực cắt ở giữa hai phân tố, lực cắt Q_x phải cân bằng với cường độ $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta y$, đó chính là hợp lực của tải trọng phân bố $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$

Vậy : $Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$

Điều kiện biên tại cạnh tự do x = 0 là :

$$M_x = 0; \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0;$$

$$Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0; \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = 0 \qquad (5.11)$$

1.4. Các phương pháp để giải bài toán tấm mỏng hình chữ nhật

a) Lời giải Navier (Phương pháp Búp-nốp & Galerkin)

Xét tấm mỏng hình chữ nhật, kích thước a × b chịu tải trọng phân bố q(x,y), có các biên tựa khớp.

Phương trình vi phân độ võng có dạng (5.8):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial^4 x} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial^4 y} = \frac{q}{D}$$

Chọn lời giải dưới dạng chuỗi Fourier:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad (5.12)$$

Thoả mãn điều kiện biên w = 0, $M_x = 0$, $M_y = 0$. Trong đó: A_{mn} là các hằng số chưa biết.

Phân tích hàm tải trọng cũng dưới dạng chuỗi Fourier:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad (5.13)$$

Với a_{mn} là hằng số cần xác định để thỏa mãn phương trình (5.8)

Nhân hai vế của (5.13) với $\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)$, sau đó lấy tích phân theo biến x trên [0, a], biến y trên [0, b], ta có:

$$\int_0^a dx \int_0^b q(x,y)\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)dy =$$

$$= \sum_m \sum_n \int_0^a dx \int_0^b a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)dy \qquad (5.14)$$

Theo tính chất trực giao của hàm số lượng giác:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right)dx = \begin{cases} 0 & ; m \neq m' \\ \frac{a}{2} & ; \ m = m' \end{cases} \tag{5.15}$$

Tương tự ta có:

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)dy = \begin{cases} 0 & ; n \neq n' \\ \frac{b}{2} & ; \ n = n' \end{cases} \tag{5.16}$$

Vậy (5.14) có dạng:

$$\int_0^a dx \int_0^b q(x,y)\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)dy =$$

$$= \sum_m \sum_n \int_0^a dx \int_0^b a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m'\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n'\pi y}{b}\right)dy = \frac{ab}{4}$$

Rút ra: $$a_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a dx \int_0^b q(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy \tag{5.17}$$

Thay (5.12) và (5.13) vào (5.8), đồng nhất các hệ số của hai vế đối với hàm sin, ta có:

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \text{ với m, n lẻ} \tag{5.18}$$

Thay vào (5.12) ta tìm được phương trình độ võng của tấm. Từ đó tìm được nội lực và ứng suất của tấm để có thể kiểm tra điều kiện bền, xác định tải trọng cho phép tác dụng lên tấm, hoặc chọn kích thước cho phép của tấm.

Trong trường hợp tải trọng $q = q_o =$ const vuông góc với mặt tấm. Thay vào (5.17) ta có:

$$a_{mn} = \frac{4q_o}{ab}\int_0^a dx \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy \tag{5.19}$$

với m, n lẻ ta được: $$a_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \tag{5.20}$$

Tương tự như trên, có thể xác định được hàm độ võng của tấm chịu tải trọng q(x,y) là hàm số cho trước. Từ đó có thể xác định được ứng suất của tấm để kiểm tra điều kiện bền, xác định tải trọng cho phép, hoặc chọn kích thước của tấm :

$$\sigma_x = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (5.21)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

b) Phương pháp năng lượng để giải bài toán tấm

Ta có theo nguyên lý cộng tác dụng, năng lượng toàn phần của tấm bằng tổng thế năng do ngoại lực và nội lực gây nên:

$$U_{\text{toàn phần}} = U_{\text{nội lực}} + U_{\text{ngoại lực}} \qquad (5.22)$$

Dùng nguyên lý giá trị dừng của thế năng biến dạng đàn hồi:

Điều kiện để hệ được cân bằng là: $\dfrac{\partial U}{\partial A_i} = 0$ (5.23)

+ Thế năng biến dạng đàn hồi do nội lực M_x, M_y, M_{xy}.

$$dU^{(M_x)} = \frac{1}{2}M_x\delta\varphi dxdy$$

$$= \frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dxdy$$

$$dU^{(M_y)} = \frac{1}{2}M_y\delta\varphi dxdy$$

$$= \frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)dxdy \qquad (5.24)$$

$$dU^{(M_{xy})} = \frac{1}{2}M_{xy}\delta\varphi dxdy$$

$$= D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}dxdy$$

$$dU = dU^{(M_x)} + dU^{(My)} + dU^{(M_{xy})} \tag{5.25}$$

$$U^{(noi\,luc)} = \int_0^a \int_0^b dU \tag{5.26}$$

+ Biến dạng đàn hồi do ngoại lực sinh ra:

$$dU^{(ngoai\,luc)} = -\frac{1}{2} q.w.dxdy \tag{5.27}$$

$$\Rightarrow U^{(ngoai\,luc)} = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b q(x,y).w.dxdy \tag{5.28}$$

Ta có tổng thế năng biến dạng đàn hồi của tấm xác định theo công thức:

$$U^{(toan\,phan)} = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-v) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{2D} q.w \right\} dxdy \tag{5.29}$$

Đối với tấm chữ nhật a × b, biên tựa khớp; tải trọng đều $q = q_o = const$ vuông góc với mặt tấm, ta có phương trình của độ võng như trên đã xác định có dạng (5.12). Từ đó thay vào công thức của thế năng biến dạng toàn phần (5.29), và tính đạo hàm theo hệ số A_{mn}:

$$\frac{\partial U}{\partial A_{mn}} = 0$$

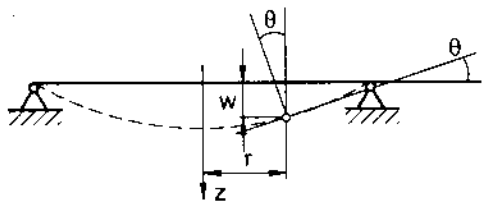
Ta tim được kết quả giống như phương pháp Buvnop-Galerkin:

$$A_{mn} = \frac{16 q_0}{\pi^6 Dmn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m, n \text{ lẻ}) \tag{5.30}$$

Ngoài các phương pháp kể trên còn có các phương pháp khác như phương pháp Ritz, phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp phần tử biên.

2 – TẤM TRÒN CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG TRỤC

2.1. Liên hệ giữa độ võng, góc xoay



Hình 5.9

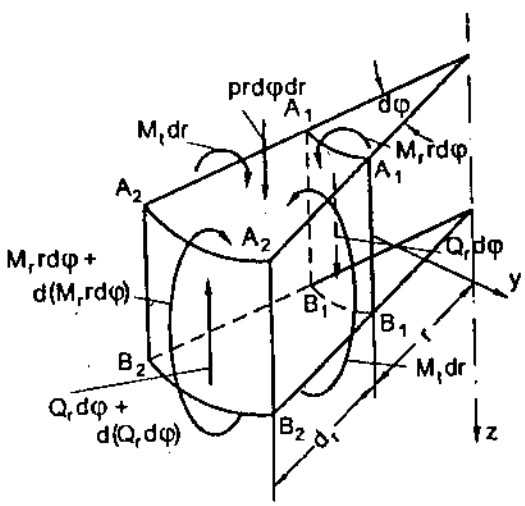
Từ hình vẽ 5.9, ta có góc xoay tại mặt cắt bất kỳ cách tâm của tấm khoảng cách r được tính theo công thức sau:

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial r} \qquad (5.31)$$

Dấu trừ biểu thị độ võng là hàm nghịch biến theo r, và khi độ võng đạt trị số lớn nhất thì góc xoay bằng không (tiếp tuyến với mặt trung gian song song với trục x).

2.2. Liên hệ giữa nội lực, ứng suất

Xét một phân tố tách ra từ tấm tròn (hình 5.10) nội lực trên các mặt của phân tố xác định theo công thức:



Hình 5.10

$$M_r = D\left(\frac{d\theta}{dr} + \nu\frac{\theta}{r}\right) = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right)$$

$$M_t = D\left(\frac{\theta}{r} + \nu\frac{d\theta}{dr}\right)$$

$$= -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) \qquad (5.32)$$

$$M_{rt} = 0; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (5.33)$$

D là độ cứng chống uốn của tấm.

2.3. Liên hệ giữa biến dạng, chuyển vị

Từ công thức biến dạng trong tọa độ độc cực (chương 4) ta có các thành phần biến dạng theo phương bán kính và phương vòng như sau:

$$\varepsilon_r = z\frac{d\theta}{dr} = -z\frac{d^2w}{dr^2};$$

$$\varepsilon_t = z\frac{\theta}{r} = -z\frac{dw}{rdr} \qquad (5.34)$$

z là khoảng cách từ điểm đang xét đến mặt trung bình của tấm.

2.4. Liên hệ giữa ứng suất, chuyển vị

Thay các biến dạng từ (5.34) vào định luật Húc, ta thu được:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d\theta}{dr} + \nu\frac{\theta}{r}\right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)\\ \sigma_t &= \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\theta}{r} + \nu\frac{d\theta}{dr}\right) = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (5.35)$$

Liên hệ giữa ứng suất và mômen uốn:

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3}.z \; ; \qquad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3}.z \qquad (5.36)$$

z là khoảng cách từ điểm đang xét đến mặt trung gian.

2.5. Phương trình vi phân độ võng

Lấy tổng mômen đối với trục y tiếp tuyến với cung tròn bán kính r trong mặt phẳng trung gian của tấm (hình 5.11), ta có:

$$M_t - \frac{d(M_r.r)}{dr} = Qr \tag{5.37}$$

$$r\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{d\theta}{dr} - \frac{\theta}{r} = \frac{Qr}{D}$$

hay:

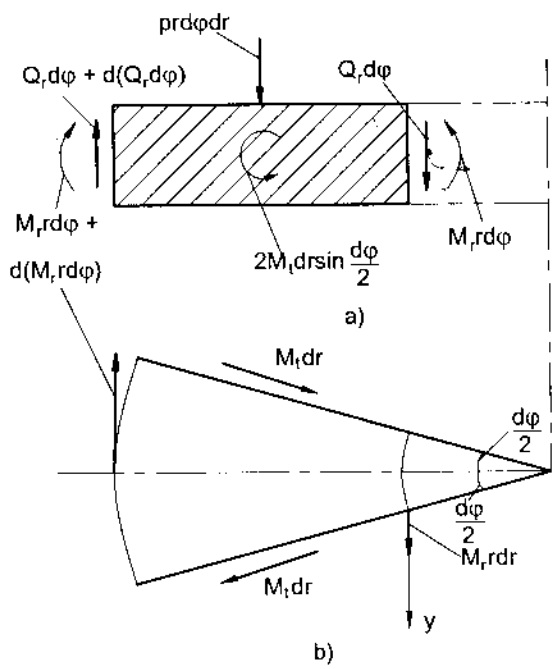
$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(\theta.r)}{dr}\right] = -\frac{Q}{D} \tag{5.38}$$

Tích phân 2 lần liên tiếp (5.38) ta được phương trình của góc xoay và độ võng tại điểm bất kỳ:

$$\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr}\int\left[r\int Qdr\right]dr \tag{5.39}$$

$$w = C_3 - \int\theta dr \tag{5.40}$$

Các hằng số tích phân C_1, C_2, C_3 được xác định từ điều kiện biên hoặc liên tục của bài toán (ví dụ tấm tròn đặc thì C_2 phải bằng không để độ võng và góc xoay là hữu hạn).

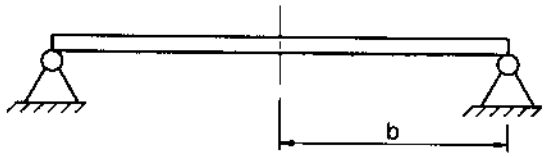


Hình 5.11

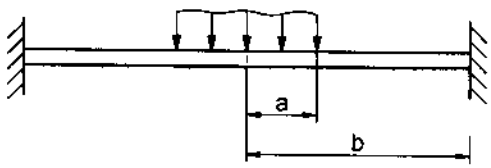
2.6. Các điều kiện biên

a) Biên tựa khớp

$$w(b) = M_r(b) = 0 \qquad (5.41)$$



b) Biên ngàm, chịu tải trọng phân bố đều trên hình tròn bán kính a



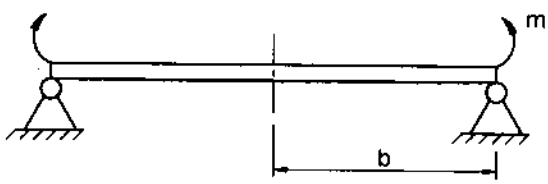
– Điều kiện biên:

$$w(b) = 0\ ; \qquad \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=b} = 0 \qquad (5.42)$$

– Điều kiện liên tục :

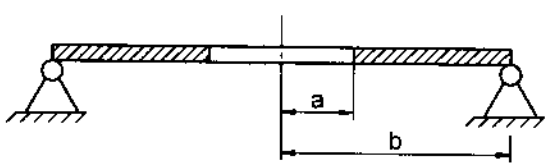
$$w_{r_1(a)} = w_{r_2(a)}\ ; \qquad \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r_1=a} = \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r_2=a} \qquad (5.43)$$

c) Tấm tựa khớp chịu mômen phân bố đều trên biên



$$w(b) = 0\ ;\ M_r(b) = m \qquad (5.44)$$

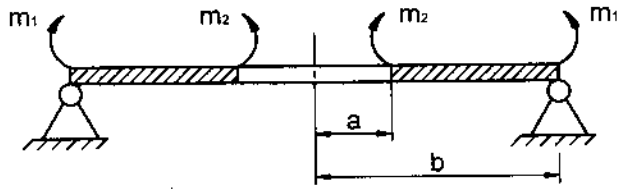
d) Tấm vành khăn tựa khớp trên biên ngoài



$$w(b) = 0\ ;\ M_{r(r=b)} = 0; \qquad (5.45)$$

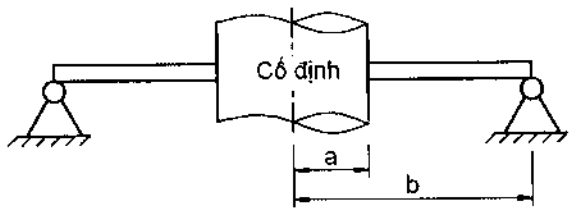
$$M_{r(r=a)} = 0\ ;\ Q_{r(r=a)} = 0$$

e) Tấm vành khăn chịu mômen phân bố đều trên biên trong là m_2, biên ngoài là m_1



$$w(b) = 0\ ;\ M_{r(r=b)} = m;\ \ M_{r(r=a)} = m_2;\ \ Q_{r(r=a)} = 0 \qquad (5.46)$$

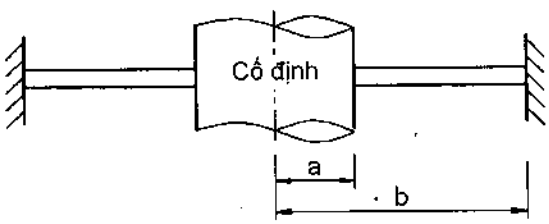
f) Tấm tựa khớp trên biên, giữa có lõi cố định tuyệt đối cứng



$$w(b) = 0\ ;\ M_{r(r=b)} = 0$$

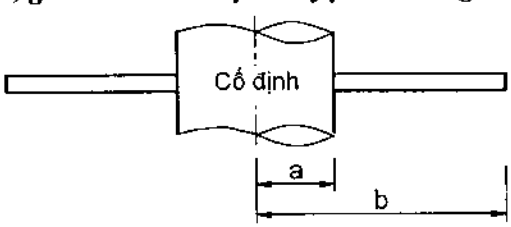
$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=a} = 0\ ;\ w(a) = 0 \qquad (5.47)$$

g) Tấm ngàm trên biên, giữa có lõi cố định tuyệt đối cứng



$$w(b) = 0\ ;\ \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=b} = 0\ ;\ \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=a} = 0\ ;\ w(a) = 0 \qquad (5.48)$$

h) Tấm biên tự do, giữa có lõi cố định tuyệt đối cứng



$$w(a) = 0\ ;\ \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=a} = 0\ ;$$

$$M_{r(r=b)} = 0\ ;\ Q_{r(r=b)} = 0 \qquad (5.49)$$

2.7. Các dạng tải trọng đối xứng trục

– Tấm tròn chịu tải trọng phân bố đều.

– Tấm tròn chịu lực tập trung tại tâm của tấm.

– Tấm chịu tải trọng phân bố đều trên hình tròn đồng tâm với tấm.

– Tấm chịu tải trọng phân bố trên chu vi hình tròn đồng tâm với tấm.

– Tấm vành khăn chịu tải trọng phân bố đều.

– Tấm vành khăn chịu mômen phân bố đều trên biên.

Các công thức độ võng, mômen uốn nội lực của các trường hợp trên được cho trong bảng 5.1, biểu đồ độ võng và nội lực biểu diễn trong phụ lục chương 5 ở cuối sách.

Ví dụ 5.1. Xác định độ võng và ứng suất trong tấm tròn có chu vi đặt trên gối tựa và chịu tải trọng phân bố đều (hình 5.13)

Giải.

$$Q.2pr = qpr^2$$

$$\text{hay}\quad Q = \frac{qr}{2}$$

$$\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{qr^3}{16D} \quad (a)$$

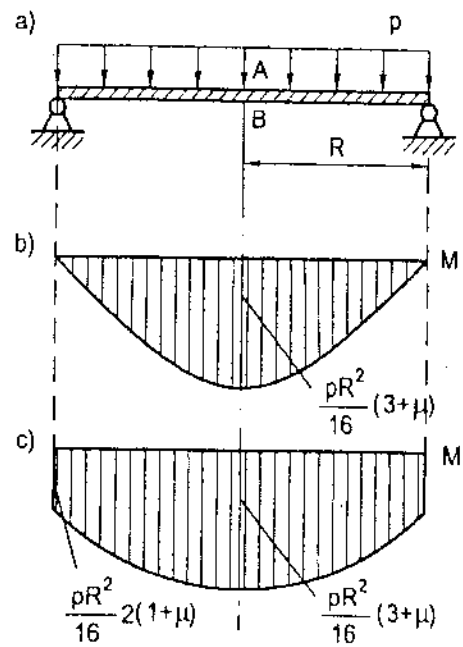
$$C_2 = 0 \text{ vì } \theta_{(r=0)} = 0$$

$$\theta = C_1 r - \frac{qr^3}{16D} \qquad (b)$$

$$M_{(r=R)} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dr} + \nu\frac{\theta}{r}\right)_{r=R} = 0$$

$$C_1 - \frac{3qR^2}{16D} + \nu\left(C_1 - \frac{qR^2}{16D}\right) = 0$$



Hình 5.13

hay: $C_1(1+\nu) - \frac{qR^2}{16D}(3+\nu) = 0$

Rút ra : $C_1 = \frac{qR^2}{16D}.\frac{3+\nu}{1+\nu}$

Vậy :

$$w = C_3 - \int \frac{q}{16D}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}R^2 r - r^3\right)dr = C_3 - \frac{q}{16D}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right) \quad (c)$$

$$w_{(r=R)} = 0 = C_3 - \frac{q}{16D}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

Rút ra : $C_3 = \frac{q}{64D}\frac{5+\nu}{1+\nu}R^4$

$$w = \frac{q}{16D}\left[\frac{1}{4}.\frac{5+\nu}{1+\nu}R^4 - \frac{1}{2}.\frac{3+\nu}{1+\nu}R^2r^2 + \frac{1}{4}r^4\right]$$

$$w_{r=0} = w_{max} = \frac{5+\nu}{1+\nu}\frac{qR^4}{64D}$$

$$M_r = \frac{q}{16}(3+\nu)(R^2 - r^2) \quad (d)$$

$$M_t = \frac{q}{16}(3+\nu)\left(R^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

Tại A (z = -h/2): $\sigma_1 = -q$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r = \sigma_t = -\frac{6}{h^2}\frac{qR^2}{16}(3+\nu)$$

$$= -\frac{3}{8}(3+\nu)\frac{qR^2}{h^2}$$

Tại B (z = +h/2):

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_r = \sigma_t = \frac{3}{8}(3+\nu)\frac{qR^2}{h^2};$$

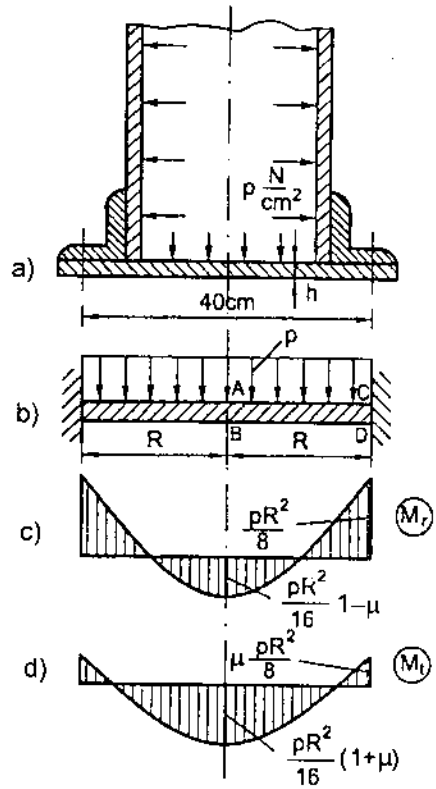
$\sigma_3 = 0$

Ví dụ 5.2: Đáy của một thùng chịu áp suất $p = 2.10^6$ N/m^2 là một tấm tròn (hình 5.14). Xác định bề dày của tấm đáy và độ võng lớn nhất. Cho biết ứng suất cho phép (Bỏ qua sự uốn của thành).

