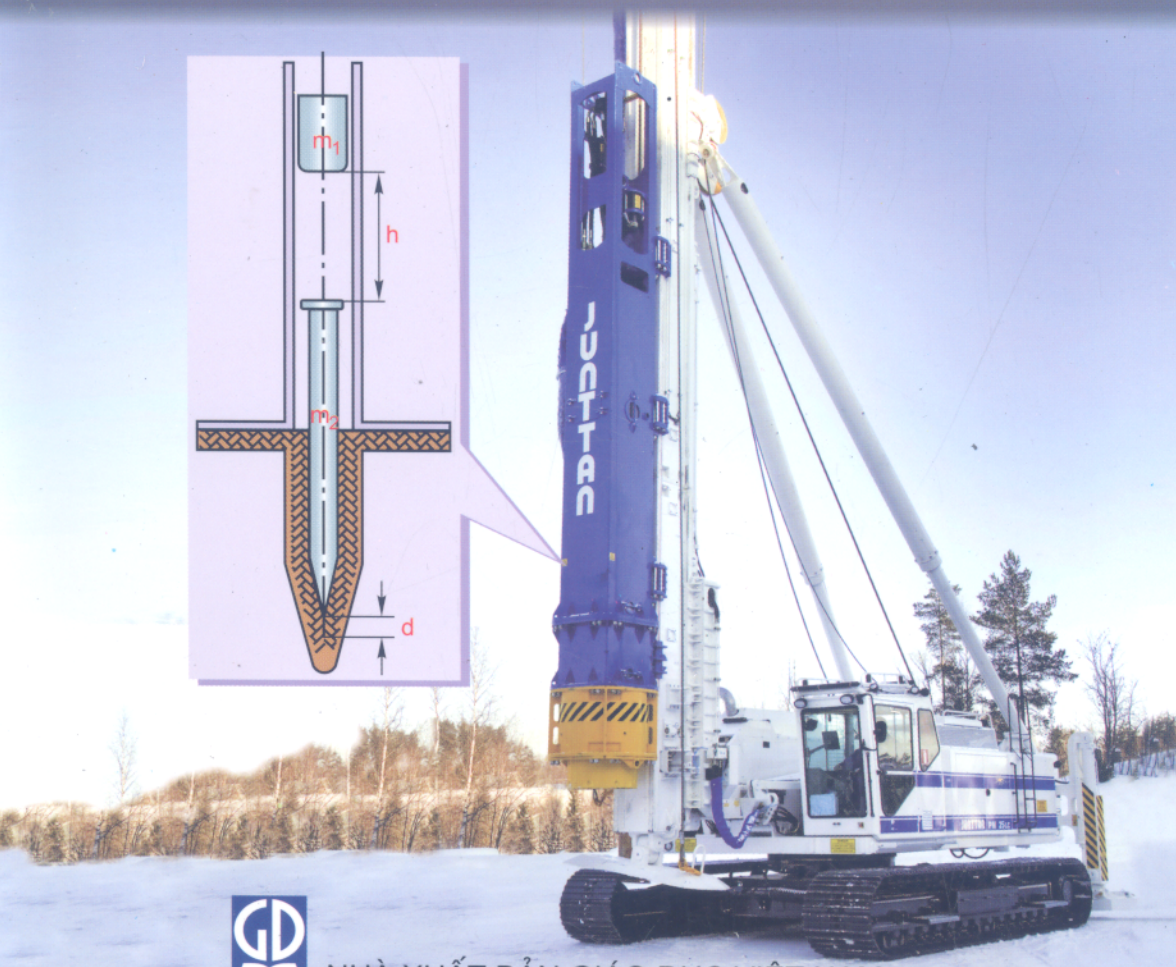
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG

CƠ HỌC KỸ THUẬT

ENGINEERING MECHANICS

GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG KỸ THUẬT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG

CƠ HỌC KỸ THUẬT

ENGINEERING MECHANICS

GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG KỸ THUẬT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

161–2009/CXB/3–208/GD Mã số: 7B726Y9 – DAI

MỤC LỤC

Phần 2. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

Phần 3. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

LỜI NÓI ĐẦU

Cơ học kỹ thuật là một môn học cơ sở trong chương trình đào tạo sinh viên ở các trường đại học kỹ thuật. Môn học này ở nước ta trong những năm vừa qua có nhiều tên gọi khác nhau. Trước đây, tên môn học này được gọi theo cách gọi như ở Liên Xô cũ là *Cơ học lý thuyết*. Từ những năm 90 của thế kỷ 20 tên môn học này ở trường Đại học Bách khoa Hà Nội gọi là *Cơ học*, *Cơ học lý thuyết* hoặc *Cơ học kỹ thuật*, ở trường Đại học Xây dựng gọi là *Cơ học cơ sở*, ở trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh gọi là *Cơ học lý thuyết*. Ở Mỹ, Canada, Nhật bản, Singapore, Thái Lan,... môn học này được gọi là *Cơ học kỹ thuật* (Engineering Mechanics). Ở CHLB Đức, CH Áo,..., môn học này cùng với phần cơ sở của Sức bền vật liệu được giảng dạy trong cùng một giáo trình và được gọi là *Cơ học kỹ thuật*. Vì lý do đa số các trường đại học trên thế giới đều gọi tên môn học này là *Cơ học kỹ thuật*, và để thực hiện "chủ trương đổi mới cơ bản, toàn diện và mạnh mẽ về giáo dục, phấn đấu đến năm 2020 có một nền giáo dục tiên tiến, đáp ứng yêu cầu của sự nghiệp công nghiệp hoá, hiện đại hoá đất nước trong bối cảnh hội nhập quốc tế" của Chính phủ, Hội chuyên ngành Động lực học và Điều khiển Việt Nam đã đề nghị gọi tên môn học này là *Cơ học kỹ thuật*. Hiện nay ở trường Đại học Bách khoa Hà Nội và một vài trường Đại học khác đã sử dụng thuật ngữ *Cơ học kỹ thuật* (Engineering Mechanics) để gọi tên môn học quan trọng này.

Nội dung của môn học *Cơ học kỹ thuật* gồm ba phần: Tĩnh học vật rắn, Động học vật rắn, Động lực học vật rắn. Cuốn giáo trình này được biên soạn cho sinh viên các ngành Cơ khí, Cơ tin điện tử, Cơ học kỹ thuật, Kỹ thuật giao thông,... với thời lượng 10 đơn vị học trình. Khi giảng dạy cho sinh viên các khoa Điện, Điện tử, Tin học, Luyện kim, Hóa học,... với thời lượng 4 đến 6 đơn vị học trình, ta có thể bỏ chương 5 phần Động học và các chương 5, 6, 7, 8 phần Động lực học. Các chương này là nội dung của phần giảng dạy bổ sung cho sinh viên khối Cơ khí và Cơ tin điện tử.

Cuốn sách này được viết trên cơ sở bài giảng *Cơ học kỹ thuật* của tác giả cho sinh viên trường Đại học Bách khoa Hà Nội trong nhiều năm và cho nhiều ngành kỹ thuật khác nhau. Tác giả cố gắng trình bày những vấn đề cơ bản của Cơ học kỹ thuật theo quan điểm hiện đại, cố gắng đảm bảo tính sư phạm và yêu cầu chất lượng của một giáo trình bậc đại học, cố gắng để giáo trình Cơ học kỹ thuật ở Việt Nam

có chất lượng ngang bằng với chất lượng của giáo trình tương ứng ở các nước khác . Những kiến thức trình bày trong giáo trình này là những kiến thức tối thiểu, cần thiết để sinh viên có thể học các môn học tiếp theo của các ngành Cơ khí, Cơ tin điện tử, Giao thông vận tải, Xây dựng, Hàng không và Vũ trụ, Tự động hoá.... Các thí dụ trong cuốn sách này gồm hai loại: Các thí dụ nhằm củng cố kiến thức và các thí dụ áp dụng giải một số mô hình cơ học trong kỹ thuật. Nếu chưa cần thiết, bạn đọc có thể bỏ qua các thí dụ khó.

Cuốn sách này không chỉ là tài liệu học tập cần thiết cho sinh viên trường Đại học Bách khoa Hà Nội, mà còn là tài liệu học tập bổ ích cho sinh viên tất cả các trường đại học kỹ thuật trong toàn quốc. Cuốn sách này tác giả viết để tặng các em sinh viên cần cù học tập và có hoài bão nghiên cứu và ứng dụng khoa học.

Cuốn sách này được xuất bản lần thứ nhất năm 2003, lần thứ hai năm 2005 ở Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội và lần này được xuất bản ở Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam. Chúng tôi trình bày ngắn gọn và sáng sủa hơn, đồng thời bổ sung thêm nhiều thí dụ trong các chương khó để cho sinh viên dễ tiếp thu bài giảng.

Trong quá trình biên soạn chúng tôi đã nhận được sự trợ giúp quý báu của nhiều bạn đồng nghiệp. Chúng tôi xin cảm ơn PGS. Nguyễn Nhật Lệ, PGS. Lê Doãn Hồng, GS. Phan Nguyên Di, PGS. Đinh Văn Phong, PGS. Vũ Văn Khiêm, TS. Thái Mạnh Cầu, PGS. Nguyễn Phong Điền, TS. Nguyễn Quang Hoàng, TS. Nguyễn Minh Phương đã giúp đọc bản thảo và có nhiều đề nghị cải tiến quý báu. Chúng tôi cũng xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tạo điều kiện thuận lợi cho cuốn sách được xuất bản.