Cho biết:

$$[\sigma]_k = 15.10^7 \text{ N/m}^2 \; ; \quad \alpha = \frac{\sigma_o^k}{\sigma_o^n} = 0,8$$

$$E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2 \; ; \; \nu = 0,28 \; ; \; R = 0,2\text{m}$$



Hình 5.14

Giải:

$$\theta = C_1 r - \frac{pr^3}{16D}$$

$$\theta_{(r=R)} = 0 = C_1 R - \frac{pR^3}{16D}$$

Rút ra : $C_1 = \dfrac{pR^2}{16D}$

Do đó : $\theta = \dfrac{p}{16D}(R^2 r - r^3)$

$$M_r = \frac{p}{16}[R^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)]$$

$$M_t = \frac{p}{16}[R^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)]$$

Tại điểm A ($z = -h/2$, $r = 0$): $\sigma_1 = -p$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{6M_{r(r=0)}}{h^2} = -\frac{3}{8}(1+\nu)\frac{pR^2}{h^2}$$

Vì $|\sigma_1| << |\sigma_3|$, nên theo thuyết bền Mo ta có :

$$\sigma_{td} \approx 0 - 0,8\left[-\frac{3}{8}(1+\nu)\frac{pR^2}{h^2}\right] = 0,384\frac{pR^2}{h^2}$$

Tại điểm B (z = +h/2, r = 0): $\sigma_1 = \sigma_2 = +\frac{3}{8}(1+\nu)\frac{pR^2}{h^2}$; $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_{td} = \frac{3}{8}(1+\nu)\frac{pR^2}{h^2} = 0,48\frac{pR^2}{h^2}$$

Tại điểm C (z =-h/2, r=R): $\sigma_1 = \frac{6M_{r(r=R)}}{h^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{pR^2}{h^2}$

$$\sigma_2 = \frac{6M_{1(r=R)}}{h^2} = \frac{3}{4}\nu\frac{pR^2}{h^2}$$

Vì $\sigma_3 << \sigma_1$, nên ta có :

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \alpha\sigma_3 = \frac{3}{4}\frac{pR^2}{h^2} = 0,75\frac{pR^2}{h^2}$$

Tại điểm D (z = +h/2, r = R): $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = -\frac{3}{4}\nu\frac{pR^2}{h^2}$;

$$\sigma_3 = -\frac{3}{4}\frac{pR^2}{h^2}$$

Vậy : $\sigma_{td} = -0,8\left(-\frac{3}{4}\frac{pR^2}{h^2}\right) = 0,6\frac{pR^2}{h^2}$

Điều kiện bền : $\sigma_{max} = \sigma_{td}^c \le [\sigma]_k$

hay : $0,75\frac{pR^2}{h^2} \le [\sigma]_k$

Rút ra : $h \ge \sqrt{\frac{0,75pR^2}{[\sigma]_k}} = \sqrt{0,75\frac{2.10^6.0,2^2}{15.10^7}} = 0,02$ m

$$W_{max} = \frac{pR^4}{64D} = \frac{pR^4}{64\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}} = 346.10^{-6} \text{ m}$$

3–VỎ MỎNG TRÒN XOAY CHỊU ÁP LỰC PHÂN BỐ ĐỀU

Vỏ mỏng tròn xoay là vật thể tạo thành khi quay một đường cong bất kỳ quanh một trục cố định. Ta giả thiết bề dày của vỏ là rất bé so với các bán kính cong . Gọi giao tuyến của mặt trung gian với mặt phẳng đi qua trục đối xứng là đường *kinh tuyến*, còn giao tuyến với mặt phẳng vuông góc với kinh tuyến gọi là đường *vĩ tuyến*.

Lý thuyết vỏ mỏng trong đó giả thiết ứng suất pháp phân bố đều trên bề dày của vỏ (tức là coi vỏ chỉ bị kéo hoặc nén theo phương kinh tuyến và vĩ tuyến) gọi là *lý thuyết vỏ mỏng phi mô men.* Trường hợp vỏ chịu tác dụng của lực tập trung , hoặc mô men tập trung , hoặc vỏ có hình dạng thay đổi độ cong đột ngột, ta cần áp dụng *lý thuyết vỏ mỏng có mô men.* Trong phần này ta chỉ đề cập đến lý thuyết vỏ mỏng phi mômen.

3.1. Phương trình Laplace

Xét một phân tố của vỏ (hình 5.15). Phương trình tổng hình chiếu các lực theo phương pháp tuyến đi qua trọng tâm của phân tố cho ta:

$$\frac{\sigma_k}{\rho_k} + \frac{\sigma_v}{\rho_v} = \frac{p}{h} \qquad (5.50)$$

σ_k – ứng suất kinh tuyến.

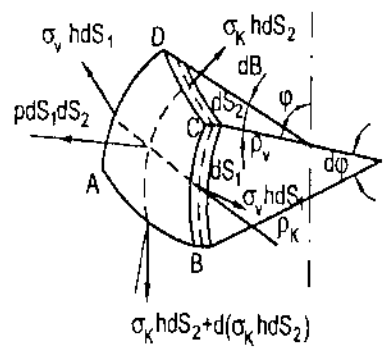
σ_v – ứng suất vòng.

ρ_k – bán kính cong của kinh tuyến.

ρ_v – bán kính cong của vĩ tuyến.

h – chiều dầy của vỏ.

p – áp lực phân bố vuông góc với mặt vỏ mỏng.



Hình 5.15

3.2. Phương trình cân bằng tĩnh học đối với một phần vỏ

Xét tổng hình chiếu các lực theo phương của trục đối xứng của vỏ, ta có:

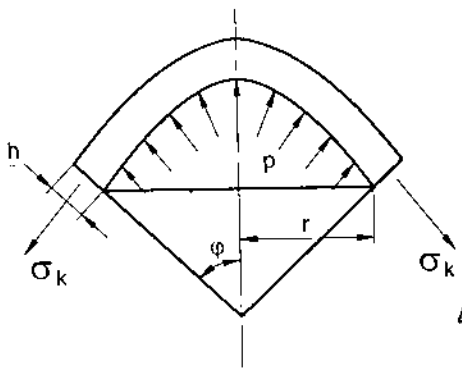
$$\sigma_k.2\pi rh\sin\varphi = P \qquad (5.51)$$

Trong đó: P là hợp lực của áp suất phân bố trên phần vỏ theo phương trục đối xứng (hình 5.16), xác định theo định lý về hình chiếu của lực:

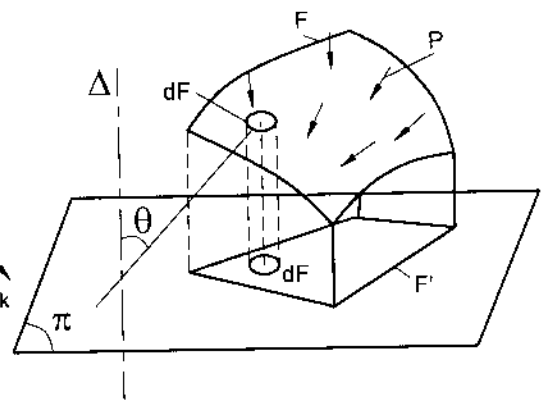
Định lí 1. Hợp lực của áp suất phân bố đều trên mặt cong bất kỳ theo phương Δ bằng tích giá trị của áp suất và diện tích của hình chiếu mặt cong trên mặt phẳng vuông góc với Δ.

$$P = p.F' \qquad (5.52)$$

F' là diện tích hình chiếu của mặt cong trên mặt phẳng vuông góc với phương chiếu (hình 5.17).



Hình 5.16



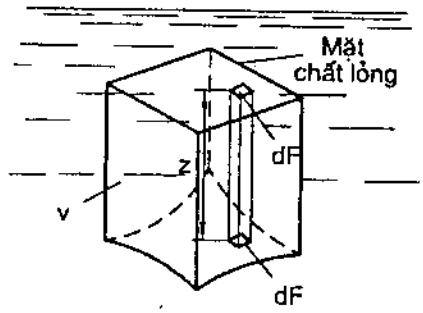
Hình 5.17

3.3. Mặt cong chịu lực của chất lỏng

Định lí 2. Hợp lực của áp lực chất lỏng tác dụng lên mặt cong bất kỳ bằng trọng lượng của cột chất lỏng có đáy là mặt cong đó và chiều cao kể từ mặt thoáng.

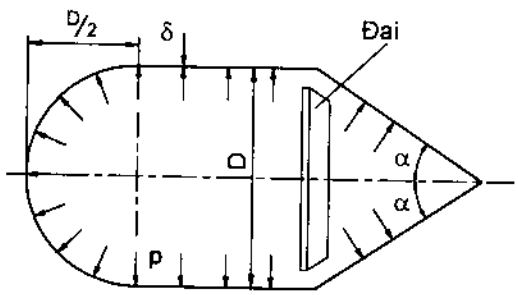
$$P = \gamma.V \qquad (5.53)$$

Với γ là trọng lượng riêng của chất lỏng, V là thể tích của cột chất lỏng (hình 5.18).



Hình 5.18

Ví dụ 5.3. Xác định bề dày cần thiết của vỏ chịu áp suất bên trong p (hình 5.19) theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.



Hình 5.19

Giải.

Xét phần vỏ mỏng hình cầu:

$\sigma_K . \delta . 2\pi r \sin\varphi = p\pi r^2$

Trong đó : $r = \dfrac{D}{2}\sin\varphi$

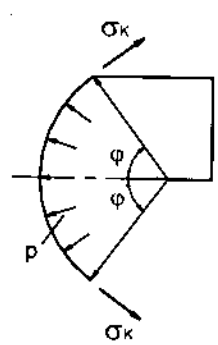
Vậy: $\sigma_K = \dfrac{pr}{2\delta\sin\varphi} = \dfrac{pD}{4\delta}$

$$\sigma_v = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{\sigma_k}{\rho_k}\right)\cdot\rho_v = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{p}{2\delta}\right)\frac{D}{2} = \frac{pD}{4\delta}$$

Vậy: $\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{pD}{4\delta}$; $\sigma_3 = 0$

suy ra: $\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \dfrac{pD}{4\delta}$ (a)

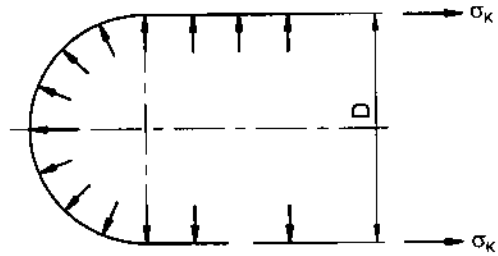
a)



– Xét phần vỏ mỏng hình trụ

$\rho_K = \infty$; $\rho_V = \dfrac{D}{2}$

Phương trình cân bằng:



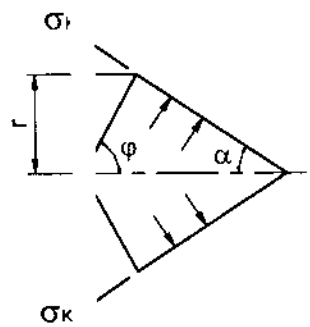
$$\sigma_K.\delta.2\pi.\frac{D}{2} = p\pi\frac{D^2}{4}; \quad \sigma_K = \frac{pD}{4\delta}$$

$$\Rightarrow \sigma_v = \frac{p}{\delta}.\rho_v = \frac{pD}{2\delta}$$

Vậy : $\sigma_1 = \dfrac{pD}{2\delta}$; $\sigma_2 = \dfrac{pD}{4\delta}$; $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2\delta} \quad \text{(b)}$$

c)



– Xét phần vỏ mỏng hình nón

$\sigma_k.\delta.2\pi r\sin\varphi = p\pi r^2$

Suy ra : $\sigma_K = \dfrac{pr}{2\delta.\sin\varphi} = \dfrac{pr}{2\delta.\cos\alpha}$;

$$(\sigma_K)\Big|_{r=\frac{D}{2}}^{max} = \frac{pD}{4\delta\cos\alpha}$$

$$\rho_K = \infty \; ; \; \rho_v = \frac{r}{\sin\varphi} = \frac{r}{\cos\alpha} \; ;$$

$$\sigma_v = \frac{p}{\delta}\rho_v = \frac{p}{\delta}.\frac{r}{\cos\alpha}$$

$$(\sigma_v)_{max} = (\sigma_v)_{r=\frac{D}{2}} = \frac{pD}{2\delta.\cos\alpha}$$

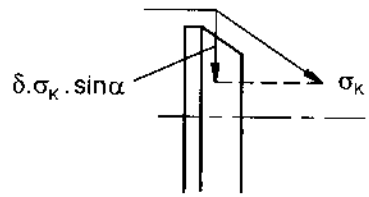
Vậy: $\sigma_1 = \dfrac{pD}{2\delta\cos\alpha}$; $\sigma_2 = \dfrac{pD}{4\delta\cos\alpha}$; $\sigma_3 = 0$;

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2\delta\cos\alpha} \qquad \text{(c)}$$

σ_{td} theo (c) là lớn nhất, do đó bề dày bình được xác định từ điều kiện biên:

Rút ra : $[\delta] = \dfrac{pD}{2[\sigma]\cos\alpha}$;

$$\sigma_K \delta \sin\alpha = \frac{pD}{4\cos\alpha}.\sin\alpha = \frac{pDtg\alpha}{4}$$



Ứng suất của đai :

$$\sigma = \frac{\frac{pDtg\alpha}{4}.D}{2F} \le [\sigma]$$

F – diện tích mặt cắt ngang của đai.

Suy ra : $F \ge \dfrac{pD^2 tg\alpha}{\delta[\sigma]}$

Ví dụ 5.4. Tìm các ứng suất chính của thành bình hình nón chứa chất lỏng (hình 5.20).

Giải:

Từ công thức Laplace, với $\rho_K = \infty$, ta rút ra:

$$\sigma_v = \frac{p}{t}\rho_v$$

$p = \gamma(3 - z) = 1.10^4(3 - z)$

$t = 3.10^{-3}$ m

$$\sigma_v = \frac{1.10^4(3 - z)}{3.10^{-3}}.0,351z$$

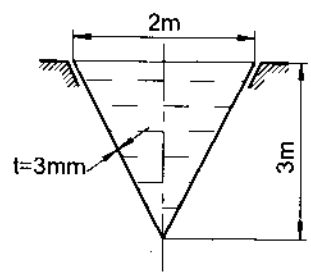
$$= 1,17.10^6(3 - z).z$$

$\Rightarrow \sigma_v\,(max) = \sigma_v\,(z = 1,5\text{ m})$

$= 1,17.10^6(3 - 1,5).1,5$

$= 2,55.10^6$ N/m^2

$= 2,55$ MN/m^2



Hình 5.20

Xét sự cân bằng của phần dưới, ta được:

$$\sigma_K 2\pi R_z t\cos\alpha = \frac{\gamma}{3}\pi R^2 z + \gamma\pi R_z^2(3 - z);$$

$$\sigma_K = \frac{R_z.\gamma}{6t.\cos\alpha}(9 - 2z)$$

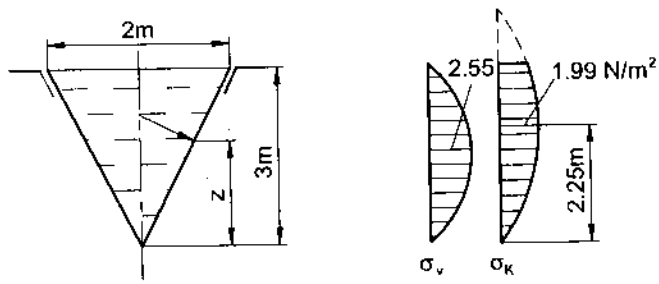
Thay $R_z = z.tg\alpha = \frac{z}{3}$, $\gamma = 1.10^{-4}$ N/m^3, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ta được :

$$\sigma_K = 0,196.10^6 z(9 - 2z)$$

Vậy $\sigma_{K(max)} = \sigma_{K\,(z = 2,25m)} = 0,196.\ 10^6.\ 2,25\ (9 - 2,25)$

$= 1,99.10^6$ N/m^2 = 1,99 MN/m^2

Biểu đồ ứng suất kinh tuyến và vĩ tuyến theo chiều cao của bể được biểu diễn trên hình 5.21.



Hình 5.21

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1. Một tấm tròn bán kính a có phương trình độ võng:

$$w = c(a^2 - r^2)$$

Trong đó: c - hằng số; $0 \le r \le a$

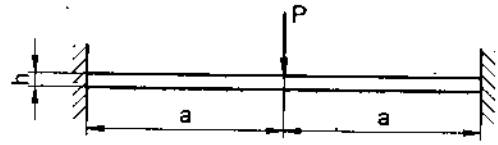
Hãy xác định các tải trọng tác dụng lên tấm và các điều kiện biên.

5.2. Một tấm tròn bằng thép đường kính d = 40cm, bề dày h = 1cm, E = 2.10^6daN/cm^2, v = 0,3 chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt tấm q = 10N/cm^2. Hãy tính và so sánh độ võng lớn nhất của tấm trong hai trường hợp:

a) Biên tựa khớp.

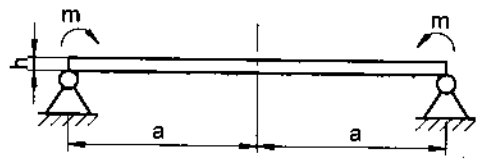
b) Biên ngàm.

5.3. Xác định độ võng và ứng suất lớn nhất trong tấm tròn chịu ngàm chung quanh và lực tập trung P ở tâm của tấm (hình 5.22).



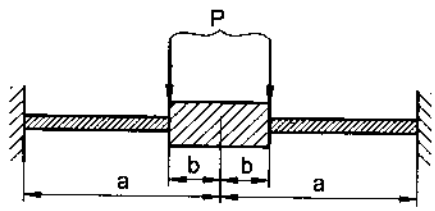
Hình 5.22

5.4. Tính độ võng của tấm tròn chịu lực như trên hình 5.23 ; m: mômen phân bố đều trên một đơn vị dài của chu tuyến tấm.



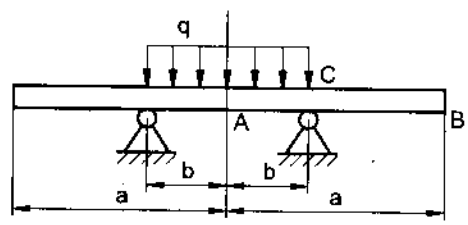
Hình 5.23

5.5. Một tấm tròn bị ngàm ở chu vi ngoài; ở chu vi trong có gắn một lõi tròn tuyệt đối cứng. Tấm chịu tải trọng phân bố đều dọc theo chu vi trong mà hợp lực bằng P (hình 5.24). Tính độ võng lớn nhất.



Hình 5.24

5.6. Tính các mômen uốn ở C và độ võng ở A và B của tấm tròn vẽ trên hình 5.25. Cho biết chiều dày của tấm h = 2,5mm; các số hiệu khác: b = 5cm; a = 1cm; $E = 2,1.10^7 N/cm^2$; $\nu = 0,3$.

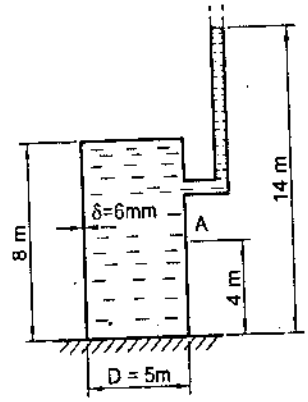


Hình 5.25

5.7. Một bể chứa hình cầu chịu áp lực hơi bên trong p = 15at. Đường kính trung bình của bể D = 1m, bề dày t = 5mm, ứng suất cho phép $[\sigma] = 100MN/m^2$. Kiểm tra độ bền của bể chứa.

5.8. Tính bề dày cần thiết của một vỏ nồi hơi hình trụ tròn, đường kính D = 1m, chịu áp lực hơi $p = 400N/cm^2$, ứng suất cho phép $[\sigma] = 60MN/m^2$. Tính độ bền theo thuyết bền thứ tư.

5.9. Tính biến dạng ε_{max} và ε_{min} ở điểm A trên thành bể chứa chất lỏng hình trụ (hình 5.26). Cho $E = 2.10^4$ kN/cm^2,
$\nu = 0,3$, $\gamma = 10^4$N/m^3.

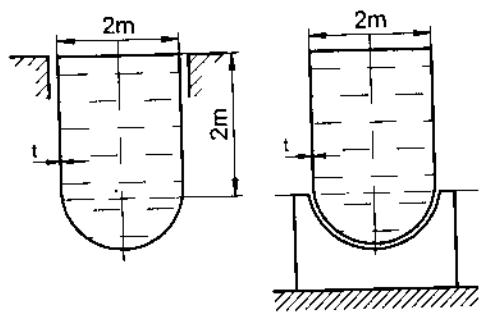


Hình 5.26

5.10. Một bể chứa nước gồm một thân hình trụ và đáy hình bán cầu như trên hình 5.27. Bề dày thành bình t = 3mm. Tính ứng suất ở thân bình và ở đáy bình theo hai trường hợp sau:

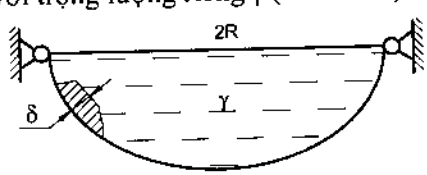
a) Bình được treo ở phía trên thân hình trụ (a)

b) Bình được đặt trên giá đỡ ở phía dưới thân hình trụ (b)



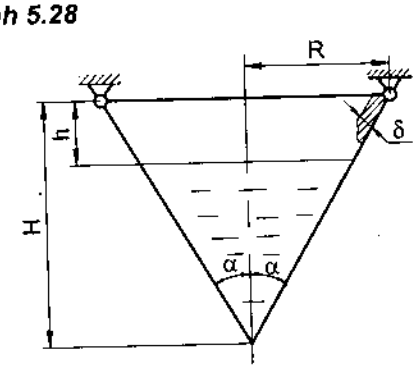
Hình 5.27

5.11. Vẽ biểu đồ phân bố ứng suất σ_k và σ_v trên thành bình bán cầu bán kính R, bề dày δ, đựng chất lỏng với trọng lượng riêng γ (hình 5.28).



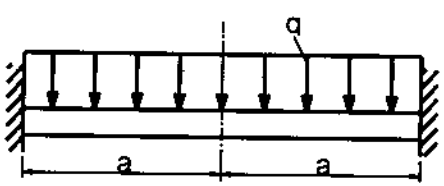
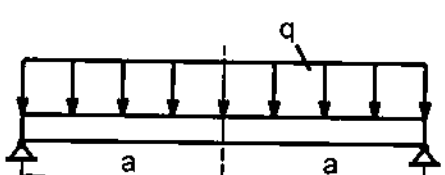
Hình 5.28

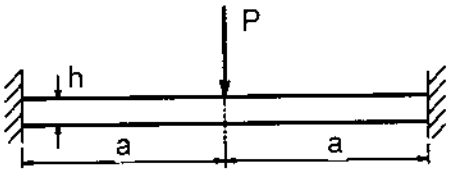
5.12. Tính bề dày cho phép của thành bình hình nón (hình 5.29) theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Bình đựng một phần chất lỏng có trọng lượng riêng γ. Bỏ qua áp suất không khí ở trên mặt thoáng.