Trong quá trình biên soạn không tránh khỏi thiếu sót, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, tác giả mong muốn nhận được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp và của các em sinh viên để có điều kiện sửa chữa, hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau. Các ý kiến đóng góp xin gửi về: Công ty cổ phần Sách Đại học – Dạy nghề, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội hoặc tác giả theo địa chỉ: Bộ môn Cơ học ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, số 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

Hà Nội, ngày 15 tháng 2 năm 2009

GS. NGUYỄN VĂN KHANG

MỞ ĐẦU VỀ CƠ HỌC KỸ THUẬT

1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU

Cơ học là một khoa học nghiên cứu chuyển động và cân bằng của các vật thể. Trong đó Cơ học Newton nghiên cứu chuyển động và cân bằng của các vật thể có kích thước đủ lớn so với kích thước nguyên tử và có vận tốc đủ nhỏ so với vận tốc ánh sáng.

Tuỳ theo từng quan điểm, người ta có thể phân loại cơ học thành: Cơ học lý thuyết và Cơ học ứng dụng, Cơ học vật lý và Cơ học kỹ thuật v.v... Cơ học vật lý là lĩnh vực cổ nhất và phát triển hoàn thiện nhất của Vật lý. Trong đó chủ yếu nghiên cứu chuyển động cơ học và cân bằng của chất điểm và hệ các chất điểm và của một vài mô hình vật rắn đơn giản. Cơ học kỹ thuật là một lĩnh vực khoa học nghiên cứu chuyển động và cân bằng của các hệ kỹ thuật. Đó là các máy, các công trình xây dựng, các phương tiện giao thông vận tải, v.v... Các mô hình cơ học của các hệ kỹ thuật cho đến giữa thế kỷ 20 thường là mô hình hệ các chất điểm và các mô hình đàn hồi đơn giản. Từ giữa thế kỷ 20 đến nay, các mô hình cơ học của các hệ kỹ thuật thường được sử dụng là mô hình hệ các vật rắn, hệ các phần tử hữu hạn, hệ các vật thể đàn hồi, hệ các môi trường liên tục, v.v... Trong giáo trình này giới hạn chủ yếu xét mô hình vật rắn và hệ các vật rắn phẳng.

Giáo trình Cơ học kỹ thuật được chia thành ba phần: *Tĩnh học vật rắn, Động học vật rắn* và *Động lực học vật rắn*.

2. CƠ HỌC VẬT LÝ VÀ CƠ HỌC KỸ THUẬT

Dựa trên sự phân loại Cơ học thành Cơ học vật lý và Cơ học kỹ thuật, ở đây trình bày về sự giống nhau và khác nhau giữa hai lĩnh vực khoa học này.

Sự giống nhau giữa Cơ học vật lý và Cơ học kỹ thuật. Cả hai lĩnh vực khoa học này đều nghiên cứu những quy luật chuyển động và cân bằng của các vật thể, đều dựa vào hệ ba tiên đề Newton. Năm 1687 New'on đã công bố tác phẩm nổi tiếng "Các nguyên lý toán học của khoa học tự nhiên". Trong đó có nêu ra ba tiên đề làm cơ sở cho các nghiên cứu Cơ học cổ điển. Tiên đề 1 nói rằng: Khi không có lực tác dụng một chất điểm sẽ đứng yên

hoặc chuyển động thẳng đều. Tiên đề 2 nói rằng: Đạo hàm theo thời gian động lượng của chất điểm bằng lực tác dụng lên nó. Tiên đề 3 nói rằng: Khi hai chất điểm tác dụng tương hỗ với nhau thì các lực tương tác giữa chúng là trực đối nhau và nằm trên đường thẳng nối hai chất điểm.

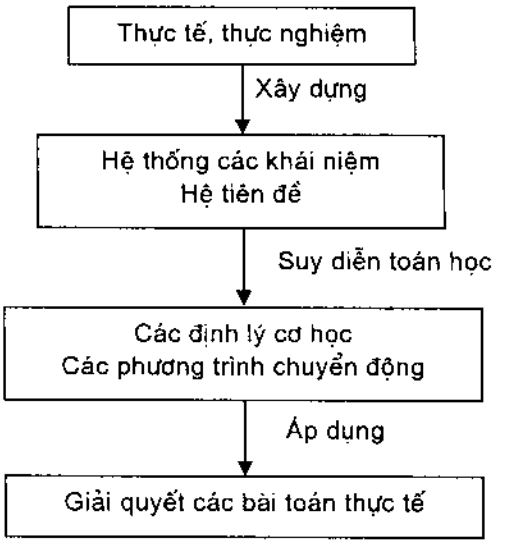
Sự khác nhau giữa Cơ học vật lý và Cơ học kỹ thuật: Giữa chúng có những điểm khác nhau hết sức cơ bản.

Thứ nhất, *khác nhau về phương pháp nghiên cứu.* Phương pháp nghiên cứu của Cơ học vật lý là *phương pháp quy nạp.* Phương pháp nghiên cứu của Cơ học kỹ thuật là *phương pháp suy diễn.* Phương pháp nghiên cứu của Cơ học vật lý chủ yếu là phương pháp thực nghiệm (quan sát, thí nghiệm), từ đó rút ra định luật vật lý, các giả thiết và cuối cùng là áp dụng vào giải thích các hiện tượng vật lý. Phương pháp nghiên cứu của Cơ học kỹ thuật là *phương pháp tiên đề và phương pháp mô hình.* Phương pháp tiên đề là phương pháp nghiên cứu của Cơ học kỹ thuật và của cả Vật lý lý thuyết. Còn phương pháp mô hình là phương pháp đặc trưng cho Cơ học kỹ thuật. Các mô hình cơ học của các mô hình thực (các máy, các công trình,...) được xây dựng phải thoả mãn ba điều kiện: *tương thích, đơn giản và tối ưu.*

Thứ hai, *khác nhau về đối tượng nghiên cứu.* Đối tượng nghiên cứu của Cơ học vật lý là các hệ vật lý đơn giản (hệ các chất điểm, các vật rắn đơn giản). Nhiệm vụ của Cơ học vật lý là giải thích các hiện tượng cơ học trong tự nhiên. Đối tượng nghiên cứu của Cơ học kỹ thuật là các hệ kỹ thuật (các máy, công trình v.v...). Nhiệm vụ của Cơ học kỹ thuật là tính toán các hệ kỹ thuật về phương diện cơ học. Muốn nghiên cứu, tính toán chuyển động của các máy, các công trình xây dựng, trước hết người ta phải xây dựng các mô hình cơ học cho các đối tượng khảo sát. Các mô hình cơ học ngày nay đang được sử dụng là: hệ các chất điểm, hệ các vật rắn, hệ các phần tử hữu hạn, hệ các vật thể biến dạng, hệ các môi trường liên tục, các hệ hỗn hợp. Trong Cơ học vật lý do các đối tượng nghiên cứu là các hệ vật lý đơn giản, nên người ta hầu như không quan tâm đến bài toán xây dựng mô hình. Trái lại trong Cơ học kỹ thuật do đối tượng nghiên cứu là các hệ kỹ thuật (các ôtô, tàu thuỷ, máy bay, các cầu treo, các toà nhà cao tầng,...) nên người ta rất quan tâm đến bài toán xây dựng mô hình. Đây là bài toán khó và các mô hình cơ học được xây dựng thường là các mô hình gần đúng.

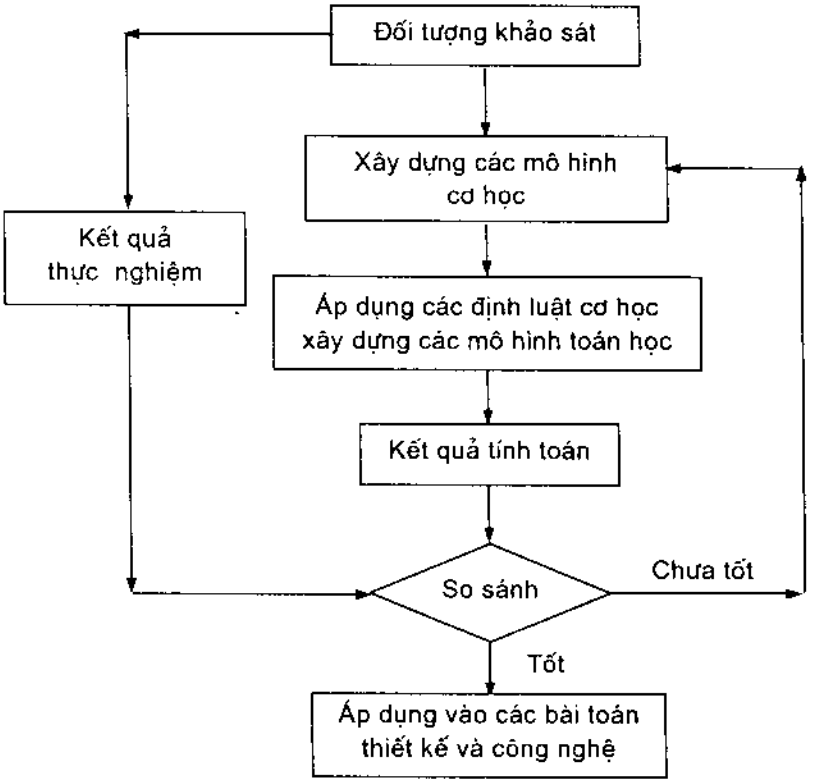
3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

***a) Phương pháp suy diễn** (Phương pháp tiên đề).* Nội dung của phương pháp tiên đề có thể trình bày như sơ đồ dưới đây (hình 0.1).



Hình 0.1

b) Phương pháp mô hình. Nội dung của phương pháp mô hình có thể trình bày như trên hình 0.2.



Hình 0.2

Khi kết quả tính toán chưa phù hợp với kết quả thực nghiệm thì nguyên nhân thường do mô hình cơ học được xây dựng chưa tốt, các tham số của mô hình xác định còn quá thô. Ta phải hoàn thiện việc xây dựng mô hình sao cho mô hình cơ học được xây dựng phản ánh đúng hơn các tính chất của hệ kỹ thuật. Chú ý rằng, cùng một đối tượng khảo sát có thể có nhiều mô hình cơ học khác nhau, tuỳ thuộc vào yêu cầu của bài toán đặt ra.

4. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA CƠ HỌC KỸ THUẬT

Bài toán cơ bản thứ nhất của Cơ học kỹ thuật là *bài toán xây dựng mô hình cơ học* cho các hệ kỹ thuật. Trong giáo trình này ta chỉ đưa ra mô hình vật rắn và hệ vật rắn trong việc mô hình hoá cho các hệ kỹ thuật. Tuy vậy, đây là bài toán rất khó. Các mô hình cơ học được xây dựng, thường là các mô hình gần đúng. Trong giáo trình này cố gắng giúp cho sinh viên làm quen với một số mô hình cơ học của các máy và các công trình. Việc xây dựng các mô hình mới chính xác hơn là bài toán vượt ra ngoài chương trình môn học

Bài toán cơ bản thứ hai của Cơ học kỹ thuật là *bài toán tính toán trên mô hình*, ở đây có thể sử dụng các phương pháp giải tích hoặc các phương pháp số để tính toán. Ngày nay với sự trợ giúp của máy tính và các phần mềm, ngày càng nhiều bài toán cơ học có thể giải quyết tương đối đơn giản. Phần này là nội dung cơ bản của giáo trình.

5. VỊ TRÍ CỦA MÔN HỌC CƠ HỌC KỸ THUẬT

– Cung cấp những kiến thức cơ bản và tổng quát về chuyển động và cân bằng của vật rắn và hệ vật rắn phẳng.

– Rèn luyện một số phương pháp tư duy khoa học cho người kỹ sư tương lai. Đó là phương pháp tiên đề và phương pháp mô hình.

– Tạo những tiềm năng ban đầu cho sinh viên để họ có thể nghiên cứu giải quyết các bài toán kỹ thuật.

– Cung cấp các kiến thức cơ sở để sinh viên học tiếp các môn học tiếp theo như Sức bền vật liệu, Phương pháp phần tử hữu hạn, Nguyên lý máy, Chi tiết máy, Cơ học kết cấu, Thuỷ khí kỹ thuật, Dao động kỹ thuật, Động lực học máy, Động lực học công trình, Rôbôt công nghiệp, Mô hình các hệ Cơ điện tử, Công nghệ chế tạo máy, Nguyên lý gia công vật liệu,...

PHẦN 1. TĨNH HỌC VẬT RẮN

MỞ ĐẦU

Tĩnh học vật rắn là phần thứ nhất của giáo trình Cơ học kỹ thuật. Trong đó, chúng ta trình bày học thuyết về lực và sự cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của các lực. Chú ý rằng lý thuyết hệ lực là một phần quan trọng của Cơ học. Nội dung chủ yếu của tĩnh học gồm các vấn đề sau:

– Xây dựng các khái niệm cơ bản: lực, ngẫu lực, mômen của lực đối với một điểm, mômen của ngẫu lực, vật rắn, cân bằng của vật rắn,...

– Xây dựng hệ tiên đề tĩnh học.

– Thu gọn hệ lực. Nội dung của thu gọn hệ lực là biến đổi một hệ lực tác dụng lên vật rắn thành một hệ lực khác tương đương, nhưng đơn giản hơn.

– Tìm điều kiện cân bằng của một vật rắn và hệ nhiều vật rắn dưới tác dụng của các lực.

– Xác định phản lực liên kết, nội lực ở các mặt cắt của vật rắn.

– Tìm điều kiện cân bằng của vật rắn khi có ma sát.

– Xác định trọng tâm vật rắn.

Ở đây, chúng ta sử dụng phương pháp tiên đề và phương pháp mô hình để nghiên cứu tĩnh học vật rắn. Chú ý rằng, không nhất thiết phải sử dụng phương pháp tiên đề, vẫn có thể nghiên cứu tĩnh học vật rắn.

Một trong các khó khăn khi học môn Cơ học kỹ thuật là sinh viên chưa có kinh nghiệm xác định phương và chiều của các phản lực liên kết. Khó khăn này chỉ có thể khắc phục được khi chúng ta chịu khó giải tương đối nhiều các dạng bài tập. Qua đó tự rút ra các kinh nghiệm cần thiết.

Công cụ toán học được sử dụng trong phần tĩnh học là phép tính véc tơ và phép tính ma trận. Ngày nay, người ta thường sử dụng các phần mềm đa năng như MAPLE, MATLAB, MATCAD, MATHEMATICA,... để giải các bài toán tĩnh học vật rắn. Tuy nhiên, cần tránh việc lạm dụng các phần mềm này.

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

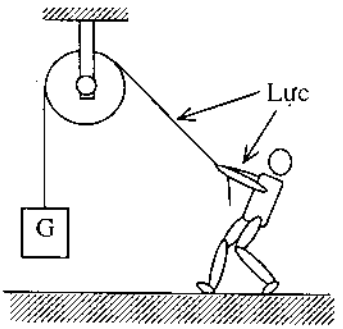
Trong chương này ta đưa ra ba khái niệm cơ bản là lực, vật rắn tuyệt đối, cân bằng và một số định nghĩa quy ước như định nghĩa hệ lực, hệ lực tương đương, ngẫu lực,... Sau đó trình bày hệ năm tiên đề tĩnh học của vật rắn tự do. Cuối chương trình bày các khái niệm liên kết, phản lực liên kết, nguyên lý giải phóng liên kết để có thể tính toán cân bằng các vật rắn chịu liên kết.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

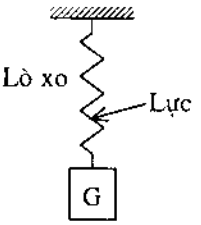
1.1. Các khái niệm cơ bản

a) Lực. Lực là một khái niệm cơ bản của cơ học. Tuy nhiên, khái niệm này rất khó định nghĩa một cách chặt chẽ, mà chỉ có thể giải thích qua các thí dụ cụ thể. Hình 1.1 và hình 1.2 chỉ ra hai thí dụ. Trên hình 1.1, tay người phải tạo ra một lực để giữ cho vật nặng trọng lực $\vec{G}$ không trượt xuống. Trên hình 1.2 lò xo phải dãn ra, tạo ra một lực cân bằng với trọng lực $\vec{G}$ của vật nặng treo vào lò xo. Ta thừa nhận sự tồn tại của trọng lực và tác dụng của nó. Từ kinh nghiệm hàng ngày ta có thể xem lực là một đại lượng, mà có thể so sánh với tác dụng của trọng lực.

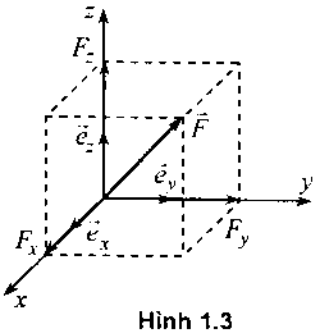
Định nghĩa. Trong cơ học, lực là một đại lượng vật lý, mà có thể so sánh cân bằng với tác dụng của trọng lực.



Hình 1.1



Hình 1.2



Hình 1.3

Từ thực tế thấy rằng, lực được xác định bởi ba yếu tố: Độ lớn, hướng tác dụng và điểm đặt. Vì vậy, lực được biểu diễn bằng đại lượng véc tơ buộc, ký hiệu là $\vec{F}$. Ta quy định véc tơ lực có gốc trùng với điểm đặt của lực, có phương và chiều trùng với phương và chiều tác dụng của lực, có độ dài tỷ lệ với độ lớn của lực. Đường thẳng mang véc tơ lực được gọi là đường tác dụng của lực.

Đơn vị của lực là Newton, ký hiệu là: (N), 1N = 1kgm/s^2.

Chú ý. Trong hệ toạ độ Descartes vuông góc (hình 1.3) véctơ lực $\vec{F}$ được biểu diễn dưới dạng

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \tag{1.1}$$

Trong đó $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ là các véc tơ đơn vị trên các trục toạ độ, F_x, F_y, F_z là các hình chiếu của véc tơ lực $\vec{F}$ trên các trục Ox, Oy và Oz. Độ lớn của lực $\vec{F}$ được xác định bởi định lý Pythagoras

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{1.2}$$

Hướng của lực $\vec{F}$ được xác định bởi các côsin chỉ hướng

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F} \tag{1.3}$$

Véctơ $\vec{F}$ viết dưới dạng (1.1) được gọi là véc tơ hình học. Ba thành phần F_x, F_y, F_z của véc tơ hình học $\vec{F}$ có thể viết lại dưới dạng một ma trận cột

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Ma trận cột (1.4) còn được gọi là véc tơ đại số.

b) Vật rắn tuyệt đối. Vật rắn tuyệt đối là tập hợp các chất điểm, mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó luôn luôn không đổi.