Hình 5.29

Bảng 5. 1. Tấm tròn chịu tải trọng đối xứng trục

Trường hợp chịu lực	Biểu thức độ võng w (D: Độ cứng của tấm)	Biểu thức mômen uốn M_r, M_t (ν: hệ số Poát-xông)
	$w = \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2$ $w_{max} = \frac{qa^4}{64D}$	$M_r = \frac{q}{16}\left[a^2(\nu+1) - r^2(\nu+3)\right]$ $M_t = \frac{q}{16}\left[a^2(\nu+1) - r^2(3\nu+1)\right]$
	$w = \frac{q\left(a^2 - r^2\right)}{64D}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2\right)$ $w_{max} = \frac{qa^4}{64D}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right)$	$M_r = \frac{q}{16}(3+\nu)\left(a^2 - r^2\right)$ $M_t = \frac{q}{16}\left[a^2(\nu+3) - r^2(3\nu+1)\right]$

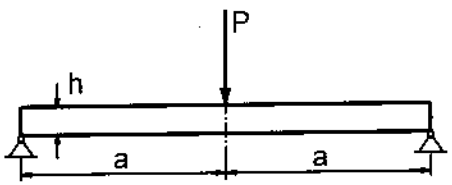


$$w = \frac{P}{8\pi D}\left(r^2 \ln\frac{r}{a} + \frac{1}{2}\left(a^2 - r^2\right)\right)$$

$$w_{max} = \frac{Pa^2}{16\pi D}$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{r} - 1\right];\ M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{r} - \nu\right]$$

$$\sigma_{\substack{max\\(r=0)}} = \frac{P(1+\nu)\left(0,485\ln\left(\frac{a}{h}\right) + 0,52\right)}{h^2}$$

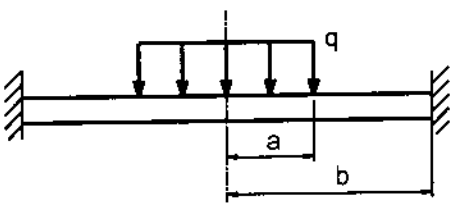


$$w = \frac{P}{16\pi D}\left(2r^2 \ln\frac{r}{a} + \frac{3+\nu}{1+\nu}\left(a^2 - r^2\right)\right)$$

$$w_{max} = \frac{P}{16\pi D}\frac{(3+\nu)}{(1+\nu)}$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{r}\right];\ M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{r} + 1 - \nu\right]$$

$$\sigma_{\substack{max\\(r=0)}} = \frac{P\left((1+\nu)\left(0,485\ln\left(\frac{a}{h}\right) + 0,52\right) + 0,48\right)}{h^2}$$



$$w_1 = \frac{q}{4D}\left[\frac{r^4}{16} - \frac{1}{2}\left(a^2 \ln\frac{b}{a} + \frac{a^4}{4b^2}\right)r^2 + C_3\right]$$

khi $0 \le r \le a$

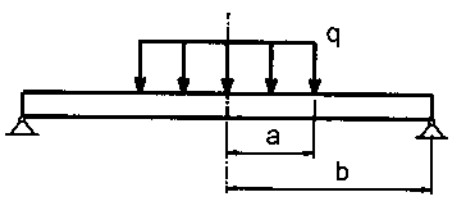
$$w_2 = \frac{qa^2}{4D}\left[\ln\frac{r}{b}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right) + \left(b^2 - r^2\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{a^2}{8b^2}\right)\right]$$

khi $a \le r \le b$

$$M_{r1} = \frac{q}{4}\left[(1+\nu)\left(a^2 \ln\frac{b}{a} + \frac{a^4}{4b^2}\right) - \frac{3+\nu}{4}r^2\right]$$

$$M_{r2} = \frac{qa^2}{4}\left[(1+\nu)\left(\ln\frac{b}{r} + \frac{a^2}{4b^2}\right) + (1-\nu)\frac{a^2}{4r^2} - 1\right]$$

$$M_{t1} = \frac{q}{4}\left[(1+\nu)\left(a^2 \ln\frac{b}{a} + \frac{a^4}{4b^2}\right) - \frac{1+3\nu}{4}r^2\right]$$



$$C_3 = -\frac{1}{4}a^4 \ln\frac{b}{a} - \frac{3}{16}a^4 + \frac{a^2b^2}{4}$$

$$w_1 = \frac{q}{4D}\left[-\left((1+\nu)\ln\frac{b}{a} - (1-\nu)\frac{a^2}{4b^2} + 1\right)\times \right.$$
$$\left. \times\frac{a^2r^2}{2(1+\nu)} + \frac{r^4}{16} + C_3\right]$$

$$w_2 = \frac{qa^2}{4D}\left[\left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)\ln\frac{r}{b} + \left(\frac{(1-\nu)a^2}{(1+\nu)8b^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{1}{2(1+\nu)} - \frac{1}{4}\right)\left(r^2 - b^2\right)\right]$$

$$C_3 = \frac{1}{4}a^4 \ln\frac{a}{b} - \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{a^4}{8} + \frac{a^2b^2}{2(1+\nu)} - \frac{5a^4 - 4a^2b^2}{16}$$

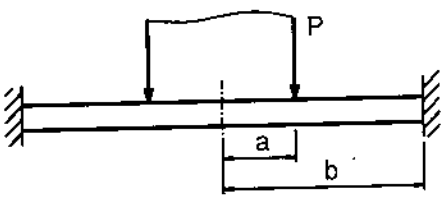
$$M_{t2} = \frac{qa^2}{4}\left[(1+\nu)\left(\ln\frac{b}{r} + \frac{a^2}{4b^2}\right) - (1-\nu)\frac{a^2}{4r^2} - \nu\right]$$

$$M_{r_1} = \frac{q}{4}\left[\left((1+\nu)\ln\frac{b}{a} - (1-\nu)\frac{a^2}{4b^2} + 1\right)a^2 - \frac{3+\nu}{4}r^2\right]$$

$$M_{r2} = \frac{qa^2}{4}\left[(1+\nu)\ln\frac{b}{r} - (1-\nu)\frac{a^2}{4r^2} - (1-\nu)\frac{a^2}{4b^2}\right]$$

$$M_{t_1} = \frac{q}{4}\left[\left((1+\nu)\ln\frac{b}{a} - (1-\nu)\frac{a^2}{4b^2} + 1\right)a^2 - \frac{1+3\nu}{4}r^2\right]$$

$$M_{t_2} = \frac{qa^2}{4}\left[(1+\nu)\ln\frac{b}{r} - (1-\nu)\frac{a^2}{4r^2} - (1-\nu)\left(\frac{a^2}{4b^2} - 1\right)\right]$$



$$w_1 = \frac{-P}{4\pi D}\left[\frac{r^2}{2}\left(\ln\frac{b}{a} + \frac{a^2}{2b^2} - \frac{1}{2}\right) + C_3\right]$$

$$w_2 = \frac{P}{4\pi D}\left[\frac{1}{2}\left(r^2 + a^2\right)\ln\frac{r}{b} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\times\left(r^2 - b^2\right)\right]$$

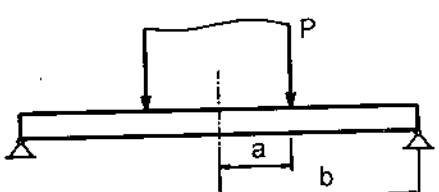
$$C_3 = -\frac{a^2}{2}\ln\frac{a}{b} + \frac{1}{4}\left(a^2 - b^2\right)$$

$$M_{r1} = \frac{P(1+\nu)}{4\pi}\left[\ln\frac{b}{a} + \frac{a^2}{2b^2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$M_{r2} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\left(\ln\frac{b}{r} + \frac{a^2}{2b^2}\right) + (1-\nu)\frac{a^2}{2r^2} - 1\right]$$

$$M_{t1} = \frac{P(1+\nu)}{4\pi}\left[\ln\frac{b}{a} + \frac{a^2}{2b^2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$M_{t2} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\left(\ln\frac{b}{r} + \frac{a^2}{2b^2}\right) - (1-\nu)\frac{a^2}{2r^2} - \nu\right]$$



$$w_1 = \frac{P}{4\pi D}\left[-\frac{r^2}{2}\left(\ln\frac{b}{a} - \frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{a^2}{2b^2} - \frac{1}{2}\right)\right) + C_3\right]$$

$$w_2 = \frac{r^2 + a^2}{2}\ln\frac{r}{b} + \frac{r^2 - b^2}{2}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{a^2}{2b^2} - \frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{4}\right)$$

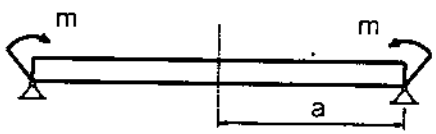
$$C_3 = \frac{a^2}{2}\ln\frac{a}{b} + \frac{b^2 - a^2}{8}\frac{5+\nu}{1+\nu}$$

$$M_{r1} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{b}{a} - (1-\nu)\left(\frac{a^2}{2b^2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$M_{r2} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{b}{r} + (1-\nu)\left(\frac{a^2}{2r^2} - \frac{a^2}{2b^2}\right)\right]$$

$$M_{t1} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{b}{a} - (1-\nu)\left(\frac{a^2}{2b^2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$M_{r2} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{b}{r} - (1-\nu)\left(\frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^2}{2b^2} - 1\right)\right]$$

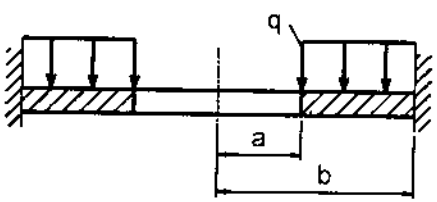


$$w = \frac{m}{2(1+\nu)D}\left(a^2 - r^2\right)$$

$$w_{max} = \frac{ma^2}{2(1+\nu)D}$$

$$M_r = m \quad \forall r\left(0 \le r \le a\right)$$

$$M_t = m$$



$$w = \frac{qb^4}{64D}\left[-1 + 2\left(1 - k - 2\beta^2\right)\left(1 - \alpha^2\right) + \alpha^4 - 4k\ln\alpha - 8\beta^2\alpha^2\ln\alpha\right]$$

$$\alpha = \frac{r}{b};\ \beta = \frac{a}{b};$$

$$k = \frac{(1-\nu)\beta^2 + (1+\nu)\left(1 + 4\beta^2\ln\beta\right)}{(1-\nu) + (1+\nu)\beta^2}\beta^2$$

$$M_r = \frac{qb^2}{16}\left\{\frac{1}{\alpha^2}\left[2(1-\nu) + 4(1+\nu)\ln x - (3+\nu)x^2 + \frac{1+3\nu}{x^2} + \frac{\left[\left(1-\nu^2\right)\left(\alpha^2 - 4\ln\alpha + 2\right) + \frac{\left(1+4\nu+3\nu^2\right)}{\alpha^2}\right]}{\alpha^2(1-\nu) + (1+\nu)}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right]\right\}$$

$$M_1 = \frac{qb^2}{16}\left\{\frac{1}{\alpha^2}\left[(1+3\nu)x^2 + 4(1+\nu)\ln x - 2(1-\nu) - \frac{1+3\nu}{x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\left[(1-\nu^2)(\alpha^2 - 4\ln\alpha + 2) + \frac{(1+4\nu+3\nu^2)}{\alpha^2}\right]\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\alpha^2(1-\nu)+(1+\nu)}\right]\right\}$$

$$\alpha = \frac{b}{a};\ x = \frac{r}{a};\ (a \le r \le b)$$

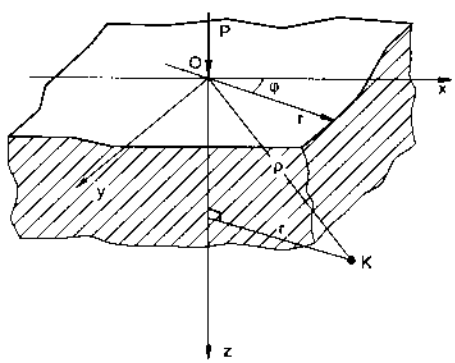
Chương 6

BÀI TOÁN ỨNG SUẤT TIẾP XÚC

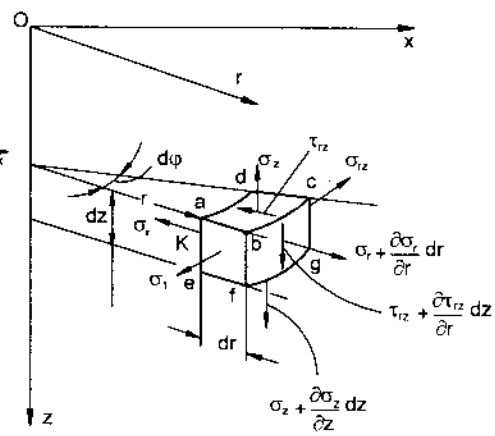
1 – BÀI TOÁN BÚT-XI-NÉT (BOUSINESQ) VỀ BÁN KHÔNG GIAN ĐÀN HỒI CHỊU LỰC TẬP TRUNG

1.1. Trạng thái ứng suất và biến dạng

Xét bán không gian đàn hồi chịu lực tập trung P vuông góc với mặt phẳng biên (hình 6.1) và một phân tố tách ra từ điểm bất kỳ K (hình 6.2).



Hình 6.1



Hình 6.2

Phương trình cân bằng của phân tố (bỏ qua lực khối) cho ta tổng hình chiếu theo phương hướng kính và phương vòng là :

$$\begin{cases} r.\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial_z} + \dfrac{\partial}{\partial_r}(\tau_{rz}.r) = 0 \\ r.\dfrac{\partial\tau_{rz}}{\partial_z} + \dfrac{\partial}{\partial_r}(\sigma_z.r) - \sigma_t = 0 \end{cases} \qquad (6.1)$$

Do tính chất đối xứng nên không có ứng suất tiếp và biến dạng trượt theo phương vòng $\tau rt = \gamma rt = \tau zt = \gamma zt = 0$

– Quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng tương tự như trong chương 4:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r};\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + u - 2\pi r)}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \qquad (6.2)$$

– Quan hệ giữa biến dạng và ứng suất đối với trạng thái ứng suất khối có dạng :

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)\right]; \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)\right] \\ &\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu(\sigma_z + \sigma_r)\right]; \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{\mu}; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

1.2 Giải bài toán theo chuyển vị

Thay các giá trị của ứng suất qua biến dạng và chuyển vị vào hệ phương trình cân bằng (6.1), ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right] + \dfrac{1}{2(1-\nu)}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right] = 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u}{r}\right) + \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}.\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{1}{2(1-\nu)}.\dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \end{cases} \qquad (6.4)$$

Nghiệm của hệ trên được tìm bởi Bu-xi-nét có dạng sau:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P}{4\pi\mu}\left[\frac{r.z}{\rho^3} - (1-2\nu)\frac{r}{\rho(\rho+z)}\right] \\ w &= \frac{p}{4\pi\mu\left[\dfrac{2(1-\nu)}{\rho} + \dfrac{z^3}{\rho^3}\right]} \end{aligned}\right\} \qquad (6.5)$$

$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$; (hệ trục tọa độ như hình 6.3).

Ứng suất tại điểm bất kỳ (hệ trục tọa độ như hình 6.3) được xác định bởi công thức:

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{\rho(\rho+z)} - \frac{3zr^2}{\rho^5}\right]$$

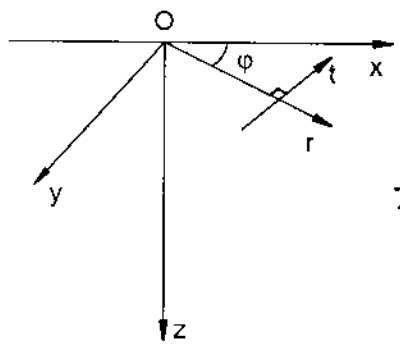
$$\sigma_t = \frac{P}{2\pi}(1-2\nu)\left[\frac{z}{\rho^3} - \frac{1}{\rho(\rho+z)}\right] \qquad (6.6)$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{2\pi}\frac{3z^3}{\rho^5}; \quad \tau_{rz} = -\frac{P}{2\pi}.\frac{3rz^2}{\rho^5};$$

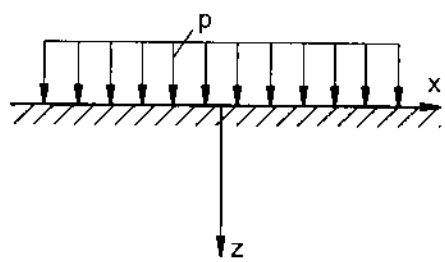
Chuyển vị theo phương z có dạng:

$$w = k.\frac{P}{r} \qquad (6.7)$$

Trong đó : $k = \frac{1-\nu}{2\pi\mu}$



Hình 6.3



Hình 6.4

w – gọi là độ lún của bề mặt.

Trong trường hợp lực phân bố đều cường độ p trên một diện tích F của mặt phẳng biên (hình 6.4), ta có:

$$w = k.\int_F \frac{pdF}{r} \qquad (6.8)$$

Ta lần lượt xét các trường hợp tải trọng phân bố :

a) Lực P phân bố trên một diện tích tròn bán kính a (hình 6.5). Khi đó áp lực lớn nhất trên mặt phẳng là :

$$p_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi a^2} \qquad (6.9)$$

Chuyển vị theo phương z của điểm bất kỳ trên mặt phẳng biên là:

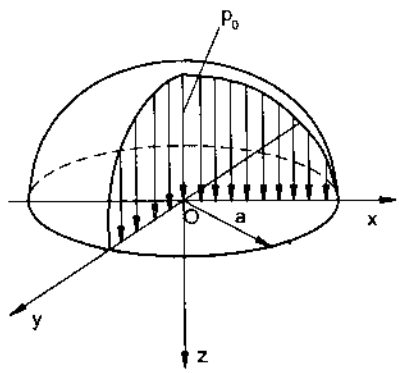
$$w = \frac{1-\nu^2}{E}.\frac{\pi p_0}{4a}\left(2a^2 - x^2 - y^2\right) \qquad (6.10)$$

Chuyển vị tại gốc tọa độ :

$$w_0\,|_{r=0} = \frac{1-\nu^2}{E}.\frac{\pi p_0 a}{2} \qquad (6.11)$$

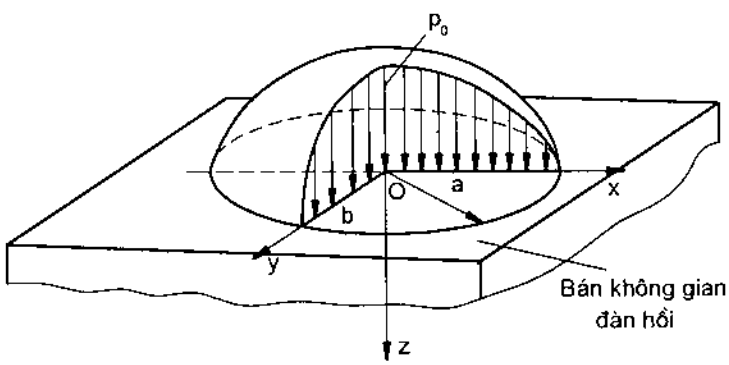
Độ lún tại x = a, y = 0:

$$w_k = \frac{1-\nu^2}{E}.\frac{\pi p_0 a}{4} \qquad (6.12)$$



Hình 6.5

b) Lực phân bố trên diện tích elip (hình 6.6)



Hình 6.6

$$w = \frac{1-\nu^2}{E}.\frac{p_0}{a}\left\{abK(e) - \frac{a}{b}x^2.D(e) - \frac{a}{b}y^2\left[K(e) - D(e)\right]\right\} \qquad (6.13)$$

Áp suất lớn nhất trên đỉnh elipxôít:

$$p_0 = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi ab} \qquad (6.14)$$

Trong đó: e – tâm sai của elip tiếp xúc: $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

Các tích phân dạng eliptíc xác định như sau:

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2.\sin^2\varphi}}; \quad D(e) = \frac{1}{e^2}\left[K(e) - L(e)\right];$$

$$L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2.\sin^2\varphi}.d\varphi; \quad K(0) = \frac{\pi}{2}; \quad D(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$K(1) = \infty; D(1) = \frac{\pi}{4}$$

2 – BÀI TOÁN HÉC-XƠ (HERTZ) VỀ ÁP LỰC, ĐỘ DỊCH GẦN VÀ DIỆN TÍCH MIỀN TIẾP XÚC GIỮA HAI VẬT THỂ

2.1. Liên hệ hình học giữa các bề mặt của vật thể tiếp xúc

Xét hai vật thể tiếp xúc với nhau tại điểm O (hình 6.7), khoảng cách của điểm M_1 và M_2 đến bề mặt tiếp xúc là :

$$z_1 = F_1(x_1, y_1) \;\; ; \quad z_2 = F_2(x_2, y_2)$$

hay: $2z_1 = K_{11}x_1^2 + K_{12}y_1^2; \;\; 2z_1 = K_{21}x_2^2 + K_{22}y_2^2$

K_{11}, K_{12}: độ cong chính tại điểm tiếp xúc O của vật thể thứ nhất.

K_{21}, K_{22}: độ cong chính cũng tại điểm đó của vật thể thứ hai.

$$K_{11} = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}\right)\Bigg|_0; \quad K_{12} = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2}\right)\Bigg|_0; \quad K_{21} = \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}\right)\Bigg|_0; \quad K_{22} = \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2}\right)\Bigg|_0$$

Phương trình quỹ tích của điểm M là:

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 = C = const \qquad (6.15)$$

Trong đó các hệ số A, B, C được xác định như sau:

A, B =

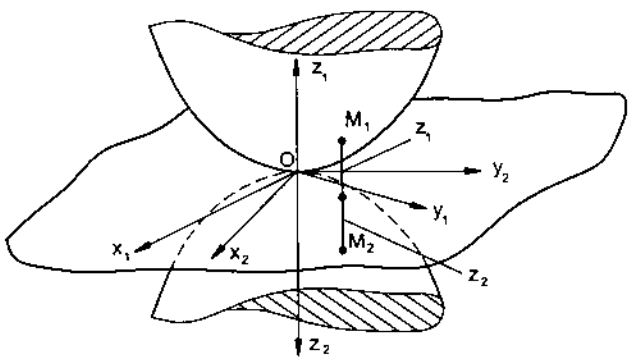
$$\frac{1}{4}\left[\left(K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22}\right)\pm\sqrt{\left(K_{11}-K_{12}\right)^2+\left(K_{21}-K_{22}\right)^2+2\left(K_{11}-K_{12}\right)\left(K_{21}-K_{22}\right).\cos 2\omega}\right]$$

Trong đó ω là hiệu các góc lập bởi trục x_1 và x_2 tương ứng đối với trục x (hình 6.8).