Như thế, dưới tác dụng của lực, vật rắn tuyệt đối không bị biến dạng. Đây là một sự lý tưởng hoá vật rắn. Thật ra, dưới tác dụng của lực, vật rắn ít nhiều đều bị biến dạng. Khi các biến dạng của vật rắn đủ nhỏ, ta có thể bỏ qua và xem là vật rắn tuyệt đối. Trong giáo trình này để đơn giản cách nói, ta quy ước gọi tắt vật rắn tuyệt đối là vật rắn.

c) Cân bằng

– *Hệ quy chiếu.* Một vật thể được chọn làm mốc để theo dõi chuyển động của vật rắn được gọi là hệ quy chiếu. Trong cơ học, người ta thường

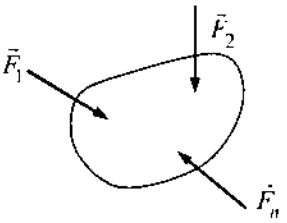
gắn vào hệ quy chiếu một hệ toạ độ. Hệ toạ độ chỉ là phương tiện để tính toán. Nhiều khi để đỡ cồng kềnh, người ta dùng ngay hệ toạ độ đó thay cho hệ quy chiếu.

– *Vật rắn cân bằng.* Một vật rắn được gọi là ở trạng thái cân bằng đối với một hệ quy chiếu đã chọn, nếu nó đứng yên (không thay đổi vị trí) trong hệ quy chiếu đó. Một vật rắn ở trạng thái cân bằng được gọi tắt là một vật rắn cân bằng.

1.2. Một số định nghĩa quy định

a) Hệ lực. Tập hợp các lực tác dụng lên một vật rắn (hình 1.4) được gọi là một hệ lực. Ký hiệu hệ lực bởi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$.

b) Hai hệ lực tương đương. Hai hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ và $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, ..., \vec{\phi}_m)$ tác dụng lên cùng một vật rắn là tương đương, nếu chúng có cùng tác dụng cơ học như nhau đối với vật rắn. Cụ thể là hai hệ lực tương đương khi tác dụng riêng rẽ lên vật rắn sẽ gây nên trạng thái chuyển động (hay cân bằng) của vật rắn như nhau. Ta dùng dấu " ≡ " để ký hiệu tương đương



Hình 1.4

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, ..., \vec{\phi}_m)$$

c) Hợp lực của hệ lực. Nếu hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ tương đương với một lực $\vec{R}$, thì lực đó được gọi là hợp lực của hệ lực đã cho

$$\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n).$$

Chú ý: Không phải hệ lực nào cũng có hợp lực.

d) Hệ lực cân bằng. Hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ tác dụng lên một vật rắn, mà không làm thay đổi trạng thái chuyển động (hay cân bằng) của vật rắn được gọi là một hệ lực cân bằng.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv 0.$$

đ) Ngẫu lực*. Một hệ gồm hai lực song song, ngược chiều cùng độ lớn được gọi là một ngẫu lực (hình 1.5). Ký hiệu ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$.

Hình 1.5

---

* Khái niệm ngẫu lực do nhà bác học người Pháp, Louis Poinsot (1777–1859) đưa ra năm 1804

Khoảng cách d giữa hai đường tác dụng của hai lực thành phần của một ngẫu lực được gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực. Mặt phẳng E chứa hai lực của ngẫu lực được gọi là mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực.

e) Vật rắn tự do và vật rắn chịu liên kết. Vật rắn tự do là vật rắn có thể thực hiện mọi di chuyển nhỏ từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận của nó một cách tuỳ ý. Ngược lại, nếu có ít nhất một di chuyển nào đó của vật rắn bị cản trở, thì vật rắn được gọi là vật rắn chịu liên kết.

f) Hệ nhiều vật rắn cân bằng. Một hệ nhiều vật rắn được gọi là cân bằng nếu mỗi vật rắn thuộc hệ cân bằng.

2. HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

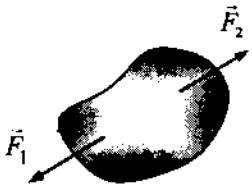
Hệ tiên đề là một tập hợp các mệnh đề được công nhận, không chứng minh. Chúng phải độc lập nhau, ít nhất về số lượng nhưng đủ để nghiên cứu đối tượng. Để nghiên cứu cân bằng của vật rắn tự do, hệ tiên đề tĩnh học chỉ cần 5 tiên đề. Sau đó xét cân bằng của vật rắn chịu liên kết, ta đưa thêm vào nguyên lý giải phóng liên kết. Tuy nhiên, nếu xét cân bằng của vật rắn chịu liên kết, có thể đưa nguyên lý giải phóng liên kết vào thành tiên đề thứ 6 và khi đó hệ tiên đề tĩnh học sẽ gồm 6 tiên đề.

2.1. Hệ tiên đề tĩnh học

Hệ tiên đề tĩnh học gồm 5 tiên đề như sau.

a) Tiên đề 1 *(Tiên đề về sự cân bằng của vật rắn)*

Điều kiện cần và đủ để cho một vật rắn tự do cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực này có chung một đường tác dụng, cùng độ lớn và ngược chiều nhau (hình 1.6).



Hình 1.6

Ý nghĩa của tiên đề 1: Quy định một tiêu chuẩn cân bằng của vật rắn tự do dưới tác dụng của hệ lực đơn giản nhất.

b) Tiên đề 2 *(Tiên đề về thêm vào hoặc bớt đi một cặp lực cân bằng)*

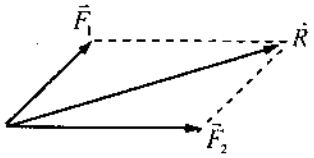
Tác dụng của một hệ lực lên vật rắn tự do không thay đổi nếu ta thêm vào hoặc bớt đi một cặp lực cân bằng.

Ý nghĩa của tiên đề 2: Quy định một phép biến đổi tương đương cơ bản về lực.

c) Tiên đề 3 *(Tiên đề hình bình hành lực)*

Hai lực đặt vào cùng một điểm thì có hợp lực. Hợp lực là một lực đặt vào

điểm đồng quy đó và được xác định bằng đường chéo của hình bình hành, mà hai cạnh là hai lực thành phần đã cho (hình 1.7).

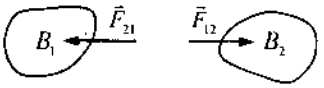


Hình 1.7

Ý nghĩa của tiên đề 3: Quy định một phép biến đổi tương đương cơ bản về lực.

Chú ý: Tiên đề 3 không có phần đảo. Bài toán phân tích một lực thành hai lực đồng quy là bài toán có vô số lời giải.

Nếu biết thêm giả thiết (chẳng hạn phương của hai lực thành phần) thì bài toán mới có nghiệm duy nhất.



Hình 1.8

d) Tiên đề 4 *(Tiên đề tác dụng và phản tác dụng)*

Lực tác dụng tương hỗ giữa hai vật thể là hai lực có chung một đường tác dụng, cùng độ lớn, nhưng ngược chiều nhau (hình 1.8).

Ý nghĩa của tiên đề 4: Là cơ sở để khảo sát bài toán hệ nhiều vật rắn.

Chú ý: Hai lực $\vec{F}_{12}$ và $\vec{F}_{21}$ trên hình 1.8 không tạo thành một cặp lực cân bằng vì chúng tác dụng vào hai vật rắn khác nhau.

đ) Tiên đề 5 *(Tiên đề hoá rắn)*

Một vật biến dạng tự do ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực nào đó, thì nếu như vật đó rắn lại nó vẫn ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực đó.

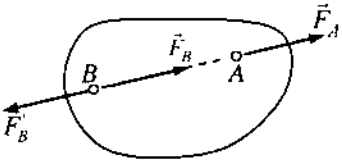
Ý nghĩa của tiên đề 5: Quy định điều kiện cần để vật thể biến dạng ở cân bằng. Đó là hệ lực tác dụng lên nó phải thỏa mãn các điều kiện cân bằng của vật rắn tuyệt đối.

Chú ý: Tiên đề 5 không có mệnh đề đảo.

2.2. Một số hệ quả

a) Định lý trượt lực. Tác dụng của lực lên một vật rắn không thay đổi khi ta trượt lực trên đường tác dụng của nó.

Chứng minh. Giả sử lực $\vec{F}_A$ tác dụng lên vật rắn tại điểm A. Ta đặt thêm vào tại điểm B hai lực $\vec{F}_B$ và $\vec{F}_B'$ cùng trị số, ngược chiều nhau (hình 1.9). Hai lực này cùng trị số và có chung đường tác dụng với lực $\vec{F}_A$. Theo tiên đề 2 suy ra:



Hình 1.9

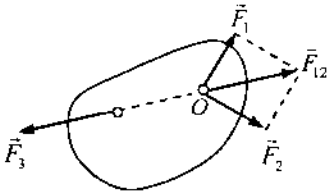
$$\vec{F}_A \equiv (\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_B') \equiv (\vec{F}_B, \vec{F}_A, \vec{F}_B') \equiv \vec{F}_B$$

Như thế, lực tác dụng lên vật rắn được biểu diễn bằng véc tơ trượt. Chú ý rằng, tính chất này chỉ đúng khi lực tác dụng lên một vật rắn.

b) Định lý ba lực cân bằng. Một hệ ba lực cân bằng, nếu trong đó có hai lực đồng quy, thì lực thứ ba cũng phải đi qua điểm đồng quy đó và cả ba lực phải nằm trên cùng một mặt phẳng.

Chứng minh. Theo giả thiết $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \equiv 0$ và $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cắt nhau tại điểm O (hình 1.10). Theo tiên đề 3 suy ra: $\vec{F}_{12} \equiv \left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$. Vậy

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \equiv (\vec{F}_{12}, \vec{F}_3) \equiv 0.$$



Hình 1.10

Theo tiên đề 1 thì $\vec{F}_3$ và $\vec{F}_{12}$ phải nằm trên cùng một đường thẳng. Do đó đường tác dụng của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ phải gặp nhau tại một điểm O. Do lực $\vec{F}_3 = -\vec{F}_{12}$ nên lực $\vec{F}_3$ phải nằm trong mặt phẳng chứa hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.

c) Chú ý. Trong số năm tiên đề tĩnh học, các Tiên đề 1, 2 và các hệ quả (định lý trượt lực, định lý ba lực cân bằng) liên quan trực tiếp đến giả thiết gần đúng về vật rắn tuyệt đối. Giả thiết vật rắn tuyệt đối là một giả thiết gần đúng, rất lý tưởng. Thực tế không có vật thể nào là rắn tuyệt đối cả. Các tiên đề 3 và 4 không liên quan trực tiếp đến giả thiết gần đúng về vật rắn tuyệt đối. Khi áp dụng các tiên đề và các định lý cần quan tâm đến các chú ý này.

3. LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

3.1. Liên kết

a) Định nghĩa. Liên kết là những điều kiện cản trở di chuyển của vật khảo sát.

Như thế, muốn tạo nên liên kết thì trong nhiều trường hợp phải có vật gây liên kết. Thí dụ một quyển sách đặt trên bàn, nếu chọn quyển sách là vật khảo sát, thì cái bàn là vật gây liên kết.

b) Chú ý. Phân biệt giữa khái niệm liên kết và vật gây liên kết. Trong thí dụ trên cái bàn là vật gây liên kết chứ không phải là liên kết.

3.2. Lực liên kết và phản lực liên kết

Khi khảo sát một hệ gồm nhiều vật rắn, thì lực xuất hiện ở chỗ tiếp xúc hoặc nối ghép giữa các vật rắn được gọi là lực liên kết. Theo tiên đề 4, các

lực này xuất hiện từng cặp, có chung một đường tác dụng, cùng trị số nhưng ngược chiều nhau.

Lực liên kết do vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát được gọi là phản lực liên kết.

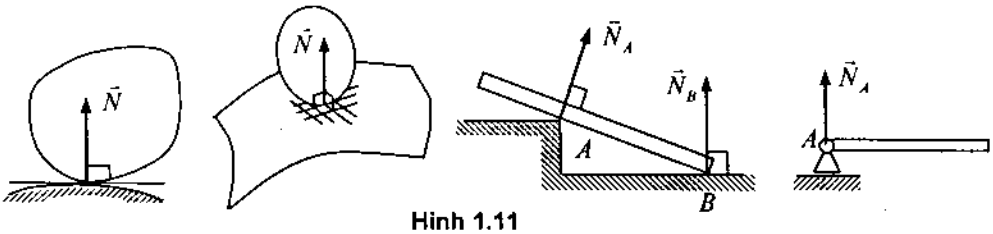
3.3. Các loại liên kết thường gặp và các phản lực liên kết tương ứng

Các lực tác dụng lên một vật rắn hoặc hệ các vật rắn được phân thành: Lực hoạt động và lực liên kết. Lực hoạt động là lực cho trước tác dụng lên vật rắn. Thí dụ như trọng lực, lực đẩy của gió, v.v... Các lực liên kết là các lực xuất hiện do các liên kết giữa các vật, hoặc do liên kết giữa vật khảo sát và vật gây liên kết.

Các phản lực liên kết phụ thuộc vào các lực hoạt động tác dụng lên vật rắn và phụ thuộc vào kết cấu của các liên kết. Trong tĩnh học ta giới hạn chỉ khảo sát các loại liên kết hình thành do sự tiếp xúc hình học giữa các vật rắn. Các liên kết loại này được gọi là các liên kết hình học.

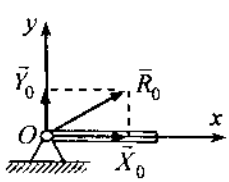
Nói chung phản lực liên kết có hướng ngược chiều với hướng di chuyển mà vật khảo sát bị liên kết cản trở, có độ lớn phụ thuộc vào các lực hoạt động tác dụng lên vật rắn. Dưới đây ta trình bày một số quy tắc thực hành tìm phương và chiều phản lực liên kết của một số liên kết thường gặp. Để đơn giản ta bỏ qua ma sát tại các liên kết .

a) Liên kết tựa. Vật rắn khảo sát tựa lên vật gây liên kết. Nếu bỏ qua ma sát thì phản lực liên kết tựa có phương vuông góc với mặt tựa hoặc đường tựa như hình 1.11

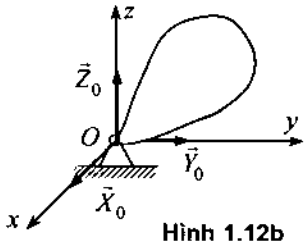


Hình 1.11

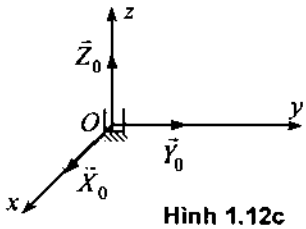
b) Liên kết bản lề. Liên kết bản lề cho phép vật rắn quay quanh một điểm hoặc một trục cố định. Ta có các dạng sau:



Hình 1.12a



Hình 1.12b



Hình 1.12c

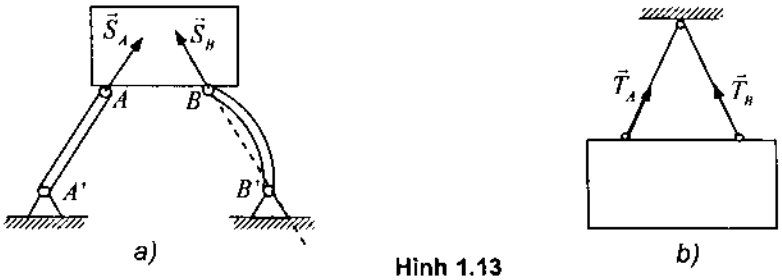
– *Bản lề trụ* (hình 1.12a). Liên kết cho phép vật rắn có thể quay quanh trục Oz vuông góc với mặt phẳng Oxy. Phản lực liên kết $\vec{R}_O$ tại O chưa biết về phương, chiều và trị số. Vì vậy trong bài toán phẳng lực này được phân thành hai thành phần $\vec{X}_0$, $\vec{Y}_0$ vuông góc với nhau.

– *Bản lề cầu* (hình 1.12b). Liên kết cho phép vật rắn có thể quay quanh điểm O trong không gian. Phản lực liên kết tại O có thể phân làm 3 thành phần chưa biết vuông góc với nhau $\vec{R}(X_O, Y_O, Z_O)$

– *Bản lề cối* (hình 1.12c). Liên kết cho phép vật rắn có thể quay quanh trục Oz. Phản lực liên kết $\vec{R}_O$ đặt tại điểm O được phân làm 3 thành phần chưa biết vuông góc với nhau (X_O, Y_O, Z_O) hay $\vec{R}(X_O, Y_O, Z_O)$. Khác với bản lề cầu ở loại bản lề cối $Z_O > 0$.

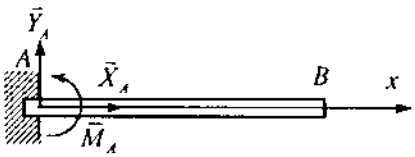
c) Liên kết thanh không trọng lượng. Với liên kết thanh không trọng lượng (giả thiết gần đúng) thì phản lực liên kết sẽ hướng dọc theo đường nối hai đầu thanh (hình 1.13a).

d) Liên kết dây mềm không dãn, không trọng lượng. Phản lực liên kết hướng dọc theo dây (hình 1.13b). Phản lực của dây tác dụng vào vật khảo sát còn được gọi là sức căng của dây.



Hình 1.13

e) Liên kết ngàm phẳng. Trong trường hợp ngàm phẳng (hình 1.14), vật gây liên kết và vật chịu liên kết được nối cứng với nhau. Liên kết ngàm ngăn cản chuyển động theo phương x, phương y và ngăn cản chuyển động xoay quanh A của vật khảo sát. Vì vậy phản lực liên kết gồm $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ và ngẫu lực $\vec{M}_A$. Trong trường hợp ngàm không gian các phản lực liên kết phức tạp hơn.



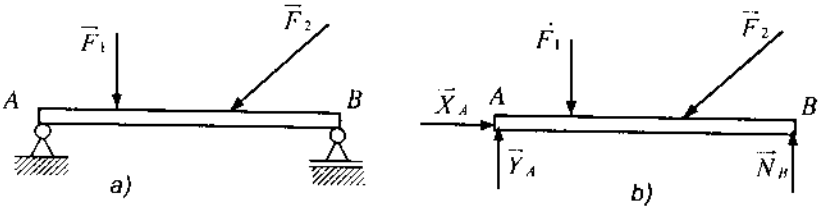
Hình 1.14

3.4. Nguyên lý giải phóng liên kết Lagrange*

a) Nguyên lý. Một vật rắn chịu liên kết cân bằng có thể xem là một vật rắn tự do cân bằng nếu ta giải phóng các liên kết, thay tác dụng của các liên kết được giải phóng bằng các phản lực liên kết tương ứng.

b) Chú ý. Nhờ nguyên lý giải phóng liên kết, ta có thể áp dụng 5 tiên đề tĩnh học phát biểu cho vật rắn tự do vào vật rắn chịu liên kết. Khi đó thay vật rắn chịu liên kết bằng một vật rắn tự do chịu tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động (các lực cho trước) và các phản lực liên kết tương ứng với các liên kết được giải phóng.

c) Thí dụ. Cho dầm chịu liên kết và chịu lực như hình vẽ 1.15. Theo nguyên lý *giải phóng liên kết*, thay liên kết tại A và B bằng các phản lực liên kết tương ứng. Khi đó thanh AB cân bằng dưới tác dụng của hệ lực: $\left(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \equiv 0$



Hình 1.15

* Joseph Louis Lagrange (1736–1813), nhà cơ học và toán học người Pháp.