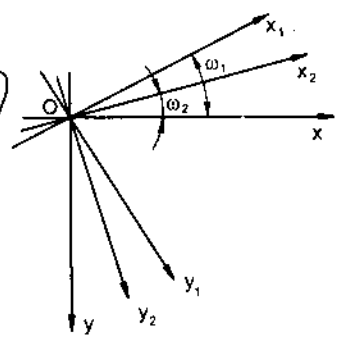
Ta có từ (6.15):

$$\frac{x^2}{\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{\frac{C}{B}}=1;\ \frac{C}{A}>\frac{C}{B}\ \text{hay } A<B$$

Ta thấy, đây là phương trình của elip trên mặt phẳng biên của bán không gian đàn hồi. Ta xét một số trường hợp tiếp xúc cụ thể và xác định diện tích tiếp xúc, áp lực tiếp xúc lớn nhất và độ dịch gần giữa hai vật thể tiếp xúc.

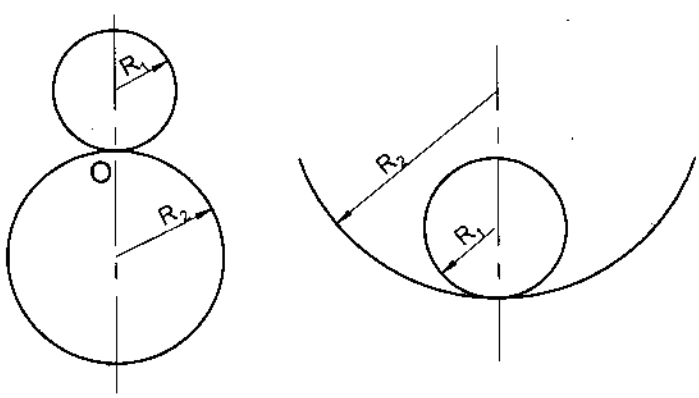


Hình 6.7



Hình 6.8

Ví dụ 6.1: Xác định các thông số A, B và hình dạng miền tiếp xúc của 2 hình cầu (hình 6.9).



Hình 6.9

Giải: Trong trường hợp hai hình cầu tiếp xúc ngoài (hình 6.9a), ta có các độ cong chính như sau:

$$K_{11} = K_{12} = \frac{1}{R_1}; \quad K_{21} = K_{22} = \frac{1}{R_2}$$

Ta có: $A = B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ (6.16)

– Trong trường hợp tiếp xúc trong (hình 6.9b) ta có:

$$K_{21} = K_{22} = -\frac{1}{R_2} \quad ; \quad A = B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

– Trong trường hợp $R_2 = \infty$, ta có: $K_{21} = K_{22} = \frac{1}{\infty} = 0; A = B = \frac{1}{2R_1}$

Các điểm M đều nằm trên họ đường tròn đồng tâm O.

2.2. Kích thước diện tích tiếp xúc, độ dịch gần và áp lực lớn nhất trên diện tích tiếp xúc

Gọi d: độ dịch gần của hai vật thể.

p_0: áp lực tiếp xúc lớn nhất.

a, b: bán trục lớn và nhỏ của diện tích tiếp xúc hình elip được xác định bởi công thức:

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{\eta.p}{\sum k}}; \quad b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{\eta.p}{\sum k}}; \tag{6.17}$$

$$p_0 = n_p \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{\sum k}{\eta}\right)^2}.p; \quad \delta = n_\delta.\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}.\eta^2 \sum k.p^2}$$

Trong đó : $n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{B}{A}\right)D(e)}$

$$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{B}{A}\right)\left[K(e) - D(e)\sqrt{1 - e^2}\right]} \tag{6.18}$$

$$n_p = \frac{1}{n_a n_b} \quad ; \quad n_\delta = K(e).\sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2}.\frac{1}{1+\frac{B}{A}}.\frac{1}{D(e)}}$$

$$\eta = \frac{1-\nu^2}{E^2} + \frac{1-\nu^2}{E^2}; \ \sum K = K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}$$

Các hệ số trong công thức trên tra trong bảng 6.1

Trong bảng 6.2 biểu diễn kích thước diện tích tiếp xúc, áp lực lớn nhất và độ dịch gần của một số trường hợp tiếp xúc giữa hai vật thể.

Bảng 6.1. Các hệ số n_a, n_b, n_p, n_δ

e^2	A/B	Ω	n_a	n_b	n_p	n_δ
0,050	0,9263	0,01923	1,013	0,9873	0,9999	0,9999
0,100	0,9240	0,03949	1,027	0,9742	0,9997	0,9997
0,150	0,8852	0,06087	1,042	0,9606	0,9992	0,9992
0,200	0,8459	0,08350	1,058	0,9465	0,9985	0,9985
0,250	0,8059	0,1075	1,076	0,9318	0,9974	0,9974
0,300	0,7652	0,1330	1,095	0,9165	0,9960	0,9960
0,350	0,7238	0,1602	1,117	0,9005	0,9942	0,9942
0,400	0,6816	0,1894	1,141	0,8837	0,9919	0,9919
0,450	0,6384	0,2207	1,168	0,8660	0,9890	0,9889
0,500	0,5942	0,2545	1,198	0,8472	0,9853	0,9852
0,550	0,5489	0,2913	1,233	0,8271	0,9805	0,9804
0,600	0,5022	0,3314	1,274	0,8056	0,9746	0,9744
0,650	0,4540	0,3755	1,322	0,7822	0,9669	0,9667
0,700	0,4040	0,4245	1,381	0,7565	0,9571	0,9566
0,750	0,3518	0,4795	1,456	0,7278	0,9440	0,9432
0,760	0,3410	0,4914	1,473	0,7216	0,9409	0,9400
0,770	0,3301	0,5036	1,491	0,7152	0,9376	0,9366
0,780	0,3191	0,5161	1,511	0,7086	0,9340	0,9329
0,790	0,3080	0,5291	1,532	0,7019	0,9302	0,9290
0,800	0,2967	0,5423	1,554	0,6949	0,9262	0,9248
0,810	0,2853	0,5560	1,578	0,6876	0,9219	0,9203
0,820	0,2738	0,5702	1,603	0,6801	0,9172	0,9155
0,830	0,2620	0,5848	1,631	0,6723	0,9121	0,9102
0,840	0,2501	0,5999	1,660	0,6642	0,9057	0,9045
0,850	0,2380	0,6155	1,693	0,6557	0,9008	0,8983
0,860	0,2257	0,6317	1,729	0,6468	0,8944	0,8916

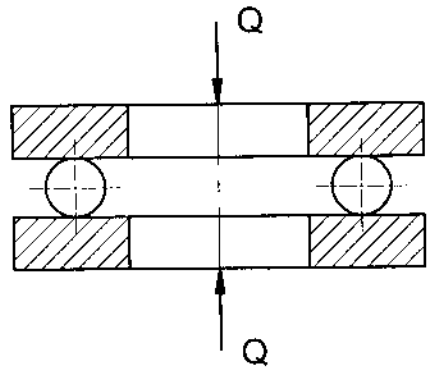
0,870	0,2132	0,6486	1,768	0,6374	0,8873	0,8841
0,880	0,2004	0,6662	1,812	0,6276	0,8766	0,8759
0,890	0,1873	0,6845	1,861	0,6171	0,8710	0,8668
0,900	0,1739	0,7037	1,916	0,6059	0,8614	0,8566
0,910	0,1603	0,7238	1,979	0,5938	0,8507	0,8451
0,920	0,1462	0,7449	2,053	0,5808	0,8386	0,8320
0,930	0,1317	0,7673	2,141	0,5665	0,8246	0,8168
0,940	0,1166	0,7911	2,248	0,5505	0,8082	0,7990
0,950	0,1010	0,8166	2,381	0,5325	0,7887	0,7775
0,955	0,09287	0,8300	2,463	0,5224	0,7774	0,7650
0,960	0,08456	0,8441	2,557	0,5114	0,7647	0,7509
0,965	0,07600	0,8587	2,669	0,4993	0,7504	0,7349
0,970	0,06715	0,8741	2,805	0,4858	0,7338	0,7163
0,975	0,05797	0,8904	2,975	0,4704	0,7144	0,6943
0,980	0,04838	0,9077	3,199	0,4524	0,6909	0,6675
0,981	0,04639	0,9113	3,253	0,4484	0,6856	0,6613
0,982	0,04439	0,9150	3,311	0,4442	0,6799	0,6549
0,983	0,04237	0,9187	3,373	0,4398	0,6740	0,6481
0,984	0,04032	0,9225	3,441	0,4352	0,6678	0,6409
0,985	0,03823	0,9264	3,514	0,4304	0,6612	0,6333
0,986	0,03613	0,9303	3,594	0,4253	0,6542	0,6251
0,987	0,03400	0,9342	3,683	0,4199	0,6467	0,6161
0,988	0,03183	0,9383	3,781	0,4142	0,6387	0,6071
0,989	0,02962	0,9425	3,890	0,4080	0,6300	0,5970
0,990	0,02737	0,9467	4,014	0,4014	0,6206	0,5860
0,991	0,02508	0,9511	4,156	0,3942	0,6104	0,5741
0,992	0,02273	0,9556	4,320	0,3864	0,5990	0,5608
0,993	0,02033	0,9601	4,515	0,3777	0,5864	0,5460
0,994	0,01787	0,9649	4,750	0,3680	0,5721	0,5292
0,995	0,01533	0,9698	5,046	0,3568	0,5555	0,5096
0,996	0,01269	0,9749	5,432	0,3436	0,5358	0,4864
0,997	0,009934	0,9803	5,976	0,3273	0,5112	0,4574
0,998	00,007018	0,9861	7,637	0,3058	0,4783	0,4186
0,999	0,003850	0,9923	8,609	0,2722	0,4267	0,3579

Bảng 6.2. Kích thước diện tích tiếp xúc, áp lực tiếp xúc lớn nhất và độ dịch gần của hai vật thể

Dạng tiếp xúc và vị trí tương đối của vật thể	Kích thước diện tích tiếp xúc	Áp lực lớn nhất giữa hai vật tiếp xúc	Độ dịch gần của hai vật thể
Hai vật thể giới hạn bởi các mặt cong, tiếp xúc tại một điểm	Bán trục lớn của elip $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{\eta P}{\sum k}}$ Bán trục nhỏ của elip : $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2}\frac{\eta P}{\sum k}}$	$p_o = n_p \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{\sum k}{\eta}\right)^2 .P}$ $n_p = \frac{1}{n_a n_b}$	$\delta = n_\delta \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}\eta^2(\sum k).P^2}$
Hai vật hình cầu, bán kính R_1, R_2	Bán kính hình tròn tiếp xúc: $a = b = 0,9086\sqrt[3]{\eta P\frac{R_1R_2}{(R_2+R_1)}}$	$p_o = 0,5784\sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2}\left(\frac{R_2+R_1}{R_2R_1}\right)^2}$	$\delta = 0,8255\sqrt[3]{(\eta P)^2.\left(\frac{R_2+R_1}{R_1R_2}\right)}$
Hai vật hình cầu có cùng môđun đàn hồi và hệ số $\nu = 0,3$	$a = b = 1,109\sqrt[3]{\frac{P}{E}.\frac{R_1R_2}{(R_2+R_1)}}$	$p_o = 0,3880\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{R_2+R_1}{R_1R_2}\right)^2}$	$\delta = 1,231\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2\frac{(R_2+R_1)}{R_1R_2}}$

Dạng tiếp xúc và vị trí tương đối của vật thể	Kích thước diện tích tiếp xúc	Áp lực lớn nhất giữa hai vật tiếp xúc	Độ dịch gần của hai vật thể
Hai hình trụ có bán kính bằng nhau, trục vuông góc với nhau	Bán kính hình tròn tiếp xúc : $a = b = 0{,}9086\sqrt[3]{\eta PR}$	$p_o = 0{,}5784\sqrt[3]{\dfrac{P}{\eta^2 R}}$	$\delta = 0{,}8255\sqrt[3]{\dfrac{(\eta P)^2}{R}}$
Hai hình trụ như trên với cùng môđun đàn hồi và $\nu = 0{,}3$	$a = b = 1{,}109\sqrt[3]{\dfrac{PR}{E}}$	$p_o = 0{,}3880\sqrt[3]{P\left(\dfrac{E}{R}\right)^2}$	$\delta = 1{,}231\sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{R}}$
Hai hình trụ có bán kính R_1, R_2, trục song song với nhau; chịu lực q phân bố trên một đơn vị dài	Một nửa chiều rộng dải tiếp xúc chữ nhật : $b = 1{,}128\sqrt{\eta q \dfrac{R_1 R_2}{(R_2 + R_1)}}$	$p_o = 0{,}5642\sqrt{\dfrac{q}{\eta} \cdot \dfrac{(R_2 + R_1)}{R_1 R_2}}$	$\delta = \dfrac{2q}{\pi}\left[\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1}\left(\ln\dfrac{2R_1}{b} + 0.407\right) + \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}\left(\ln\dfrac{2R_2}{b} + 0{,}407\right)\right]$
Hai hình trụ như trên với cùng môđun đàn hồi và $\nu = 0{,}3$	$b = 1{,}522\sqrt{\dfrac{q}{E}\dfrac{R_1 R_2}{(R_2 + R_1)}}$	$p_o = 0{,}4180\sqrt{qE\dfrac{(R_2 + R_1)}{R_1 R_2}}$	$\delta = 0{,}579\dfrac{q}{E}\left[\ln\dfrac{4R_1 R_2}{b^2} + 0{,}814\right]$

Ví dụ 6.2. Cho một ổ bi chắn với vòng bi phẳng không có rãnh (hình 6.10). Xác định :



Hình 6.10

a) Lực nén cho phép Q theo chiều trục ?

b) Kích thước của diện tích tiếp xúc ?

c) Độ dịch gần giữa hai vòng bi ?

Biết số bi i = 20, đường kính viên bi d = 1 cm. Vật liệu làm bi và vòng bi là thép crôm có áp suất lớn nhất cho phép trên diện tích tiếp xúc $[p_0]$ = 350.000 N/cm^2, E = 21,2.10^6 N/cm^2.

Giải:

$$p_0 = 0,3880\sqrt[3]{PE\left(\frac{R_2 \pm R_1}{R_1R_2}\right)^2} \quad ; \quad \frac{R_2 \pm R_1}{R_2R_1} = \frac{1}{R} = \frac{2}{d}$$

$$p_0 = 0,3880\sqrt[3]{\frac{4PE^2}{d^2}}.$$

Thay $P = \dfrac{Q}{0,8i} \Rightarrow p_0 = 0,3880\sqrt[3]{\dfrac{4\dfrac{Q}{0,8i}.E^2}{d^2}}$

Rút ra: $Q = 3,42\dfrac{p_0^3.d^2.i}{E^2} \Rightarrow Q = 3,42\dfrac{350000^3.1^2.20}{\left(21,2.10^6\right)^2} = 6530N$

Tải trọng tác dụng lên từng viên bi là :

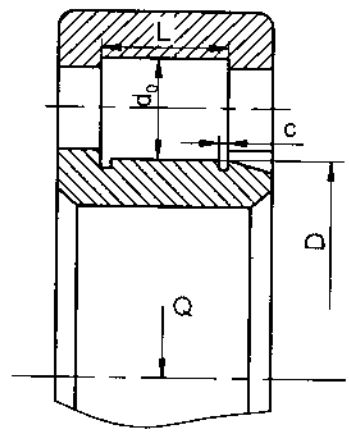
$$P = \frac{Q}{0,8i} = \frac{6530}{0,8.20} = 408N$$

$$a = b = 1,109\sqrt[3]{\frac{408}{21,2.10^6}.\frac{1}{2}} = 0,024cm$$

$$\delta = 1,231\sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2.\frac{2}{d}} = 1,231\sqrt[3]{\left(\frac{408}{21,2.10^6}\right)^2.\frac{2}{1}} = 0,0011cm$$

2d = 2.0,0011 = 0,0022 cm

Ví dụ 6.3. Một ổ bi trụ, kích thước ngoài 120 × 260 × 86 mm, chịu lực Q = 45000N. Kích thước của viên bi trụ: d_o = 36 mm, l = 58 mm. Số viên bi i = 13. Rãnh tra dầu c = 4mm. Đường kính lớn nhất của vòng bi trong D = 154 mm (hình 6.11).



Hình 6.11

Xác định kích thước diện tích tiếp xúc giữa viên bi; vòng bi trong và áp lực lớn nhất tác dụng lên diện tích đó. Cho $E = 2,12.10^7$ N/cm^2; $\nu = 0,3$.

Giải. Lực tác động lên mỗi viên bi là:

$$P = 4,6.\frac{Q}{i} = 4,6.\frac{45000}{13} = 15900N$$

l = L – 2c = 58 – 2.4 = 50 mm

$$q = \frac{P}{l} = \frac{15900}{5} = 3180\,N/cm$$

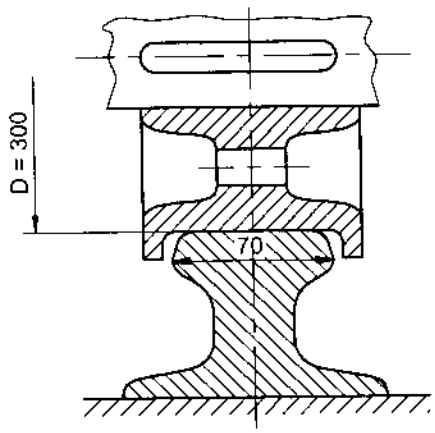
$$b = 1,52\sqrt{\frac{q}{E}.\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = 1,52\sqrt{\frac{3180}{21,2.10^6}\frac{1,8.77}{1,8+77}} = 0,0225$$

=> 2b = 0,045 mm

$$p_0 = 0,418\sqrt{qE\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = 0,418\sqrt{3180.21,2.10^6.\frac{1,8+77}{1,8.77}} = 89900\,N/cm^2$$

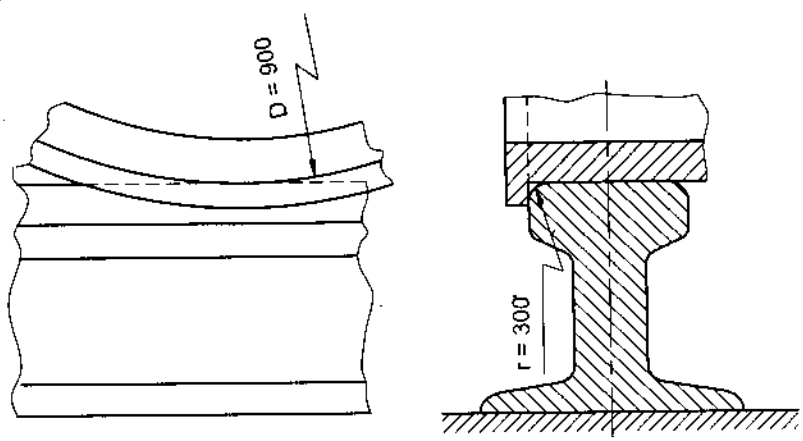
BÀI TẬP CHƯƠNG 6

6.1. Xác định tải trọng cho phép tác dụng lên bánh xe của một cần trục. Mũ ray là phẳng. Bánh xe và ray đều bằng thép có $E = 2.10^5 N/mm^2$, $[\sigma]_{tx} = 600N/mm^2$ (hình 6.12).



Hình 6.12

6.2. Xác định kích thước của diện tích tiếp xúc và áp suất lớn nhất giữa đường ray và bánh xe hoả. Toa xe có 8 bánh và trọng lượng Q = 600kN. Đường kính bánh xe D = 900mm và bán kính núm ray r = 300mm. Lấy $E = 2.10^7 N/cm^2$; v = 0,3 (hình 6.13).



Hình 6.13

6.3. Trên hình 6.14 biểu diễn một ổ bi đơn. Xác định:

a) Kích thước diện tích tiếp xúc giữa viên bi với vòng bi?

b) Áp lực lớn nhất p_0 tác dụng lên diện tích tiếp xúc.

Cho kích thước ổ bi: rộng 28mm; bán kính ngoài 75mm; bán kính trong 42.5mm (hình 6.24)

– Bán kính ngoài nhỏ nhất của vòng bi trong: R_t = 48,83mm.

– Bán kính trong lớn nhất của vòng bi ngoài R_n = 48,83mm.

– Bán kính rãnh của vòng bi trong và ngoài: r = 10,23mm.

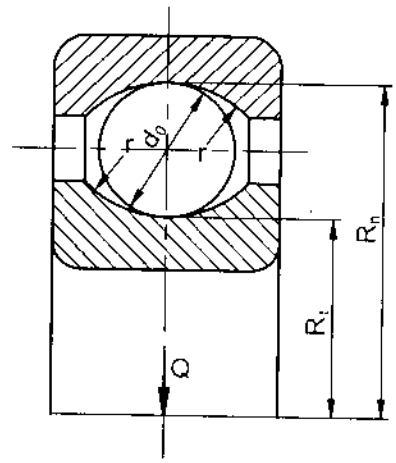
– Đường kính viên bi: d_0 = 19,8mm;

– Số viên bi: i = 10;

– Lực tác động lên ổ bi: Q = 34000N;

– Môđun đàn hồi: E = $21,2.10^6$N/cm;

– Hệ số Poátxông: ν = 0,3.

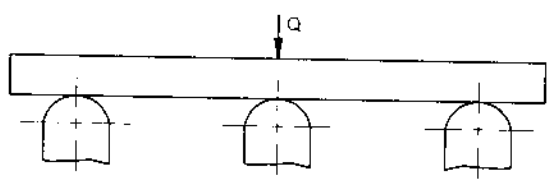


Hình 6.14

Chú thích: Tải trọng Q không truyền đều xuống mỗi viên bi, nên viên bi ở vị trí bất lợi nhất sẽ chịu một lực $P = 5.\frac{Q}{i}$

6.4. Một tấm tròn bằng thép chịu lực Q = 7,5kN ở tâm và được đặt trên ba cột thép có đầu mút hình bán cầu, bán kính R = 15mm. Ba cột này được bố trí tại đỉnh của tam giác đều, do đó lực Q phân bố đều lên các cột (hình 6.15). Tính kích thước diện tích tiếp xúc, áp lực lớn nhất, độ dịch gần giữa tấm và đầu cột. Nếu tấm bằng gang thì các đại lượng này sẽ thay đổi như thế nào? Cho biết:

- $E_{thép} = 2,1.10^4$kN/cm^2; $\nu_{thép}$ = 0,28
- $E_{gang} = 1,2.10^4$kN/cm^2; ν_{gang} = 0,25



Hình 6.15

ĐÁP SỐ VÀ CHỈ DẪN

Chương 1

1.2. $S = J_1^2 + 2J_2 = \text{const}$, với J_1, J_2 là các bất biến thứ nhất và thứ hai của tenxơ ứng suất.

1.3. a) $\vec{p}_v = -\frac{9}{7}\vec{i} + \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{10}{7}\vec{k}$

b) Áp dụng công thức 1.3.

1.4. a) $\vec{p}_v = 11\vec{i} + 12\vec{j} + 9\vec{k}$

b) $\vec{p}_v = \dfrac{21\vec{i} + 14\vec{j} + 21\vec{k}}{\sqrt{5}}$

1.5. $a = b = c = -\frac{1}{2}$. Tenxơ ứng suất : $\begin{pmatrix} \sigma & -\frac{\sigma}{2} & -\frac{\sigma}{2} \\ -\frac{\sigma}{2} & \sigma & -\frac{\sigma}{2} \\ -\frac{\sigma}{2} & -\frac{\sigma}{2} & \sigma \end{pmatrix}$

1.6. a) $\vec{p}_v = \frac{1}{3}C(14\vec{i} + 18\vec{j} - 8\vec{k})$

b) $\vec{p}_v = \frac{1}{9}C(-28\vec{i} + 16\vec{k})$

c) $\sigma_1 = |C|\sqrt{65}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -|C|\sqrt{65}$; $\tau_{max} = |C|\sqrt{65}$

1.7. $\sigma_1 = 8$; $\sigma_2 = 2$; $\sigma_3 = -2$; (trạng thái ứng suất khối)

$\vec{v}_1 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$; $\vec{v}_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; $\vec{v}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}$

1.8. $\sigma_1 = 3\tau$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; (trạng thái ứng suất đơn).

$$\vec{v}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\};\ \vec{v}_2 = \left\{0;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\};\ \vec{v}_3 = \left\{-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

1.9. $\vec{p}_v = \frac{1}{\sqrt{3}}(12\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k})$

$$\sigma = \vec{p}_v.\vec{v} = 3 \quad \text{với } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

1.10. a) $T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\varepsilon_1 = 1 + \sqrt{6};\ \varepsilon_2 = 2;\ \varepsilon_3 = 1 - \sqrt{6}$ (trạng thái biến dạng khối).

1.11. $\varepsilon_1 = 4$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$; (trạng thái biến dạng khối).

$$\vec{v}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\};\ \vec{v}_2 = \left\{0;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\};\ \vec{v}_3 = \left\{-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$$

1.12. a) $\vec{v}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\};\ \vec{v}_2 = \left\{0;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ là véctơ chỉ phương của AC và CB, áp dụng công thức (1.23) ta tính được sự thay đổi độ dài của AC và CB.

b) $\vec{\nu} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right\};\ \vec{\mu} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right\}$ là véctơ chỉ phương của AD và CD, áp dụng công thức (1.25), ta tìm được $\gamma = 0$, hay góc $A\hat{D}C = \frac{\pi}{2}$, không thay đổi sau khi biến dạng.

1.13. $A(5;0;6)$; $B(3;4;0)$; $\overline{A'B'} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{56}$

1.14. a) $T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}$ (trạng thái biến dạng phẳng)

b) Trên cạnh OA: $u = v = w = 0$

Trên cạnh OB: $u = 0$; $v = Ax_3$; $w = 0$

Trên cạnh OC: $u = 0$; $v = 0$; $w = Ax_2$.

1.15. a) $T_\varepsilon = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = -B$;

c) $\varepsilon_1 = A$; $\varepsilon_2 = \dfrac{(-A + A\sqrt{5})}{2}$; $\varepsilon_3 = \dfrac{(-A - A\sqrt{5})}{2}$

(trạng thái biến dạng khối)

Chương 2

2.1. a) Có

b) Không

2.2. $A_1 + B_1 + 2C_2 = 0$; $C_1 = 4$; A_0, B_0, C_0 là hằng số tuỳ ý.

2.3. $\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \dfrac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0$; E và μ không ảnh hưởng gì.

2.4. a) $\rho X = 0$; $\rho Y = 0$; $\rho Z = -4x_3$;

b) $\sigma_1 = 8a$; $\sigma_2 = a$; $\sigma_3 = -a$; Trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng là trạng thái khối

c) $\tau_{max}^{(P)} = 4,5a$;

2.5. Áp dụng định luật Húc tổng quát, với trạng thái ứng suất phẳng: $\sigma_x = 20MPa = 2kN/cm^2$; $\sigma_y = 30MPa = 3kN/cm^2$; $\tau_{xy} = 0$, ta có:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 0,55.10^{-4} \\ \varepsilon_y = 1,2.10^{-4} \\ \varepsilon_z = -0,75.10^{-4} \end{cases}$$ hay sự thay đổi kích thước bằng:

$$\begin{cases} \Delta a = 1,65.10^{-3}(cm) \\ \Delta b = 2,4.10^{-3}(cm) \\ \Delta t = -0,3.10^{-4}(cm) \end{cases}$$

Trong đó a = 30cm, b = 20cm , t = 0,4 cm.

2.6. Chỉ dẫn : Tại các cạnh ngàm, chuyển vị u = v = 0 ; trên cạnh không có ngoại lực, ứng suất pháp và ứng suất tiếp bằng không ; trên cạnh chịu tải trọng, sử dụng quy ước dấu của ứng suất, phân tích ngoại lực theo phương x và y.

2.7. Chỉ dẫn: Thay vào hệ phương trình cân bằng tĩnh học, với lực khối $\vec{F} = 0$, sau đó áp dụng định luật Húc, tính các thành phần biến dạng và kiểm tra điều kiện tương thích theo Saint-Venant.

2.8. Chỉ dẫn: Trường hợp b) có các thành phần ứng suất là cộng tác dụng của trường hợp a) với lực P/2 đặt tại gốc tọa độ, và lực P/2 đặt tại x' = x – a ; y' = 0 .

2.9. a) Trên cạnh OA (x = ytgβ):

$$\begin{cases} -p\cos\beta = \sigma_x \cos\beta - \tau_{xy}\sin\beta \\ p\sin\beta = \tau_{xy}\cos\beta - \sigma_y \sin\beta \end{cases}$$

Trên cạnh OB (x = 0): $\begin{cases} \gamma y = \sigma_x(-1) + \tau_{xy}.0 = -\sigma_x \\ 0 = \tau_{xy}(-1) + \sigma_y.0 \Rightarrow \tau_{xy} = 0 \end{cases}$

b) Trên cạnh OA (x = –ytgβ): $\begin{cases} \gamma y\cos\alpha = \sigma_x \cos\alpha - \tau_{xy}\sin\alpha \\ \gamma y\sin\alpha = \tau_{xy}\cos\alpha - \sigma_y \sin\alpha \end{cases}$

Trên cạnh OB (x = ytgβ):

$$\begin{cases} -q\cos\beta = \sigma_x \cos\beta - \tau_{xy}\sin\beta \\ q\sin\beta = \tau_{xy}\cos\beta - \sigma_y \sin\beta \end{cases}$$

2.10. * Mặt cắt ngang hình tròn (hình B2.10 a):

Ở hai đầu thanh hình trụ ($\vec{\nu} \equiv x_3$):

$$\begin{cases} X_\nu = \pm Cx_2 \\ Y_\nu = \pm Cx_1 \\ Z_\nu = 0 \end{cases} \qquad \text{Với:} \quad \begin{matrix} x_1 = a\cos\varphi \\ x_2 = a\sin\varphi \end{matrix}$$

Ở mặt bên của hình trụ ($\vec{\nu} \perp x_3$):

$$\begin{cases} X_\nu = Y_\nu = 0 \\ Z_\nu = -Cx_2\ell + Cx_1 m \\ \quad = -C.a\sin\varphi.\cos\varphi + -C.a\cos\varphi.\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

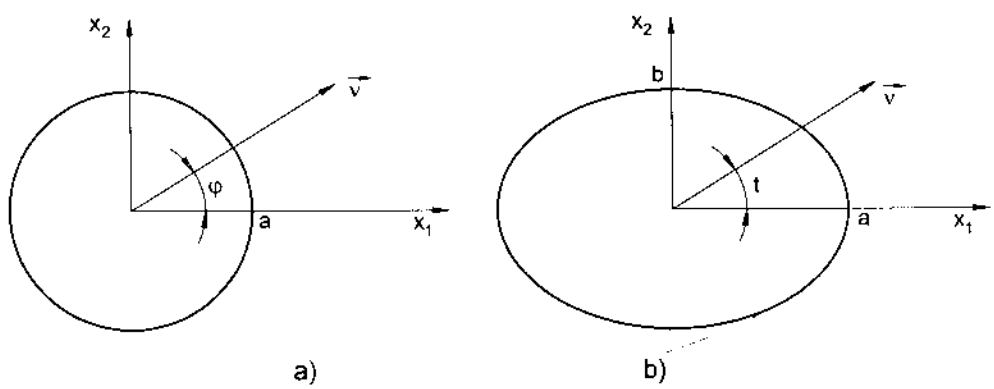
* Mặt cắt ngang elip (hình B2.10 b):

Ở hai đầu thanh hình trụ: $\vec{\nu} \equiv x_3 (-\pi \le t \le \pi)$

$$\begin{cases} X_\nu = \pm Cx_2 \\ Y_\nu = \pm Cx_1 \\ Z_\nu = 0 \end{cases} \qquad \text{với :} \quad \begin{matrix} x_1 = a\cos t \\ x_2 = b\sin t \end{matrix}$$

Ở mặt bên của hình trụ ($\vec{\nu} \perp x_3$):

$$\begin{cases} X_\nu = Y_\nu = 0 \\ Z_\nu = -Cx_2\ell + Cx_1 m \\ \quad = -C.b\sin t.\cos t + C.a\cos t.\sin t \\ \quad = C\dfrac{\sin 2t}{2}(a-b) \end{cases}$$



Hình B2.10

Chương 3

3.1. Các thành phần của ten-xơ ứng suất :

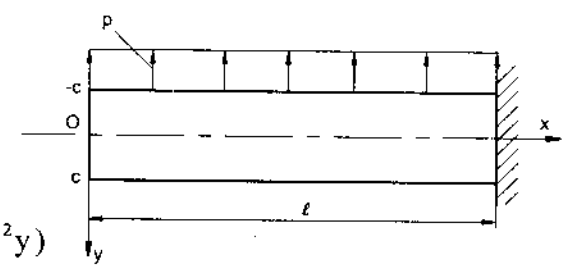
$$\begin{cases} \sigma_{11} = 24(x_1^2 - 3x_2^2) \\ \sigma_{22} = 24(x_1^2 - x_2^2) \\ \sigma_{33} = 48\nu(x_1^2 - 2x_2^2) \\ \sigma_{12} = -48x_1x_2 \; ; \; \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

Các thành phần của ten-xơ biến dạng:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\{24(x_1^2 - 3x_2^2) - \nu[24(x_1^2 - x_2^2) + 48\nu(x_1^2 - 2x_2^2)]\} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\{24(x_1^2 - x_2^2) - \nu[24(x_1^2 - 3x_2^2) + 48\nu(x_1^2 - 2x_2^2)]\} \\ \varepsilon_{12} = -\dfrac{48x_1x_2}{G} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \end{cases}$$

3.2.

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{3q}{4c^3}(x^2y - \dfrac{2}{3}y^3 + \dfrac{2}{5}c^2y) \\ \sigma_y = \dfrac{q}{4c^3}(y^3 - 3c^2y + 2c^3) \\ \tau_{xy} = -\dfrac{3qx}{4c^3}(y^2 - c^2) \end{cases}$$



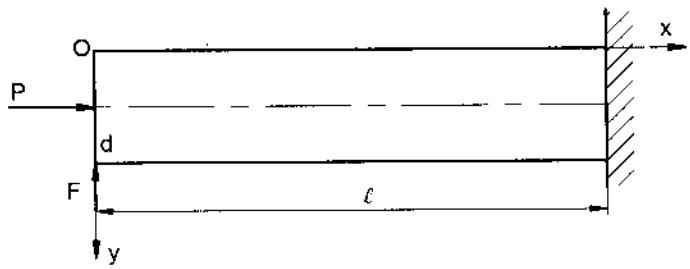
Hình B3.2

Thay vào các biểu thức liên hệ nội lực và ứng suất, ta có dầm chịu liên kết và tải trọng như hình B3.2.

3.3.

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{6Fx}{d^3}(d-2y) - \dfrac{P}{d} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \dfrac{6Fy}{d^3}(d-y) \end{cases}$$

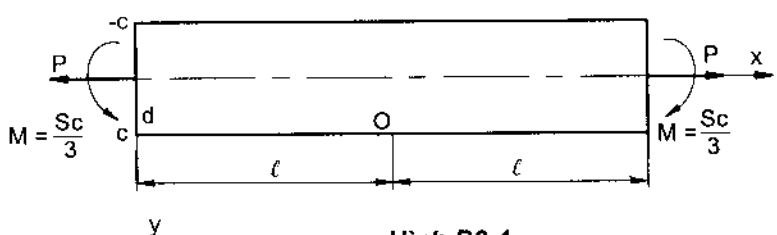
Thanh vừa chịu uốn, vừa chịu nén bởi lực F và P như hình B3.3.



Hình B3.3

3.4. $\sigma_x = -\dfrac{S.y}{2c^2} + \dfrac{P}{2c}$; $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$

Thanh vừa chịu kéo, vừa chịu nén bởi lực P và mômen ngẫu lực $M = \dfrac{S.c}{3}$ như hình B3.4.



Hình B3.4

3.5. $$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{12}{d^3}[P(\ell - x) + M_0]y \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \dfrac{6P}{d^3}(\dfrac{d^2}{4} - y^2) \end{cases}$$

3.6. $$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{N}{h} + \dfrac{12Pxy}{h^3} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \dfrac{6P}{h^3}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right) \end{cases}$$

3.7. $$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{px}{20d}[5y(x^2 - \ell^2) - 10\,y^3 + 6d^2y] \\ \sigma_y = \dfrac{px}{4d^3}[y^3 - 3yd^2 - 2\,d^3] \\ \tau_{xy} = \dfrac{p(d^2 - y^2)}{40d^3}(15x^2 - 5\ell^2 + d^2 - 5y^2) \end{cases}$$

3.8.

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{2T}{\pi a^4 G};\ \tau_{zx} = -\frac{2Ty}{\pi a^4};\ \tau_{zy} = \frac{2Tx}{\pi a^4};\ \tau_{zs} = -\frac{2T.r}{\pi a^4};\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Độ vênh $w \equiv 0$.

3.9. Hằng số xoắn $J = \dfrac{\pi a^4}{2}$; $\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{T}{G.J}$

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\dfrac{d\theta}{dz}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - y\right) = -G\dfrac{d\theta}{dz}.y\ ; \\ \tau_{zy} = G\dfrac{d\theta}{dz}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + x\right) = G\dfrac{d\theta}{dz}.x \\ w = \dfrac{d\theta}{dz}.\psi = 0 \end{cases}$$

3.10. Phương trình chu tuyến của tam giác đều ABC có dạng:

$$(x - \sqrt{3}\,y + 3a)(x + \sqrt{3}\,y + 3a)(x - a) = 0$$

Ta thấy hàm φ thoả mãn điều kiện trên biên của tam giác; thay vào phương trình $\Delta\varphi = -2G\dfrac{d\theta}{dz}$, ta có: $K = -\dfrac{G}{6a}\dfrac{d\theta}{dz}$. Từ liên hệ giữa mômen xoắn T và hàm φ, ta có:

$$T = \frac{27}{5\sqrt{3}} G \frac{d\theta}{dz} a^4 = \frac{3}{5} G \frac{d\theta}{dz} J_p$$; với $J_p = 3\sqrt{3}\, a^4$ là mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang .

Từ đó : $\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{5T}{9\sqrt{3}\, Ga^4}$

Các thành phần ứng suất tiếp: $\begin{cases} \tau_{zx} = G \dfrac{d\theta}{dz} \dfrac{(x-a)y}{a} \\ \tau_{zy} = G \dfrac{d\theta}{dz} \dfrac{(x^2 + 2ax - y^2)}{2a} \end{cases}$

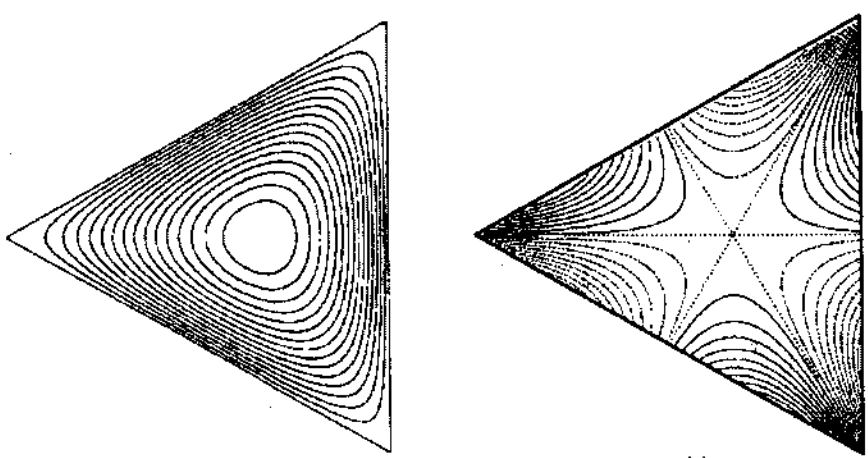
Do $\tau_{zx} = 0$ tại $x = a$ nên ứng suất toàn phần trên cạnh đó bằng :

$$\tau_{tp} = \tau_{zy}(a, y) = G \frac{d\theta}{dz} \frac{(3a^2 - y^2)}{2a}$$

Ứng suất lớn nhất đạt được tại điểm giữa các cạnh :

$$\tau_{max} = \tau_{zy}(a, 0) = \frac{3}{2} G \frac{d\theta}{dz} a = \frac{5\sqrt{3}\, T}{18a^3}$$

Độ vênh : $w = \dfrac{d\theta}{dz} . \dfrac{y(3x^2 - y^2)}{6a}$ là hàm lẻ đối với y .



a) b)

Hình B3.10

a) Đường đồng mức ứng suất ; b) Đường đồng mức độ vênh.

3.12. $\Delta\varphi = -2G\dfrac{d\theta}{dz} = \text{const}$; $\varphi|_s = 0$; $(x = \pm\dfrac{c}{2})$.

Vậy φ là hàm ứng suất Prandtl.

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \\ \tau_{zy} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2G\dfrac{d\theta}{dz}.x \end{cases}$$

3.13. Hướng dẫn: sử dụng công thức $T = \iint\limits_F 2\varphi(x,y)dxdy$ và thay giá trị của φ tương tự trong bài 3.11. Miền tích phân lấy trên diện tích tam giác:

$$-\frac{c_0}{2} \le x \le \frac{c_0}{2}\ ;\ y = \pm\frac{2b}{c_0}x + b$$

3.14. $\Delta\varphi = -2G\dfrac{d\theta}{dz}.\dfrac{(a^2+b^2)}{a^2} = \text{const}$

$\varphi|_s = 0$; Vậy φ là hàm ứng suất Prandtl.

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -2G\dfrac{d\theta}{dz}.y \\ \tau_{zy} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2G\dfrac{d\theta}{dz}.\dfrac{b^2}{a^2}x \end{cases}$$

Với $\dfrac{b}{a}$ rất nhỏ $\Rightarrow \tau_{yz} \approx 0$

$$T = \iint\limits_F 2\varphi(x,y)dxdy \approx \pi ab^3 G\frac{d\theta}{dz};\ \tau_{max} \approx 2G\frac{d\theta}{dz}b = \frac{2T}{\pi ab^2}$$

3.15. Thay $\varphi_0(x, y) = X(x).Y(y)$ vào phương trình $\Delta\varphi = 0$ ta thu được hệ :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \end{cases}$$ với λ là hằng số .

Nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x \\ Y(y) = C\text{sh}\lambda y + D\text{ch}\lambda y \end{cases}$$

Do tính chất đối xứng theo y nên ta có $A = C = 0$, thay vào điều kiện biên:

$\varphi_0(\pm a, y) = 0$; $\varphi_0(x, \pm b) = -G\dfrac{d\theta}{dz}(a^2 - x^2)$, ta thu được :

$$\lambda = \frac{n\pi}{2a} ; n = 1,3,5...$$

Áp dụng định lý chồng chất nghiệm, ta có:

$$\varphi_0 = \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi x}{2a} ch\frac{n\pi y}{2a} ; B_n = -32G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2(-1)^{(n-1)/2}}{n^3\pi^3 ch\dfrac{n\pi b}{2a}}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất $\Delta\varphi = -2G\dfrac{d\theta}{dz}$ là:

$$\varphi = G\frac{d\theta}{dz}(a^2 - x^2) - 32G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3 ch\dfrac{n\pi b}{2a}}\cos\frac{n\pi x}{2a} ch\frac{n\pi y}{2a} ;$$

Các thành phần ứng suất tiếp:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -16G\dfrac{d\theta}{dz}\dfrac{a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2 ch\dfrac{n\pi b}{2a}}\cos\dfrac{n\pi x}{2a} ch\dfrac{n\pi y}{2a} \\ \tau_{zy} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2G\dfrac{d\theta}{dz}x - 16G\dfrac{d\theta}{dz}\dfrac{a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2 ch\dfrac{n\pi b}{2a}}\sin\dfrac{n\pi x}{2a} ch\dfrac{n\pi y}{2a} \end{cases}$$

Ứng suất lớn nhất đạt được ở điểm giữa cạnh dài :

$$\tau_{max} = \tau_{zy}\Big|_{(a,0)} = 2G\frac{d\theta}{dz}a - 16G\frac{d\theta}{dz}\frac{a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{1}{n^2 ch\dfrac{n\pi b}{2a}}$$

Độ vênh có dạng :

$$w = \frac{d\theta}{dz}xy - 32G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2 ch\dfrac{n\pi b}{2a}}\sin\frac{n\pi x}{2a} sh\frac{n\pi y}{2a}$$

Ta thấy độ vênh đạt trị số lớn nhất tại các góc của hình chữ nhật.