Chương 2

HỆ LỰC PHẲNG VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN PHẲNG

Hệ lực gồm các lực cùng nằm trong một mặt phẳng được gọi là hệ lực phẳng. Tuy hệ lực phẳng chưa phải là hệ lực tổng quát, nhưng nhiều bài toán kỹ thuật dẫn đến khảo sát hệ lực phẳng. Về phương pháp luận, phương pháp nghiên cứu hệ lực phẳng là khá điển hình cho phương pháp nghiên cứu các hệ lực bất kỳ. Ở đây, sẽ lần lượt xét các bài toán: Thu gọn hệ lực phẳng về dạng đơn giản và tìm điều kiện cân bằng của vật rắn phẳng dưới tác dụng của hệ lực phẳng.

1. HAI ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC PHẲNG

1.1. Véctơ chính của hệ lực phẳng

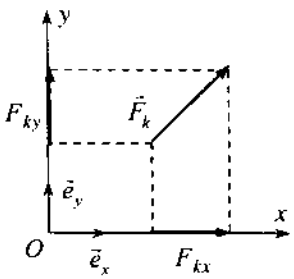
a) Định nghĩa 2.1. Véctơ chính của hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$, ký hiệu là $\vec{R}'$, là tổng hình học các véctơ lực thành phần của hệ

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{1.1}$$

b) Cách xác định véctơ chính

Phương pháp hình chiếu: Chiếu lực thành phần $\vec{F}_k$ lên hai trục toạ độ vuông góc Ox và Oy ta được $\vec{F}_k(F_{kx}, F_{ky})$

$$\vec{F}_k = F_{kx}\vec{e}_x + F_{ky}\vec{e}_y.$$



Hình 2.1

Từ (1.1) suy ra hình chiếu của $\vec{R}'$ trên hai trục toạ độ là

$$R'_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \ , \quad R'_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \tag{1.2}$$

Phương pháp vẽ: Có thể xác định véctơ chính bằng phương pháp vẽ đa giác lực.

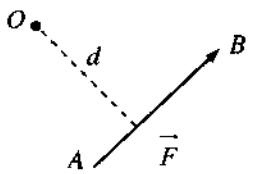
1.2. Mômen chính của hệ lực phẳng đối với một điểm

***a) Định nghĩa 2.2** (Mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O).* Mômen đại số của lực $\vec{F}$ đối với tâm O, ký hiệu là $\overline{m}_0(\vec{F})$, là đại lượng đại số

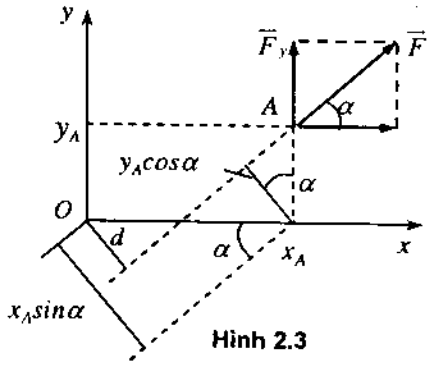
$$\overline{m}_0(\vec{F}) = \pm Fd \tag{1.3}$$

Trong (1.3) ta lấy dấu cộng (+) nếu lực $\vec{F}$ quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ và lấy dấu trừ (–) nếu lực $\vec{F}$ quay quanh O thuận chiều kim đồng hồ*.

Trong công thức (1.3) d là khoảng cách từ tâm O đến đường tác dụng của lực $\vec{F}$ và được gọi là cánh tay đòn.



Hình 2.2



Hình 2.3

b) Phương pháp giải tích xác định mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O

Trong hệ toạ độ Oxy, lực $\vec{F}$ được biểu diễn

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y,$$

điểm đặt của lực có toạ độ $A(x_A, y_A)$. Ta có công thức tính mômen như sau

$$\overline{m}_0(\vec{F}) = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = x_A F_y - y_A F_x \tag{1.4}$$

Theo hình 2.3 suy ra:

$$\overline{m}_O(\vec{F}) = +Fd = F\left(x_A \sin\alpha - y_A \cos\alpha\right)$$
$$= \left(F\sin\alpha\right)x_A - \left(F\cos\alpha\right)y_A = x_A F_y - y_A F_x$$

Công thức giải tích này hay được dùng khi ta sử dụng công cụ tin học.

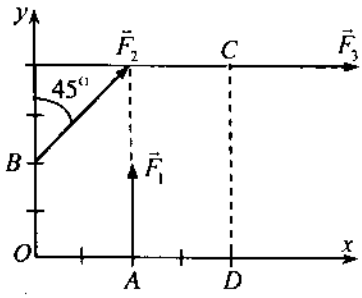
---

* Khái niệm mômen của lực đối với một tâm đã được sử dụng từ thời Aristoteles (BC 384–322) và Archimeches (BC 287–212). Tuy nhiên người đầu tiên trình bày tương đối rõ ràng khái niệm này là Leonado da Vinci (1452–1519). Sau đó nhà bác học người Ý Giovanni Batista Benedetti (1530–1590) đã trình bày rõ ràng hơn khái niệm này vào năm 1585.

*c) **Định nghĩa 2.3** (Mômen chính).* Mômen chính của hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ đối với điểm O là một đại lượng đại số bằng tổng các mômen đại số của các lực thành phần thuộc hệ lấy đối với điểm O đó

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\vec{F}_k). \qquad (1.5)$$

Thí dụ 2.1. Cho hệ ba lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\right)$ nằm trên cùng một mặt phẳng như hình 2.4. Hãy xác định véc tơ chính và mômen chính của hệ lực đối với tâm O. Cho biết $F_1 = 3(N)$, $F_2 = 2\sqrt{2}(N)$, $F_3 = 4(N)$. Toạ độ các điểm A(2,0) cm, B(0,2) cm, C(4,4) cm.



Hình 2.4

Lời giải. Véctơ chính của hệ lực là

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Từ đó ta có

$$R'_x = 0 + 2 + 4 = 6(N),\ R'_y = 3 + 2 = 5(N)$$

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y} = \sqrt{61} = 7{,}81025(N)$$

Mômen chính của hệ lực đối với tâm O

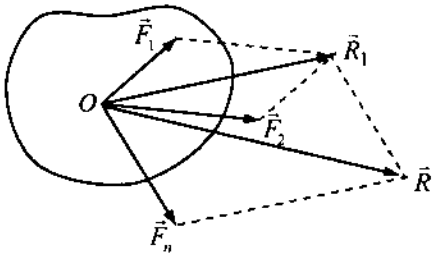
$$\bar{M}_O = \bar{m}_O(\vec{F}_1) + \bar{m}_O(\vec{F}_2) + \bar{m}_O(\vec{F}_3) = 3.2 - 2\sqrt{2}.\sqrt{2} - 4.4 = -14(Ncm)$$

2. THU GỌN HỆ LỰC PHẲNG

2.1. Thu gọn hệ lực phẳng đồng quy

Định lý 2.1. Thu gọn hệ lực phẳng đồng quy ta được một hợp lực. Hợp lực đặt tại điểm đồng quy và được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực đã cho

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (2.1)$$



Hình 2.5

Chứng minh. Cho hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ đồng quy tại O. Áp dụng liên tiếp tiên đề 3 suy ra

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{R}_1,\quad (\vec{R}_1, \vec{F}_3) \equiv \vec{R}_2, \ldots,\quad (\vec{R}_{n-2}, \vec{F}_n) \equiv \vec{R}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,\quad \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,\ \ldots,\quad \vec{R} = \vec{R}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$$

2.2. Thu gọn hệ ngẫu lực phẳng

a) Mômen đại số của ngẫu lực

Định nghĩa 2.4. Mômen đại số của ngẫu lực là một đại lượng đại số được định nghĩa bởi hệ thức sau

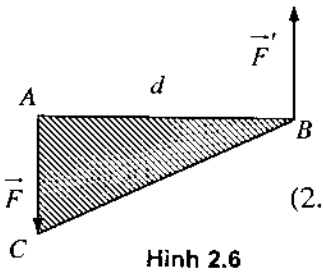
$$\overline{m}(\vec{F},\vec{F}') = \pm Fd \tag{2.2}$$

Dấu cộng (+) lấy khi ngẫu lực quay ngược chiều kim đồng hồ, dấu trừ (–) lấy trong trường hợp ngược lại.