Mômen xoắn : $T = 16G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^3b}{3} - 1024G\frac{d\theta}{dz}\frac{a^4}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{1}{n^3}\text{th}\frac{n\pi b}{2a}$;

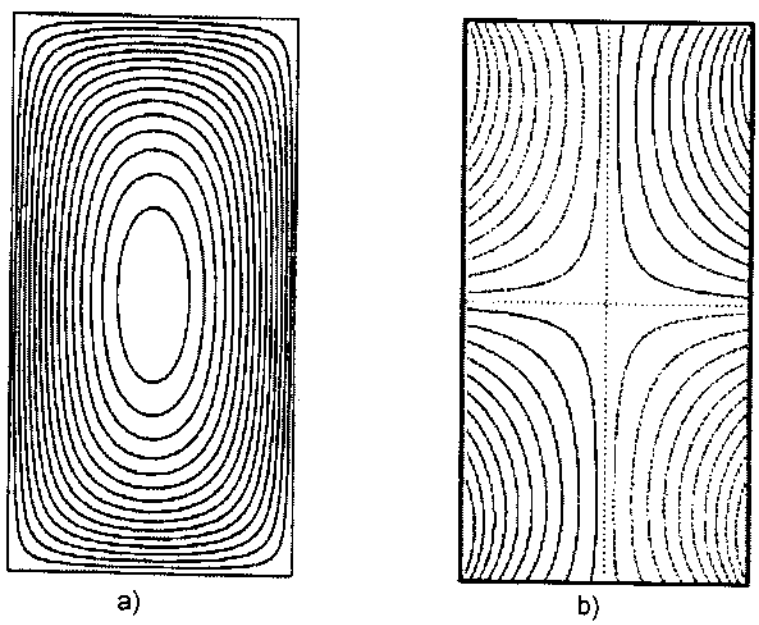
Đối với mặt cắt ngang chữ nhật hẹp (a << b), ta có:

$$\text{ch}\frac{n\pi b}{2a} \to \infty \text{ ; th}\frac{n\pi b}{2a} \to 0 \text{ khi } b/a \to \infty.$$

Do đó : $\varphi = G\frac{d\theta}{dz}(a^2 - x^2)$; $\tau_{max} = 2G\frac{d\theta}{dz}a$; $T = \frac{16}{3}G\frac{d\theta}{dz}a^3b$

Hằng số xoắn của mặt cắt ngang chữ nhật hẹp $J = \frac{16}{3}a^3b$.

Các công thức trên cũng được áp dụng cho mặt cắt ngang thành mỏng hở.



Hình B3.15

a) Đường đồng mức ứng suất; b) Đường đồng mức độ vênh (a/b =0,5).

Chương 4

4.1. $P_a = 15{,}2\ MN/m^2$

4.2. $b = a = 1{,}76$ cm

4.3. $P_a = 1{,}7\ kN/cm^2$

$\Delta_a = 0{,}001$ mm; $\Delta_b = 0{,}0066$ mm

4.4. Chỉ dẫn:

Trường hợp ống bịt kín hai đầu: trạng thái ứng suất khối với $\sigma_z = -\dfrac{p\pi a^2}{\pi(b^2 - a^2)}$ (nén) , ứng suất σ_r và σ_θ xác định theo công thức (4.18). So sánh các ứng suất đó để tìm ứng suất chính rồi áp dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất $\sigma^{td} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$ để tìm bán kính ngoài b .

Trường hợp ống hở hai đầu: trạng thái ứng suất phẳng với $\sigma_z = 0$.

4.5. Chỉ dẫn:

Do lõi thép tuyệt đối cứng nên chuyển vị $u\big|_{r=a} = 0$, từ đó tính được áp lực tiếp xúc p_0 theo công thức (4.24, 4.25) với $p_a = p_0$; $p_b = p$. Ống thoả mãn điều kiện bền theo thuyết bền M_0.

4.6. $\Delta = 0{,}0016$ cm

4.7. Ứng suất pháp theo phương bán kính và phương vòng tại các điểm A, B, C có giá trị như trong bảng sau:

Trường hợp	σ_r (kN/cm^2)			σ_θ (kN/cm^2)		
	Ống thép		Ống đồng	Ống thép		Ống đồng
	Điểm			Điểm		
	A	B	C	A	B	C
a)	-20	-5,77	0	18	3,71	9,62
b)	-20	10,09	0	6,5	-3,49	16,82
c)	0	-6,05	0	-16,1	-10,08	10,08

4.8. Chỉ dẫn: Coi ống trong (đặc) chỉ chịu áp lực tiếp xúc p_c với a = 0, $c = r_1$; ống ngoài vừa chịu áp suất bên trong p_c và bên ngoài p tại $b = r_2$. Áp dụng các công thức (4.21, 4.22) với các đặc trưng vật liệu của từng ống,

ta tính được chuyển vị tại $r = r_1$ của hai ống rồi cho chúng bằng nhau (do hai ống được lồng khít và chuyển vị là liên tục), ta rút ra ứng suất p_c. Từ đó tính được ứng suất của từng ống theo công thức (4.17).

4.9. Chỉ dẫn: Đây là bài toán ghép hai ống, trong đó ống trong là đặc, tuyệt đối cứng: $u_1\big|_{r=r_1} = 0$; Ứng suất tiếp xúc khi ghép ống được xác định từ điều kiện: $u_2\big|_{r=r_1} = \delta$. Từ đó áp dụng công thức (4.17) đối với ống ngoài và (4.19) đối với ống trong để xác định ứng suất σ_r và σ_θ . Chuyển vị tính theo công thức (4.21 , 4.22)

4.10. Chỉ dẫn : Đây là trường hợp riêng của lời giải Michell (4.13); áp dụng điều kiện biên:

$$\begin{cases} \sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0 \\ \tau_{r\theta}(a) = \tau_{r\theta}(b) = 0 \\ \int_a^b \sigma_\theta r dr = M \\ \int_a^b \sigma_\theta dr = T \end{cases}$$

Ta tính được các hệ số rồi thay vào hệ (4.10) xác định các thành phần ứng suất.

Chương 5

5.1.

$$w|_{r=a} = 0;$$

$$\theta = -\frac{dw}{dr} = 2C.r|_{r=a} = 2C.a \neq 0;$$

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = 2C.D(1+\nu) \neq 0 \ \forall r;$$

Vậy tấm tròn tựa tự do trên biên và chịu mômen uốn trên biên với cường độ: m = 2C.D (1 + ν).

5.2.

Sử dụng công thức tính độ võng lớn nhất tại tâm của tấm:

1) Biên tựa khớp: $w|_{max(r=0)} = \frac{(5+\nu)}{(1+\nu)}\frac{qa^4}{64D}$;

2) Biên ngàm $w|_{max(r=0)} = \frac{qa^4}{64D}$;

với a – bán kính của tấm; D – độ cứng chống uốn; ν – hệ số Poát-xông. Ta có độ võng của tấm có biên tựa khớp lớn hơn gần 5 lần so với tấm có biên ngàm.

5.3. Độ võng lớn nhất tại tâm của tấm bằng:

$$w|_{max(r=0)} = \frac{Pa^2}{16\pi D};$$

Ứng suất lớn nhất được tính theo công thức:

$$\sigma_r^{max} = \frac{6M_r}{h^2};\ \sigma_t^{max} = \frac{6M_t}{h^2}$$

Với:

$$M_r = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{r} - 1\right] \quad (*)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{r} - \nu\right] \quad (**)$$

Khi $r \to 0$, các biểu thức (*), (**) tiến tới ∞, do đó không còn thích hợp để tính σ_{max}. Ta sẽ dùng công thức hiệu chỉnh sau để tính ứng suất lớn nhất tại điểm ở mặt dưới của tấm:

$$\sigma^{max} = \frac{P(1+\nu)}{h^2}\left[0,485\ln\frac{a}{h}+0,52\right]$$

Đối với biên tựa tự do ta có:

$$\sigma^{max} = \frac{P\left[(1+\nu)(0,485\ln\frac{a}{h}+0,52)+0,48\right]}{h^2}$$

5.4. Độ võng tại điểm có khoảng cách $0 \le r \le a$ tính theo công thức (sử dụng kết quả bài 5.1):

$$w = \frac{m}{2(1+\nu)D}(a^2+r^2)$$

Suy ra: $$w\big|_{r=0} = \frac{m.a^2}{2(1+\nu)D}$$

5.5. $$w = \frac{P}{16\pi D(a^2+b^2)}\left\{a^4 - a^2b^2\left[1+4(\ln\frac{b}{a})^2\right] - 2b^4\ln\frac{b}{a}\right\}$$

5.6.

$M_r^C = -3120 N.cm/cm$; $M_t^C = -5200 N.cm/cm$

$w^A = 0,42cm$; $w^B = -0,44cm$

5.7. $\sigma^{td} = 75MN/m^2 < [\sigma]$

5.8. $t \approx 1,7$ cm

5.9. Chỉ dẫn : Áp dụng nguyên lý bình thông nhau.

$\varepsilon_{max} = 3,98.10^{-4}$; $\varepsilon_{min} = -0,625.10^{-4}$

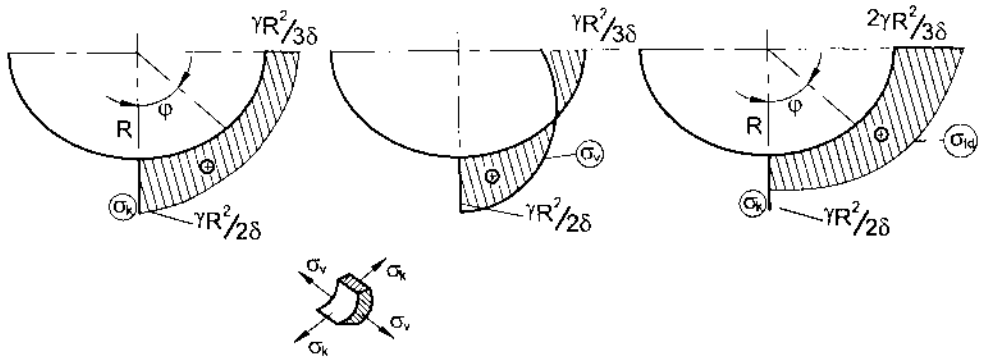
5.10. a) Bình được treo ở phía trên thân hình trụ:

$\sigma_{vmax} = 6,66$ MN/m^2 ; $\sigma_k = 4,45$ MN/m^2 ; $\sigma_{td} = 5$ MN/m^2

b) Bình đặt trên giá đỡ ở phía dưới thân hình trụ:

$\sigma_{vmax} = 6,66$ MN/m^2 ; $\sigma_k = 0$; $\sigma_{td} = 5$ MN/m^2

5.11. $\sigma_K = \dfrac{\gamma R^2}{3\delta \sin^2\varphi}(1-\cos^3\varphi)$; $\sigma_V = \dfrac{\gamma R^2\cos\varphi}{\delta} - \sigma_K$;



Hình B5.11

5.12. $\sigma_V = \dfrac{\gamma z(H-h-z)R}{\delta H}$; $\sigma_K = \dfrac{\gamma z(H-h-z)(H-h+2z)}{6\delta H\cos\alpha}$

$$\sigma_V^{max}\Big|_{z=\frac{H-h}{2}} = \frac{\gamma(H-h)^2 R}{4\delta H} \; ; \; \sigma_K^{max}\Big|_{z=\frac{H-h}{4}} = \frac{3\gamma(H-h)^2 R}{16\delta H\cos\alpha} \; ;$$

$\sigma_1 = \max(\sigma_K^{max}\ ;\ \sigma_V^{max})$; $\sigma_3 = 0$. Theo thuyết bền ƯSTLN:

$\sigma^{td} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$, ta sẽ tính được bề dày cho phép δ.

Chương 6

6.1. [p] = 108 kN

6.2. a = 0,65 cm; b = 0,5 cm; p_0 = 110 kN/cm^2

6.3. a = 0,489 cm; b = 0,057 cm; p_0 = 291 kN/cm^2

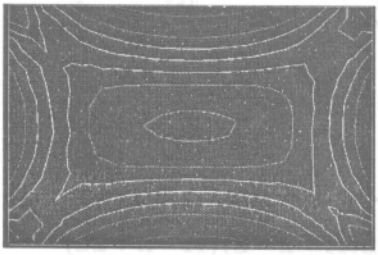
6.4. 1) Với tấm thép: a = 0,063 mm; p_0 = 300kN/cm^2; δ = 0,026 mm

2) Với tấm gang: a = 0,07 mm; p_0 = 230kN/cm^2; δ = 0,033 mm.

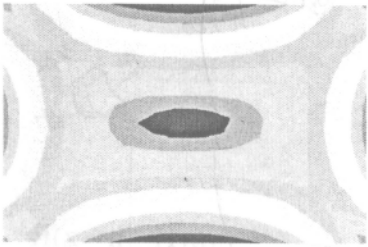
PHỤ LỤC

A – THANH MẶT CẮT NGANG BẤT KỲ CHỊU XOẮN

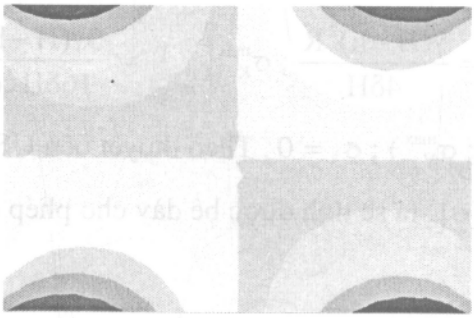
1. Mặt cắt hình chữ nhật



Đường đồng mức ứng suất

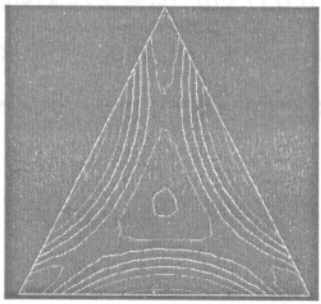


Ứng suất tiếp

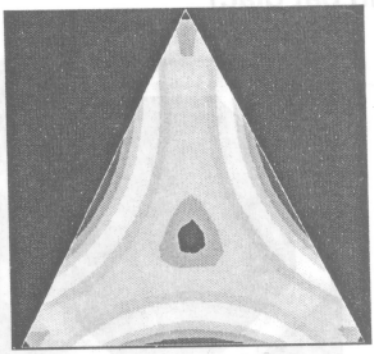


Độ vênh

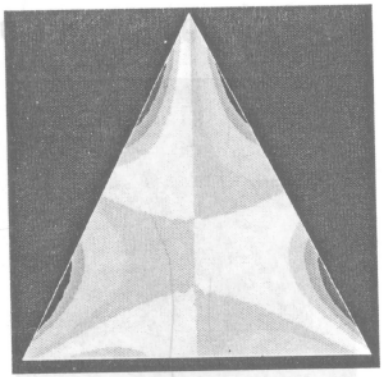
2. Mặt cắt hình tam giác đều



Đường đồng mức ứng suất

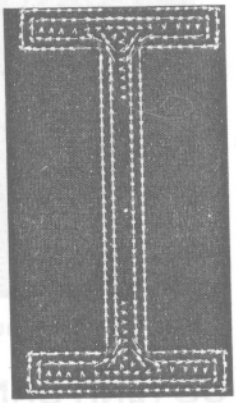


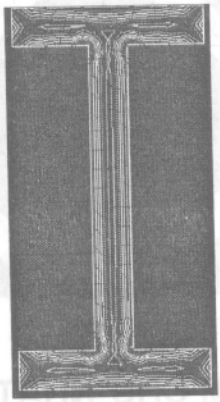
Ứng suất tiếp



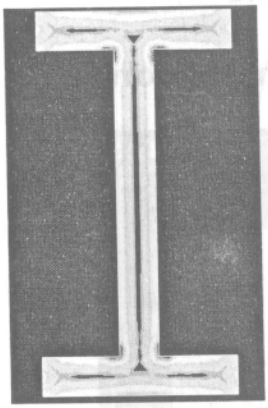
Độ vênh

3. Mặt cắt chữ I (thành mỏng hở)

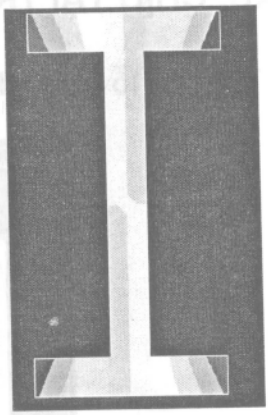




Véctơ ứng suất tiếp và đường đồng mức ứng suất

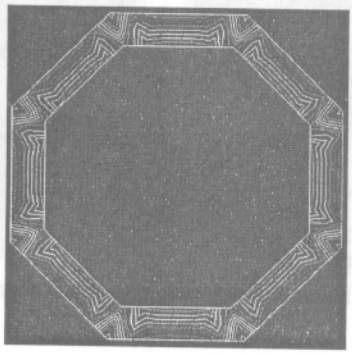


Ứng suất tiếp

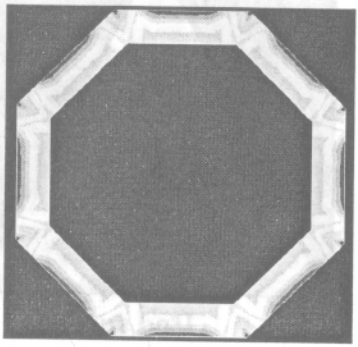


Độ vênh

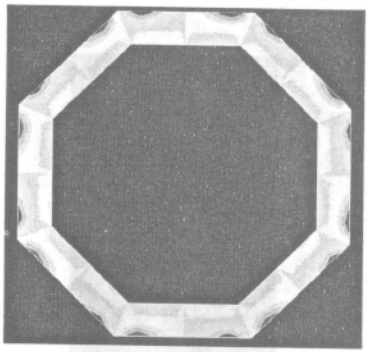
4. Mặt cắt ngang thành mỏng kín (hình bát giác)



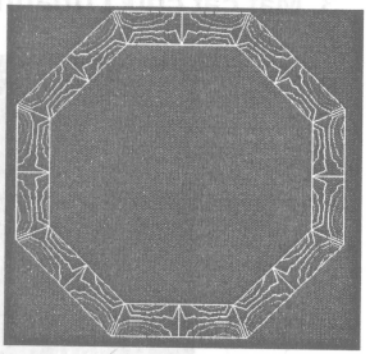
Đường đồng mức ứng suất



Ứng suất tiếp



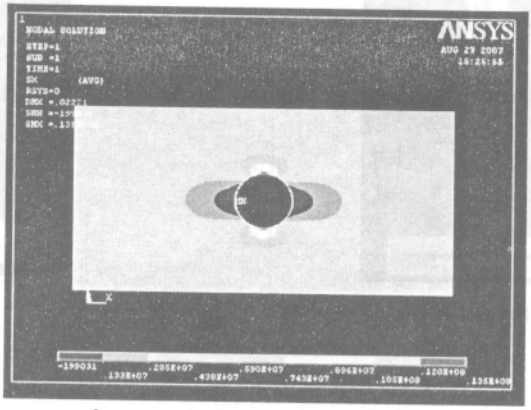
Độ vênh



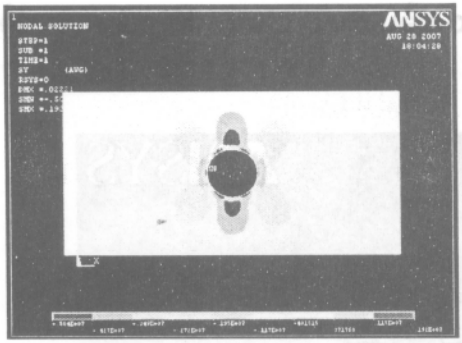
Đường đồng mức độ vênh

B – TẤM CHỮ NHẬT BỊ KHOÉT LỖ CÓ HÌNH DẠNG KHÁC NHAU, CHỊU TẢI TRỌNG KHÁC NHAU

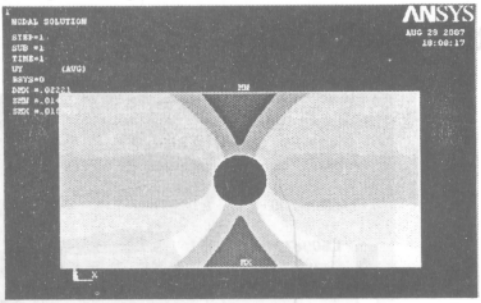
1. Tấm có lỗ tròn, chịu kéo đều theo một phương