Chú ý. Từ định nghĩa 2.4 suy ra

$$\overline{m}(\vec{F},\vec{F}') = \overline{m}_A(\vec{F}'_B) = \overline{m}_B(\vec{F}_A) \tag{2.3}$$

$$\left|\overline{m}(\vec{F},\vec{F}')\right| = 2S_{\Delta ABC} = Fd \tag{2.4}$$



Hình 2.6

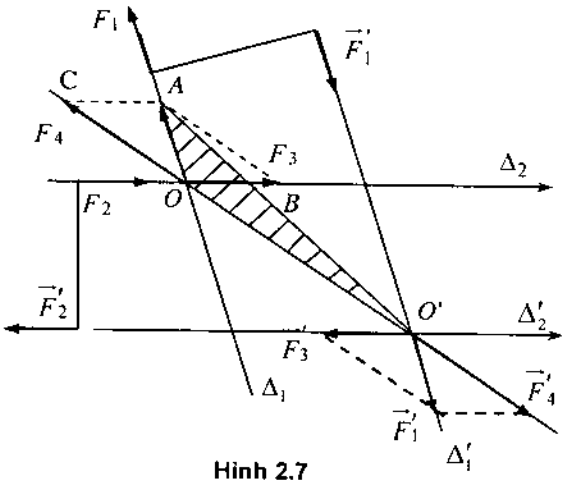
b) Điều kiện tương đương của hai ngẫu lực trong cùng một mặt phẳng

Định lý 2.2. Hai ngẫu lực nằm trong cùng một mặt phẳng là tương đương khi mômen đại số của chúng bằng nhau

$\overline{m}(\vec{F}_1,\vec{F}_1') = \overline{m}(\vec{F}_2,\vec{F}_2') \Rightarrow (\vec{F}_1,\vec{F}_1') \equiv (\vec{F}_2,\vec{F}_2')$ *Chứng minh.* Gọi Δ_1 là đường tác dụng của lực $\vec{F}_1$, Δ_2 là đường tác dụng của lực $\vec{F}_2$. Như thế có hai khả năng xảy ra: hoặc Δ_1 cắt Δ_2 hoặc $\Delta_1 // \Delta_2$.

Trường hợp 1: Δ_1 cắt Δ_2 ở O còn Δ_1' cắt Δ_2' ở O'. Ta trượt lực $\vec{F}_1$ đến O $\left(\vec{F}_1 = \overline{OA}\right)$ và lực $\vec{F}_1'$ đến O'. Từ A kẻ $AB // OO'$, $AC // \Delta_2$

Phân tích lực $\vec{F}_1$ thành hai thành phần theo trục Δ_2 và đường thẳng OO' ta được $\vec{F}_1 \equiv (\vec{F}_3,\vec{F}_4)$. Phân tích lực $\vec{F}_1'$ theo hai thành phần theo các trục Δ_2' và OO' ta được $\vec{F}_1' \equiv (\vec{F}_3,\vec{F}_3')$. Như thế suy ra



Hình 2.7

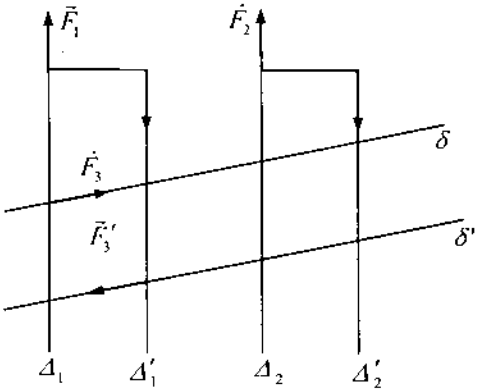
$$(\vec{F}_1,\vec{F}_1') \equiv (\vec{F}_3,\vec{F}_3',\vec{F}_4,\vec{F}_4') \equiv (\vec{F}_3,\vec{F}_3'), \text{ vì } (\vec{F}_4,\vec{F}_4') \equiv 0 \tag{1}$$

Do $\left|\overline{m}(\vec{F}_1,\vec{F}_1')\right| = 2S_{\Delta OAO'} = 2S_{\Delta OBO'} = \left|\overline{m}(\vec{F}_3,\vec{F}_3')\right|$ và hai ngẫu lực $(\vec{F}_1,\vec{F}_1')$ và $(\vec{F}_3,\vec{F}_3')$ cùng chiều quay nên $\overline{m}(\vec{F}_1,\vec{F}_1') = \overline{m}(\vec{F}_3,\vec{F}_3')$.

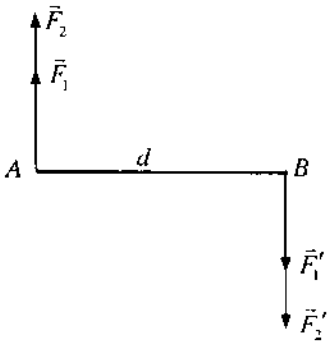
Chú ý đến giả thiết suy ra $\bar{m}(\vec{F}_3,\vec{F}_3') = \bar{m}(\vec{F}_2,\vec{F}_2')$. Hai ngẫu lực $(\vec{F}_2,\vec{F}_2')$ và $(\vec{F}_3,\vec{F}_3')$ có cùng cánh tay đòn, cùng chiều quay nên

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_3,\ \vec{F}_2' = \vec{F}_3' \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(\vec{F}_1,\vec{F}_1') \equiv (\vec{F}_3,\vec{F}_3') \equiv (\vec{F}_2,\vec{F}_2')$.



Hình 2.8



Hình 2.9

Trường hợp 2: $\Delta_1 // \Delta_2$. Kẻ hai đường thẳng song song δ và δ' cắt Δ_1 và Δ_2. Tương tự như phần trên ta có thể biến đổi ngẫu lực $(\vec{F}_1,\vec{F}_1')$ về ngẫu lực $(\vec{F}_3,\vec{F}_3')$ mà $\bar{m}_1 = \bar{m}_3$

Hai ngẫu lực $(\vec{F}_3,\vec{F}_3')$ và $(\vec{F}_2,\vec{F}_2')$ có mômen $\bar{m}_3 = \bar{m}_2$. Theo trên ta có $(\vec{F}_3,\vec{F}_3') \equiv (\vec{F}_2,\vec{F}_2')$. Do đó $(\vec{F}_1,\vec{F}_1') \equiv (\vec{F}_2,\vec{F}_2')$. Định lý được chứng minh xong.

Từ định lý 2.2 suy ra các hệ quả sau:

– Tác dụng của ngẫu lực lên vật rắn không thay đổi nếu ta thay đổi cánh tay đòn và trị số của lực miễn sao mômen đại số của ngẫu lực không thay đổi.

– Ta có thể di chuyển tuỳ ý một ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng của nó.

– Tác dụng của ngẫu lực lên vật rắn được đặc trưng hoàn toàn bởi mômen đại số của nó.

c) Thu gọn hệ ngẫu lực phẳng

Định lý 2.3. Thu gọn hệ ngẫu lực phẳng ta được một ngẫu lực tổng hợp. Ngẫu lực tổng hợp nằm trong mặt phẳng tác dụng của các ngẫu lực thành phần và có mômen đại số bằng tổng các mômen đại số của các ngẫu lực thành phần.

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_k \qquad (2.5)$$

Chứng minh. Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp $n=2$. Cho hai ngẫu lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1'\right)$ có mômen là $\bar{m}_1$ và $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2'\right)$ có mômen là $\bar{m}_2$ cùng nằm trên một mặt phẳng. Theo hệ quả của định lý 2.2, có thể giả thiết hai ngẫu lực này có cùng cánh tay đòn. Để định ý, giả sử chúng có cùng chiều quay. Từ hình vẽ (2.9) suy ra

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2'\right) \equiv \left(\vec{R}, \vec{R}'\right)$$

với $\quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \ \vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$

$$\bar{m}\left(\vec{R}, \vec{R}'\right) = -Rd = -\left(F_1 + F\right)_2 d = -F_1 d - F_2 d = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$$

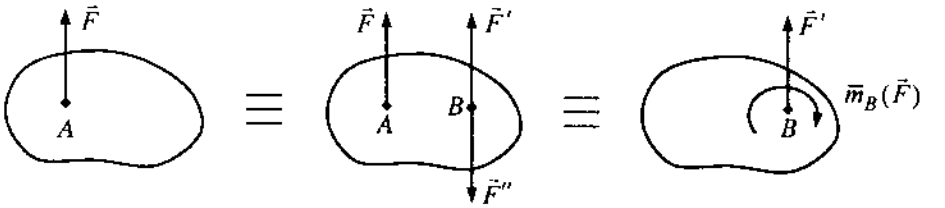
Việc mở rộng chứng minh sang trường hợp $n>2$ hoàn toàn tương tự .

2.3. Thu gọn hệ lực phẳng bất kỳ

a) Định lý 2.4 *(Định lý dời lực song song)* Một lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với lực $\vec{F}' = \vec{F}$ đặt tại B và một ngẫu lực có mômen bằng mômen của lực $\vec{F}$ lấy đối với điểm B.

Chứng minh. Cho lực $\vec{F}$ đặt tại A. Tại B đặt một cặp lực song song cùng trị số và cùng đường tác dụng $\vec{F}'$ và $\vec{F}''$, mà $\vec{F}' = \vec{F}$ suy ra:

$$\vec{F} \equiv \left(\vec{F}, \vec{F}'', \vec{F}'\right) \equiv \left(\vec{F}', \bar{m}_B\left(\vec{F}\right)\right)$$

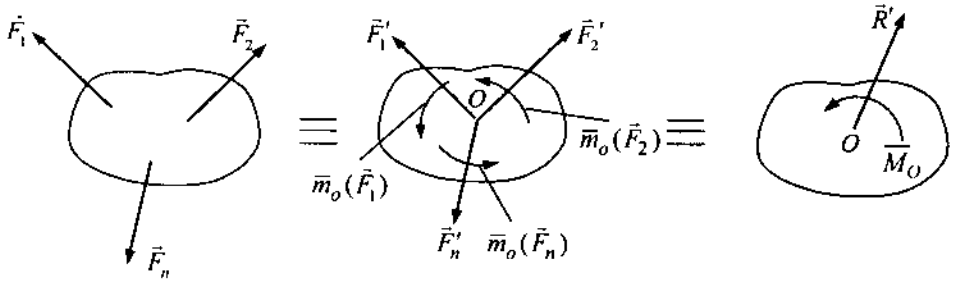


Hình 2.10

b) Định lý 2.5 *(Định lý Poinsot về thu gọn hệ lực).* Thu gọn hệ lực phẳng bất kỳ $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ về tâm O tuỳ ý ta được một lực và một ngẫu lực. Lực đặt tại tâm O và được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ, ngẫu lực có mômen bằng mômen chính của hệ lực lấy đối với tâm O.