Ứng suất pháp theo phương x

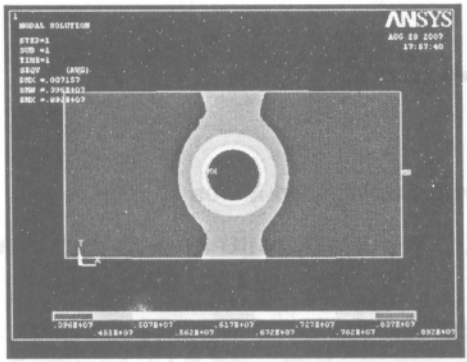


Ứng suất pháp theo phương y

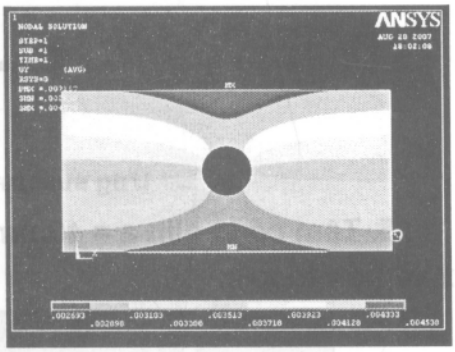


Chuyển vị theo phương y

2. Tấm có lỗ tròn, chịu kéo đều theo hai phương vuông góc

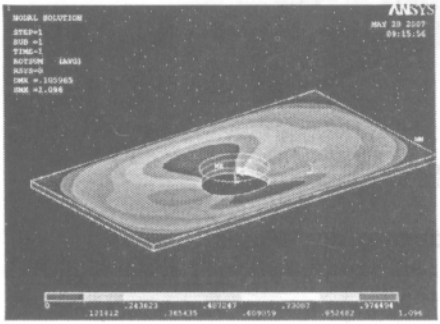


Ứng suất tương đương theo Von-Mises

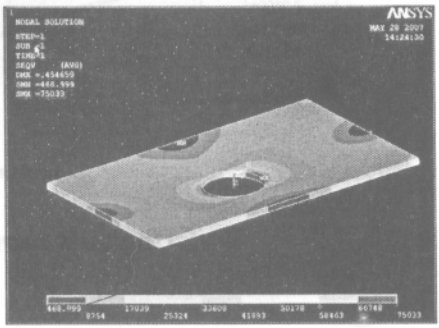


Chuyển vị theo phương y

3. Tấm có lỗ tròn, chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt tấm

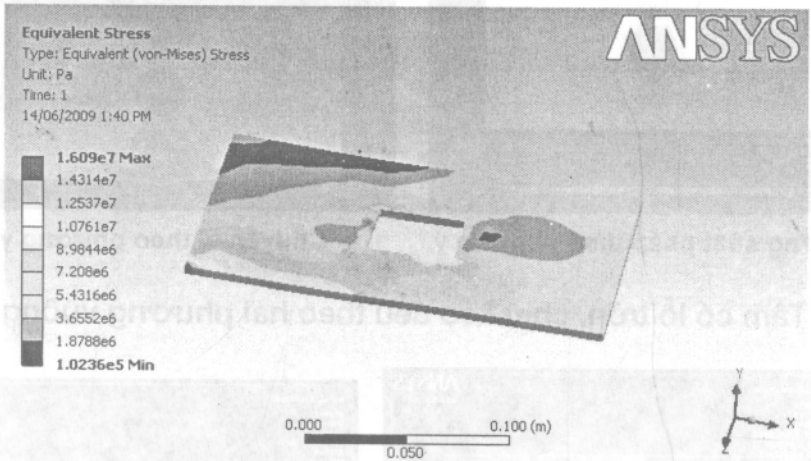


Biến dạng



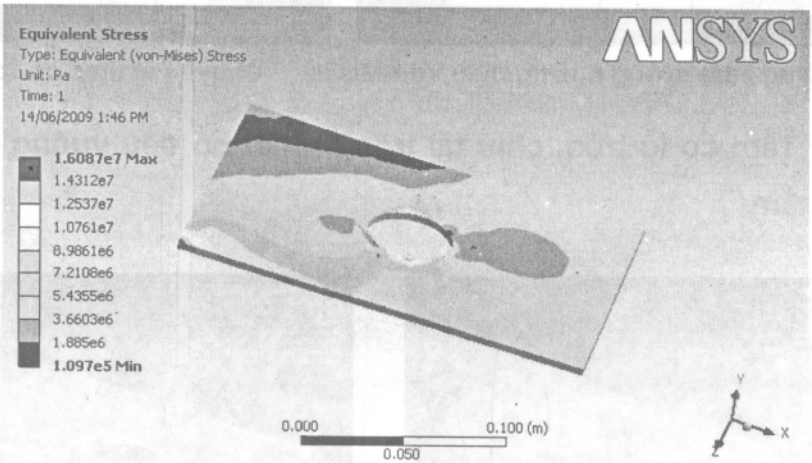
Ứng suất tương đương theo Von-Mises

4. Tấm có lỗ chữ nhật, chịu kéo đều theo cạnh dài và nén đều theo cạnh ngắn



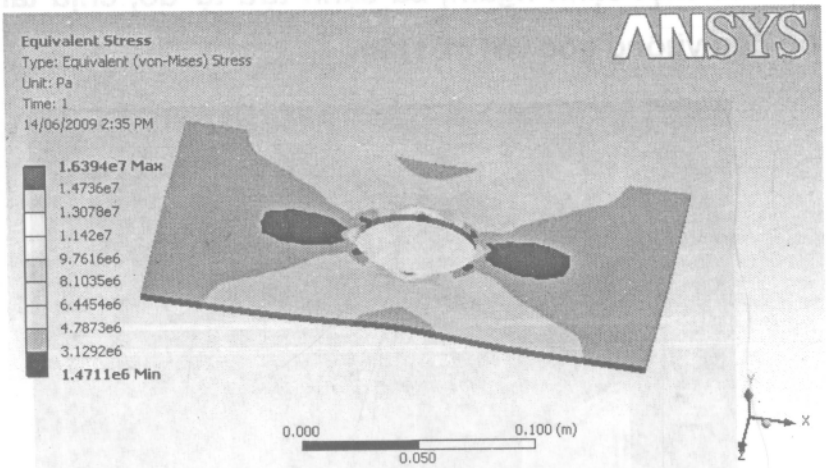
Ứng suất tương đương Von-Mises

5. Tấm có lỗ elip a = 40mm, b = 30mm, chịu kéo théo phương x và nén theo z.



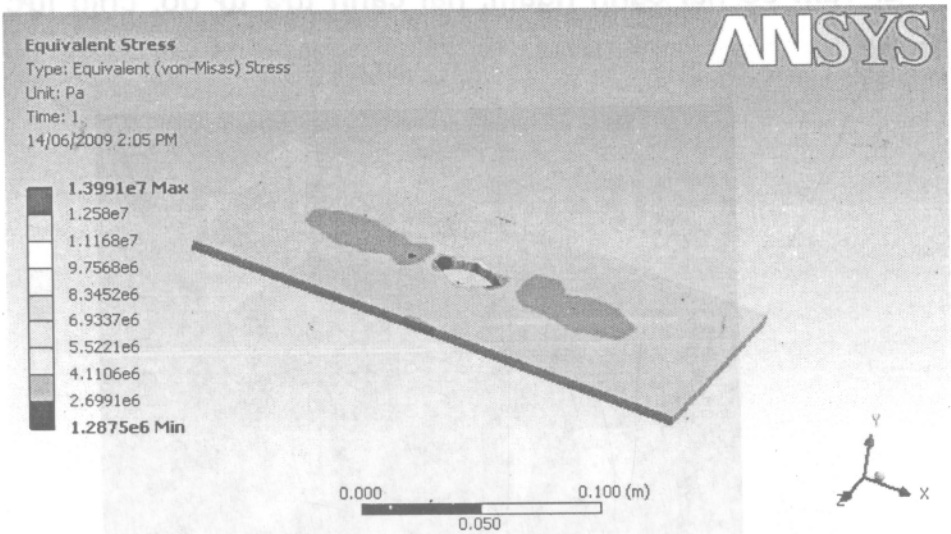
Ứng suất tương đương Von-Mises

6. Lỗ tròn đường kính 40mm chịu kéo theo phương x và nén theo phương z



Ứng suất tương đương Von-Mises

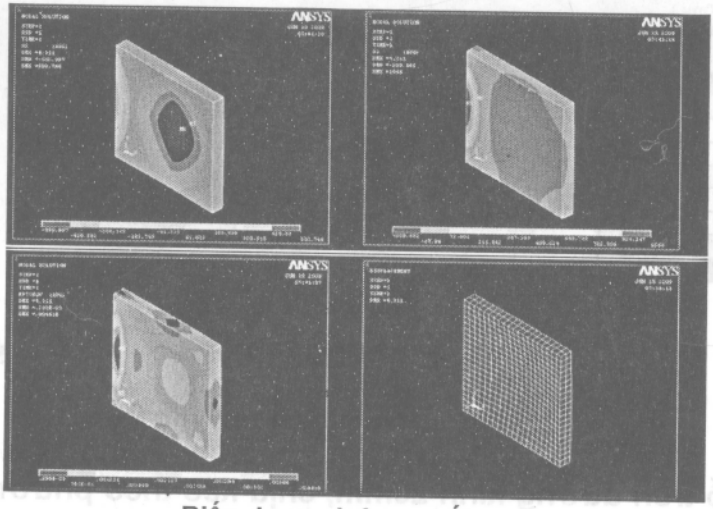
7. Lỗ tròn đường kính 20mm, chịu kéo theo phương x và nén theo phương z



Ứng suất tương đương Von-Mises

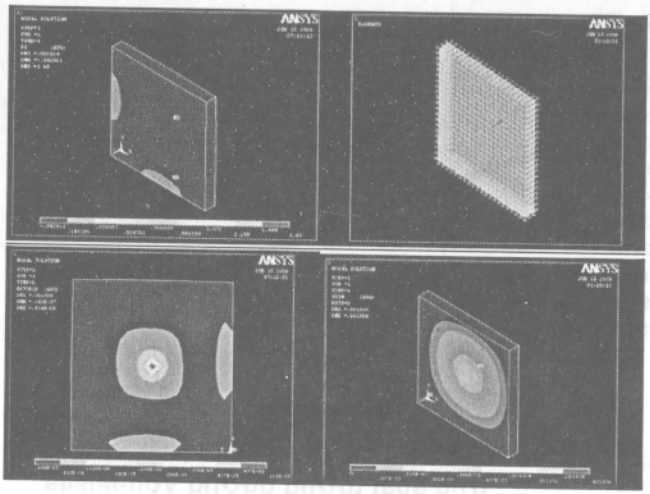
C – UỐN TẤM CHỮ NHẬT VỚI ĐIỀU KIỆN KHÁC NHAU

1. Tấm có một cạnh ngàm, ba cạnh tựa tự do, chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt tấm



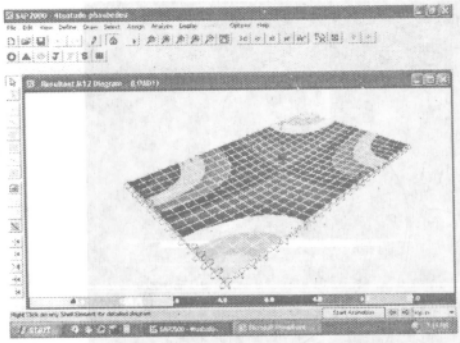
Biến dạng và ứng suất

2. Tấm có hai cạnh ngàm, hai cạnh tựa tự do, chịu lực tập trung

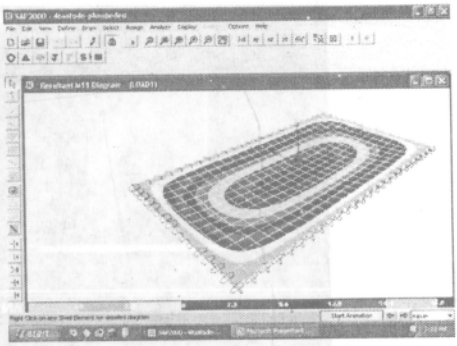


Biến dạng và ứng suất

3. Tấm có bốn cạnh tựa tự do, chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt tấm

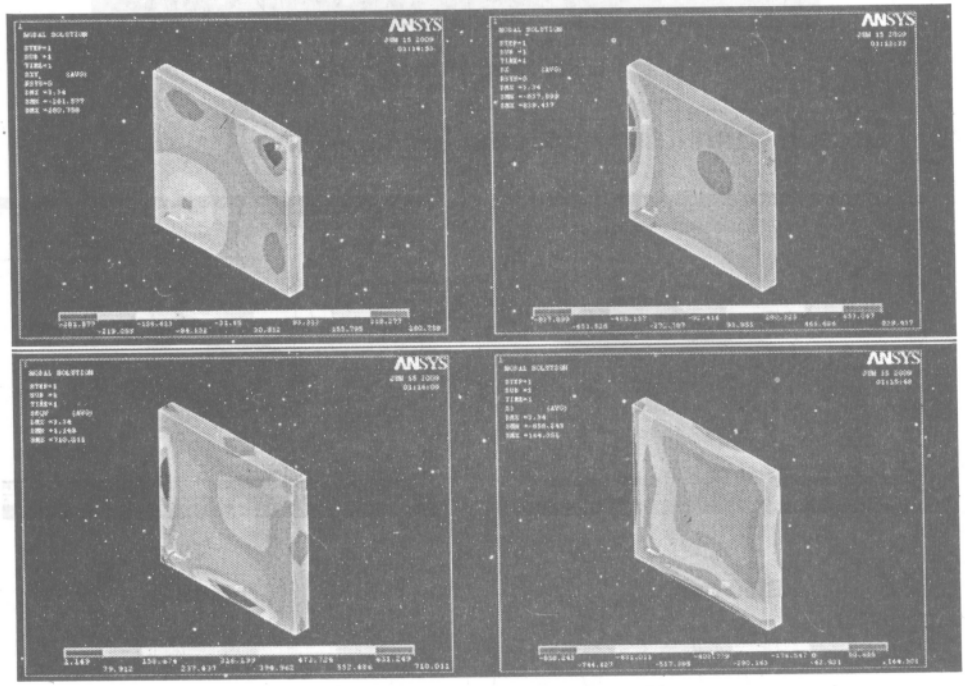


Mômen xoắn M_{12}



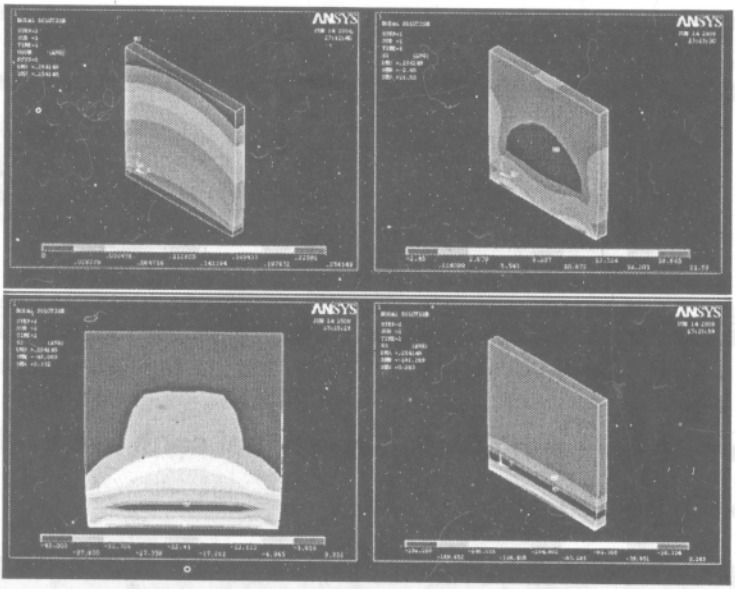
Mômen uốn M_{11}

4. Tấm có hai cạnh đối diện ngàm, hai cạnh tựa tự do, chịu tải trọng phân bố đều



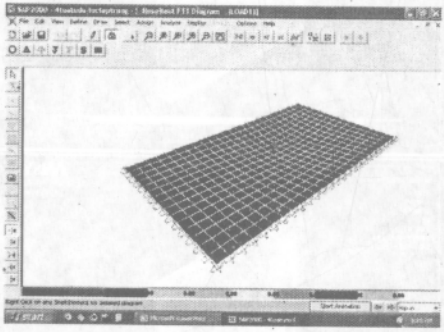
Biến dạng và ứng suất

5. Tấm có một cạnh ngàm, ba cạnh tựa tự do, chịu tải trọng phân bố đều trên một miền của tấm

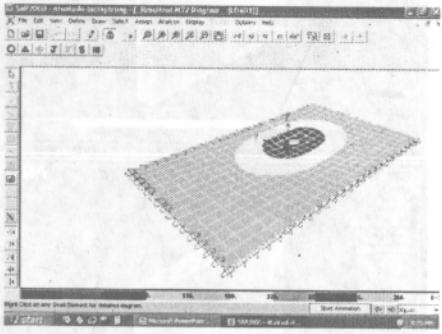


Biến dạng và ứng suất

6. Tấm bốn cạnh tựa tự do, chịu lực tập trung

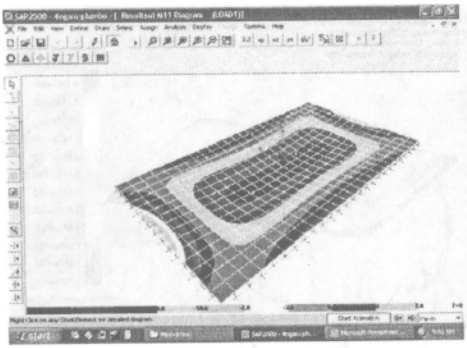


Biến dạng

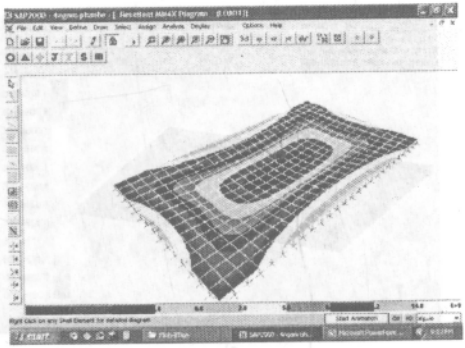


Ứng suất

7. Tấm có bốn cạnh ngàm, chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt tấm

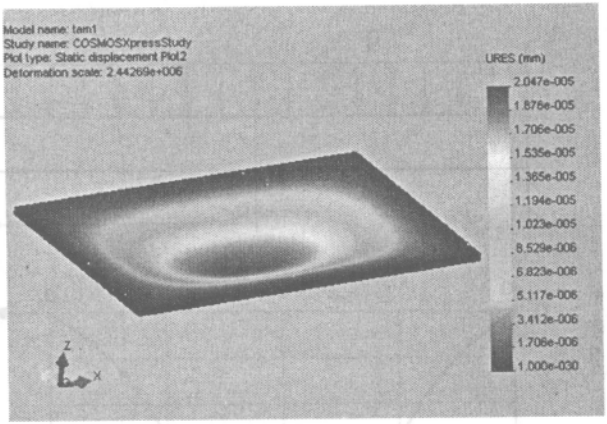


Biến dạng

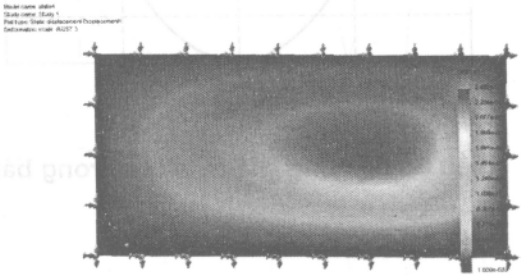


Ứng suất

8. Tấm có một cạnh ngàm, ba cạnh tựa tự do, chịu tải trọng phân bố bậc nhất vuông góc với mặt tấm

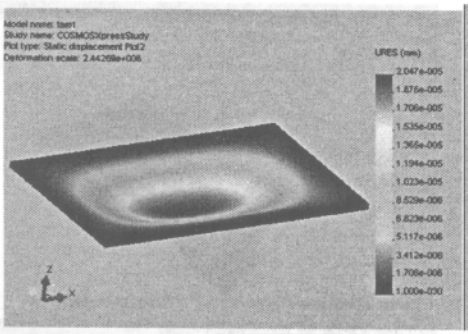


Biến dạng

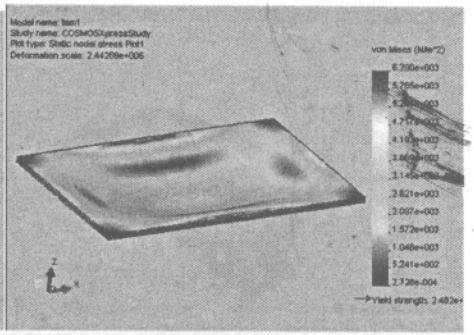


Ứng suất

9. Tấm ngàm 4 cạnh, chịu tải trọng phân bố đều vuông góc với mặt tấm



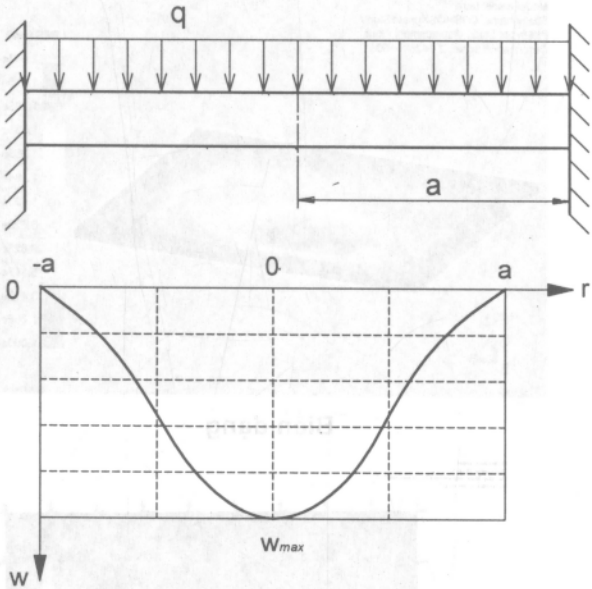
Biến dạng



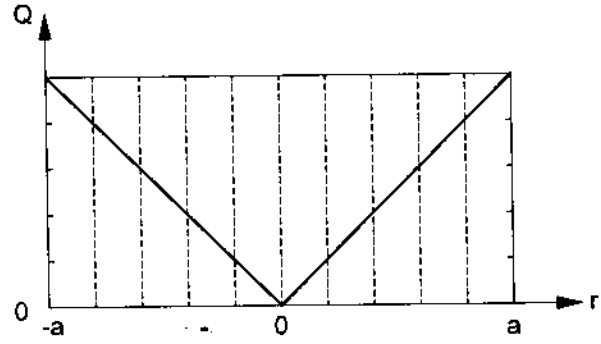
Ứng suất

D – UỐN TẤM TRÒN

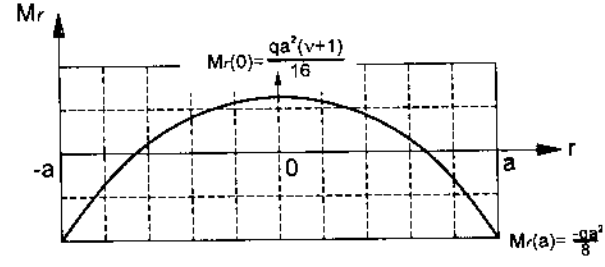
1. Tấm tròn ngàm trên biên, chịu tải trọng phân bố đều



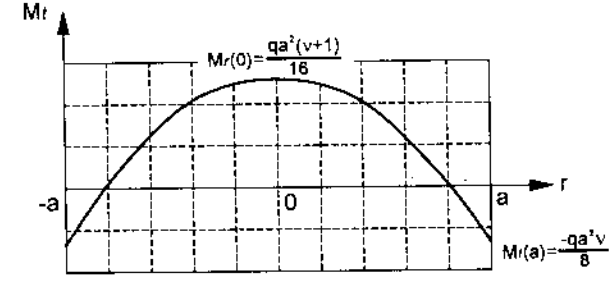
Biểu đồ độ võng Giá trị w cho trong bảng 5.1



Biểu đồ lực cắt

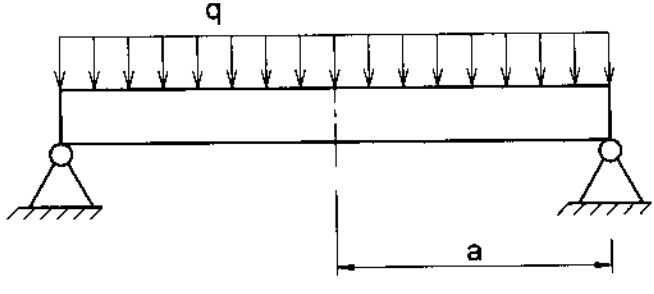


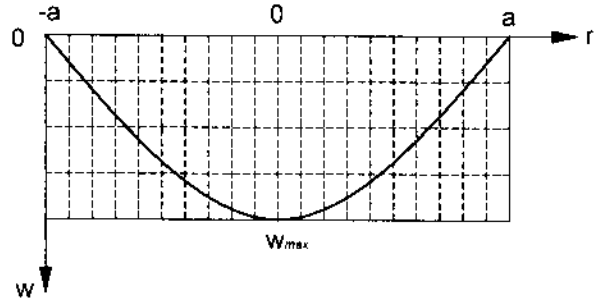
Biểu đồ mômen uốn M_r



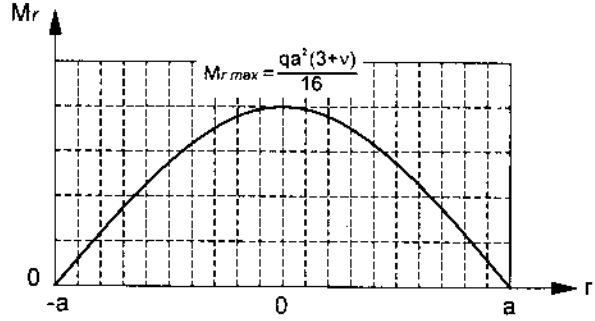
Biểu đồ mômen uốn M_t

2. Tấm tròn biên tựa khớp, chịu tải trọng phân bố đều

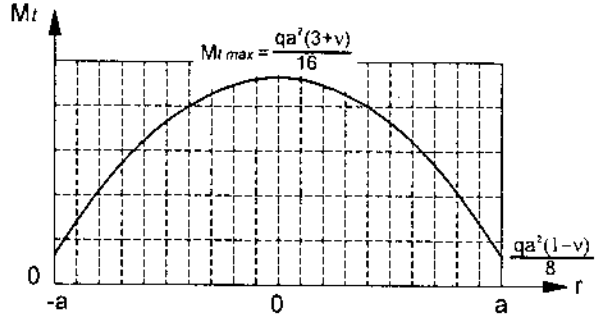




Biểu đồ độ võng Giá trị w cho trong bảng 5.1

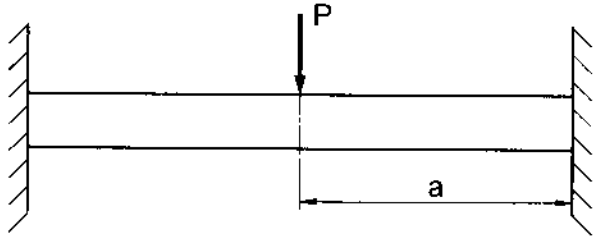


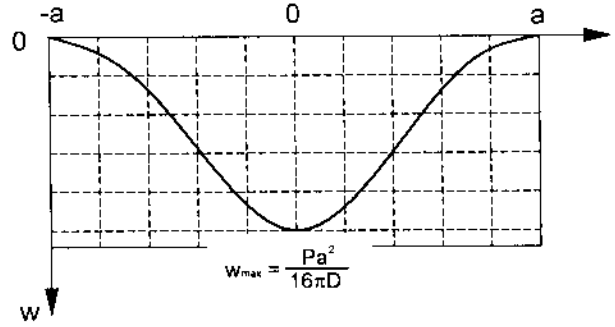
Biểu đồ mômen uốn M_r



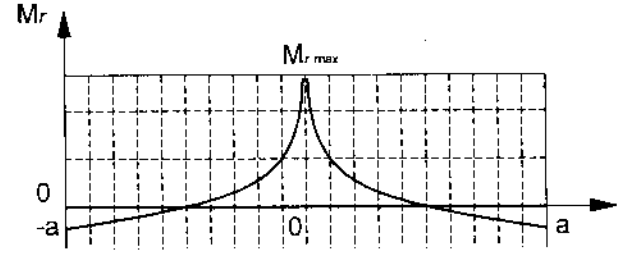
Biểu đồ mômen uốn M_t

3. Tấm tròn ngàm trên biên, chịu lực tập trung ở tâm



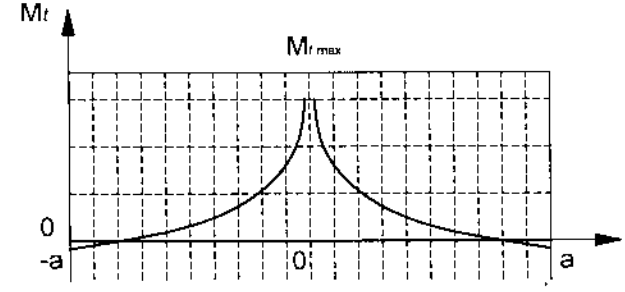


Biểu đồ độ võng



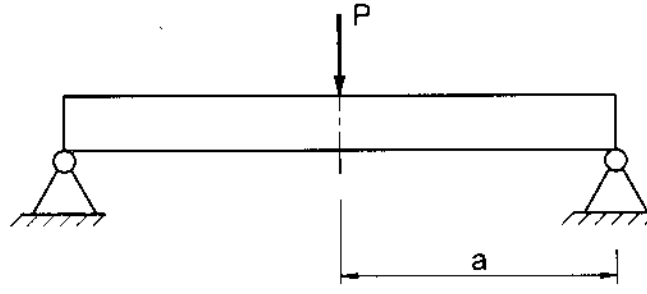
Biểu đồ mômen uốn M_r

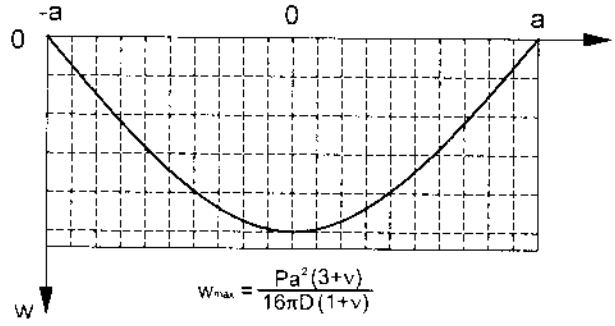
(Giá trị M_r^{max} cho trong bảng 5.1)



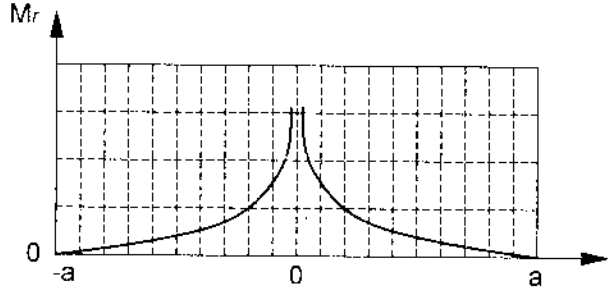
Biểu đồ mômen uốn M_t

4. Tấm tròn biên tựa khớp, chịu lực tập trung



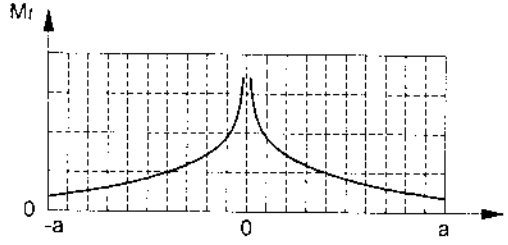


Biểu đồ độ võng



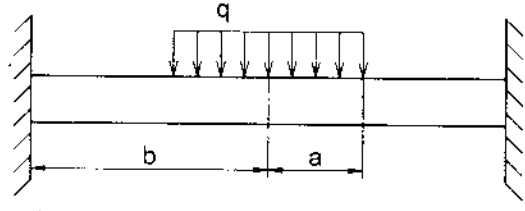
Biểu đồ mômen uốn M_r

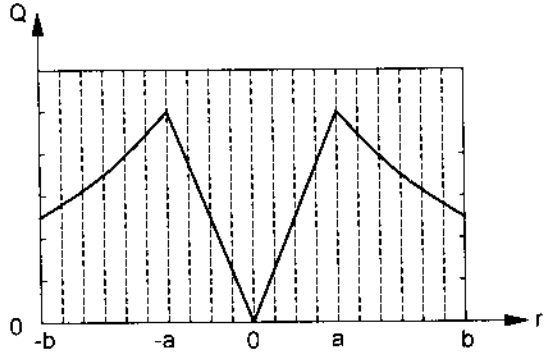
(Giá trị M_r^{max} cho trong bảng 5.1)



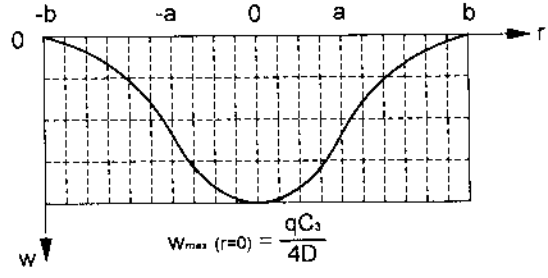
Biểu đồ mômen uốn M_t

5. Tấm tròn ngàm ở biên, chịu tải trọng phân bố đều trên hình tròn bán kính a

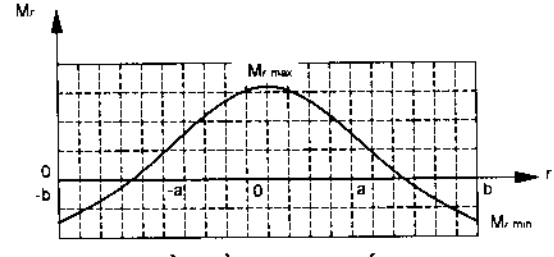




Biểu đồ lực cắt

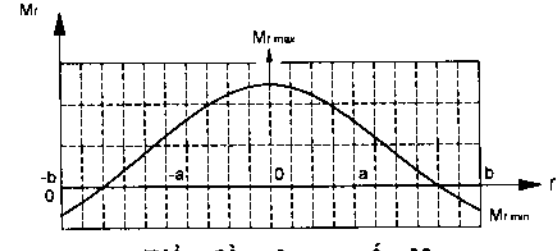


Biểu đồ độ võng ***(hằng số C_3 cho trong bảng 5.1)***



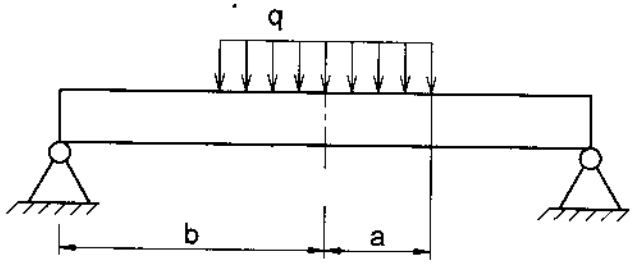
Biểu đồ mômen uốn M_r

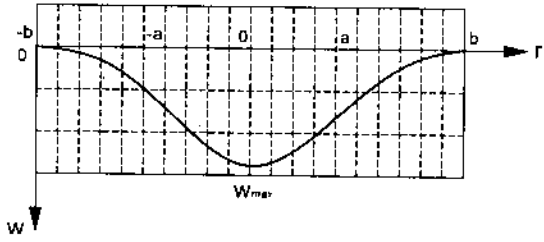
(Giá trị M_r^{max} cho trong bảng 5.1)



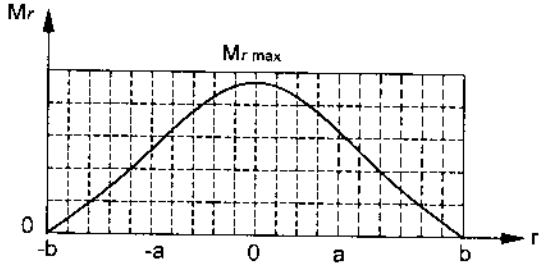
Biểu đồ mômen uốn M_t

6. Tấm tròn tựa khớp, chịu tải trọng phân bố trên hình tròn bán kính a

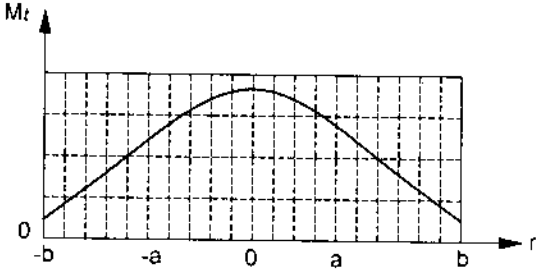




Biểu đồ độ võng

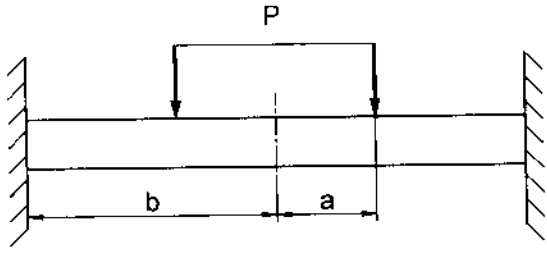


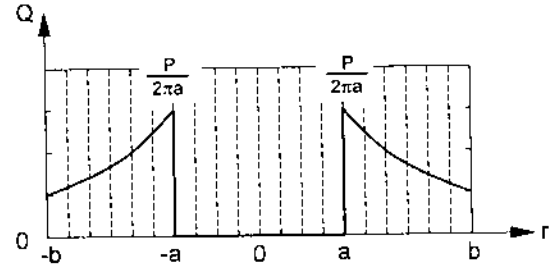
Biểu đồ mômen uốn M_r



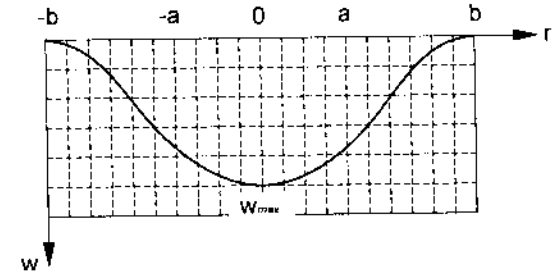
Biểu đồ mômen uốn M_t

7. Tấm tròn ngàm ở biên, chịu tải trọng phân bố trên chu vi hình tròn bán kính a

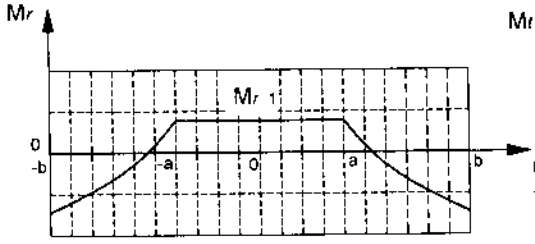




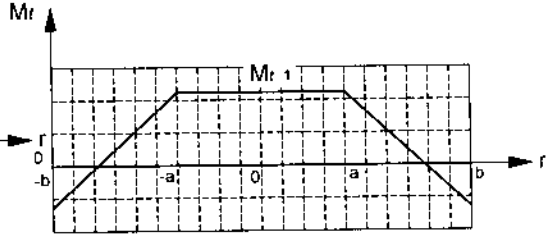
Biểu đồ lực cắt



Biểu đồ độ võng

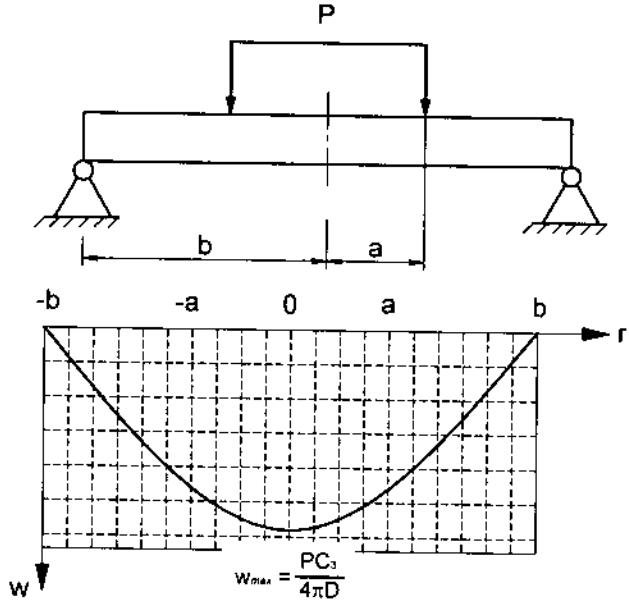


Biểu đồ mômen uốn M_r

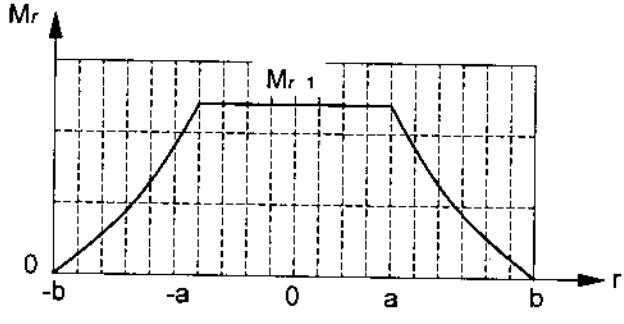


Biểu đồ mômen uốn M_t

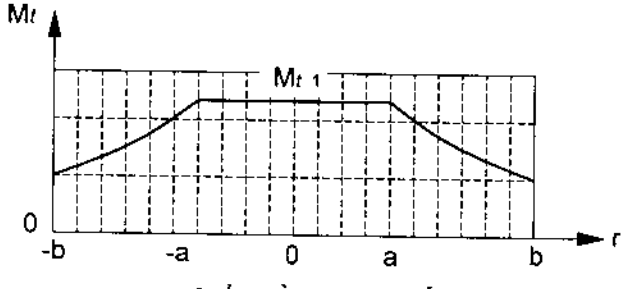
8. Tấm tròn tựa khớp, chịu tải trọng phân bố trên chu vi hình tròn bán kính a



Biểu đồ độ võng



Biểu đồ mômen uốn M_r



Biểu đồ mômen uốn M_t

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Lê Ngọc Hồng, Lê Ngọc Thạch** – *"Cơ học môi trường liên tục và lý thuyết đàn hồi"* – NXB Khoa học kỹ thuật, 1999.

2. **Tô văn Tấn** – "*Lý thuyết đàn hồi*" – NXB Khoa học kỹ thuật, 1991.

3. **Nhữ Phương Mai (chủ biên), Nguyễn Nhật Thăng** – *"Bài tập đàn hồi ứng dụng"* – NXB Giáo dục, 2003.

4. **Nhữ Phương Mai (và các tác giả khác)** – "*Cơ học môi trường liên tục*" – NXB ĐH Bách khoa, 1991.

5. **Lê Công Trung** – " *Lý thuyết Đàn hồi ứng dụng*"– NXB Khoa học Kỹ thuật, 2000.

6. **Nguyễn Văn Vượng** – *"Đàn hồi ứng dụng"* – NXB Giáo dục, 1999.

7. **Тимошенко С П, Гудье ДЖ** – "*Теория упругости*" – МоскВа "Наука", 1976.

8. **Рукач В. Г** – "*Руководство к решению задач по Теории упругости*" Моска, " Вышая Школа ", 1977.

9. **Wang - Chi – Ten** – *"Applied Elasticity"* – Mc Graw Hill Book Company, NY 1953.

10. **Martin H. Sadd** – "*Elasticity-Theory, Applications and Numerics*" – ELSEVIER. NY. 2005.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:
Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc CTCP sách ĐH - DN TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập nội dung và sửa bản in:
NGUYỄN HÀ XUÂN

Trình bày bìa:
BÍCH LA

Thiết kế sách và chế bản:
NGUYỄN THU PHƯƠNG

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

Mã số: 7B761Y9 – DAI

In 1.000 bản (QĐ : 50), khổ 16 x 24 cm. In tại Nhà in Đại học Quốc Gia Hà Nội.
Địa chỉ : 16 Hàng Chuối, Hà Nội.
Số ĐKKH xuất bản : 576 – 2009/CXB/13 – 1066/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2009.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN - HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

LONDON
QUALITY CROWN
QC 100
VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

TÌM ĐỌC

SÁCH THAM KHẢO KỸ THUẬT
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

1. Vật liệu phi kim và ứng dụng	Nguyễn Trường Kỳ
2. Máy phay và thực hành gia công trên máy phay	Phí Trọng Hảo
3. Nguyên lý cắt	Phùng Xuân Sơn
4. Chi tiết máy	Nguyễn Xuân Ngọc
5. Cơ học kỹ thuật	Nguyễn Văn Khang
6. Giáo trình công nghệ CNC	Nguyễn Văn Thiện
7. Bài tập nhiệt động kỹ thuật	Lê Nguyên Minh
8. Thực hành cắt gọt kim loại trên máy tiện và máy phay	Nguyễn Hùng Cường
9. Bài tập đàn hồi ứng dụng	Nhữ Phương Mai Nguyễn Nhật Thăng

Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

- Tại TP. Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền.
- Tại TP. Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh ; 62 Nguyễn Chí Thanh.
- Tại TP. Hồ Chí Minh : Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng - Quận 3 ; 240 Trần Bình Trọng - Quận 5.
- Tại TP. Cần Thơ : 5/5, đường 30/4.

Website : www.nxbgd.com.vn

8 934980 921968

Giá : **28.500 đ**