Chứng minh. Áp dụng định lý dời lực song song ta có (hình 2.11)

$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) = \left(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n'\right)$ và $\left(\bar{m}_O\left(\vec{F}_1\right), \bar{m}_O\left(\vec{F}_2\right), ..., \bar{m}_O\left(\vec{F}_n\right)\right) = \left(\vec{R}', \bar{M}_O\right)$



Hình 2.11

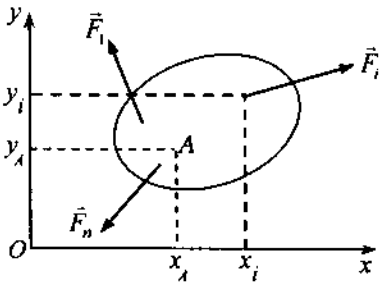
c) Ảnh hưởng của tâm thu gọn

Thu gọn hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\right)$ về hai tâm thu gọn O và A khác nhau, ta được

$$\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\right)=\left(\vec{R}_O',\overline{M}_0\right) \text{ với } \vec{R}_O'=\sum\vec{F}_k,\ \overline{M}_0=\sum\overline{m}_O\left(\vec{F}_k\right)$$

$$\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\right)=\left(\vec{R}_A',\overline{M}_A\right) \text{ với } \vec{R}_A'=\sum\vec{F}_k,\ \overline{M}_A=\sum\overline{m}_A\left(\vec{F}_k\right)$$

Như thế véctơ chính $\vec{R}_O'$, $\vec{R}_A'$ như nhau và không phụ thuộc vào tâm thu gọn, còn các mômen chính $\overline{M}_O$, $\overline{M}_A$ phụ thuộc vào tâm thu gọn theo quy luật như sau.



Hình 2.12

Định lý 2.6 (Định lý biến thiên mômen chính). Mô men chính của hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n\right)$ phụ thuộc vào tâm thu gọn theo quy luật

$$\overline{M}_O=\overline{M}_A+\overline{m}_0\left(\vec{R}_A'\right) \tag{2.6}$$

Trong đó $\overline{M}_O$, $\overline{M}_A$ là mômen chính của hệ lực đối với O và A, $\vec{R}_A'$ là véc tơ chính của hệ lực đặt tại A.

Chứng minh. Theo công thức (1.4) ta có

$$\begin{aligned}\sum\overline{m}_A\left(\vec{F}_i\right)&=\sum\left(x_i-x_A\right)F_{iy}-\left(y_i-y_A\right)F_{ix}\\&=\sum\left(x_iF_{iy}-y_iF_{ix}\right)-x_A\sum F_{iy}+y_A\sum F_{ix}\\&=\sum\overline{m}_O\left(\vec{F}_i\right)-\left(x_AR_y'-y_AR_x'\right)\end{aligned}$$

$$\overline{M}_A=\overline{M}_O-\overline{m}_O\left(\vec{R}'_A\right)\Rightarrow\overline{M}_O=\overline{M}_A+\overline{m}_O\left(\vec{R}'_A\right)$$

Hệ quả. Khi véctơ chính của hệ lực bằng không, mômen chính của hệ lực không phụ thuộc vào tâm thu gọn.

2.4. Các dạng chuẩn của hệ lực phẳng

a) Định nghĩa 2.5. Dạng chuẩn của một hệ lực là dạng đơn giản nhất mà hệ lực có thể biến đổi tương đương về được.

b) Các dạng chuẩn của hệ lực phẳng

Thu gọn hệ lực phẳng về một tâm O bất kỳ ta được một lực $\vec{R}'$ và một ngẫu lực $\bar{M}_0$. Căn cứ vào véctơ chính $\vec{R}'$ và momen chính $\bar{M}_0$ ta có các dạng chuẩn của hệ lực phẳng như sau:

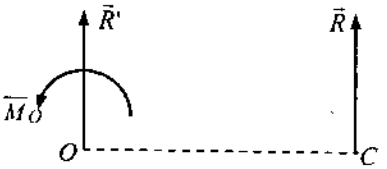
1. Nếu $\vec{R}' = 0, \bar{M}_0 = 0 : \left(\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n\right) \equiv$ một cặp lực cân bằng
2. Nếu $\vec{R}' = 0, \bar{M}_0 \neq 0 : \left(\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n\right) \equiv$ một ngẫu lực $\bar{M}_0$
3. Nếu $\vec{R}' \neq 0, \bar{M}_0 = 0 : \left(\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n\right) \equiv$ một hợp lực đặt tại O
4. Nếu $\vec{R}' \neq 0, \bar{M}_0 \neq 0$ áp dụng định lý dời lực song song, đưa hệ $\left(\vec{R}_0', \bar{M}_0\right)$ về một lực $\vec{R}$ đặt tại C và cách tâm O một đoạn $OC = \left|\bar{M}_0\right| / \left|\vec{R}'\right|$, sao cho $\bar{m}_O(\vec{R}_C) = \bar{M}_O$.

Tóm lại: Hệ lực phẳng có 3 dạng chuẩn

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv \vec{R} \quad khi\ \vec{R}' \neq 0$$

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv \bar{M}_0 \quad khi\ \vec{R}' = 0, \bar{M}_0 \neq 0$$

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv 0 \quad khi\ \vec{R}' = 0, \bar{M}_0 = 0.$$



Hình 2.13

c) Định lý 2.7 (Định lý Varignon*). Khi hệ lực phẳng có hợp lực, mômen của hợp lực đối với một tâm O bất kỳ bằng tổng mômen của các lực thành phần đối với tâm O đó

$$\left(\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n\right) \equiv \vec{R} \Rightarrow \bar{m}_0\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_0\left(\vec{F}_k\right). \tag{2.7}$$

Chứng minh. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực đã cho. Lấy một điểm O tuỳ ý và một điểm A trên đường tác dụng của hợp lực. Nếu thu gọn hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ về điểm A, thì ta được một hợp lực và $\bar{M}_A = 0$. Áp dụng định lý biến thiên mômen chính suy ra

$$\bar{M}_0 = \bar{M}_A + \bar{m}_0\left(\vec{R}_A\right) = \bar{m}_0\left(\vec{R}\right).$$

---

* Pierre Varignon (1640–1718) là nhà bác học người Pháp.

Hệ quả. Khi tính mômen của lực $\vec{F}$ đối với một điểm O, có thể phân tích lực $\vec{F}$ thành hai thành phần vuông góc $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ và áp dụng (2.7)

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}_x) + \vec{m}_O(\vec{F}_y) \tag{2.8}$$

2.5. Thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.2 (Tìm hợp lực của hai lực song song). Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ song song và đặt ở hai điểm A và B. Giả thiết $\vec{F}_1 \neq \vec{F}_2$. Hãy tìm hợp lực của hai lực đó.

Lời giải. Do $\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \neq 0$ nên hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ có hợp lực $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Giả sử hợp lực nằm trên đường Δ. Gọi giao điểm của Δ và AB là C. Áp dụng định lý Varignon suy ra:

$$\vec{m}_C\left(\vec{R}\right) = \vec{m}_C\left(\vec{F}_1\right) + \vec{m}_C\left(\vec{F}_2\right) = 0$$

Nếu $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ song song cùng chiều như hình 2.14a ta có

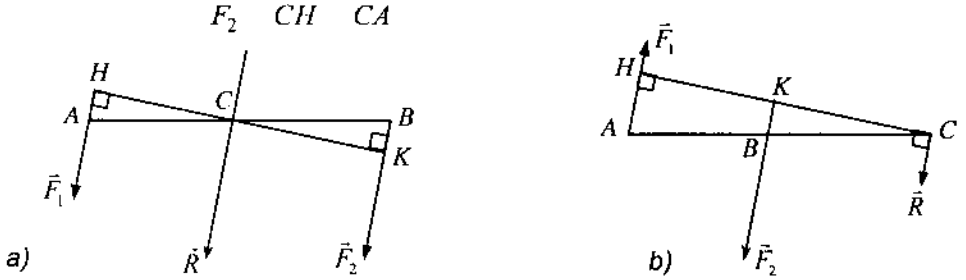
$$\vec{m}_C\left(\vec{F}_1\right) + \vec{m}_C\left(\vec{F}_2\right) = F_1.CH - F_2.CK = 0$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CK}{CH} = \frac{CB}{CA}$$

Nếu $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ song song ngược chiều như hình 2.14b ta có

$$\vec{m}_C\left(\vec{F}_1\right) + \vec{m}_C\left(\vec{F}_2\right) = -F_1.CH + F_2.CK = 0$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CK}{CH} = \frac{CB}{CA}$$



Hình 2.14

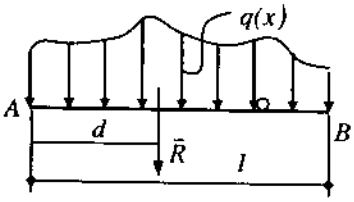
Thí dụ 2.3 (Tìm hợp lực của hệ lực phân bố). Cho hệ lực phân bố song song cùng chiều như hình 2.15, hãy tìm hợp lực của hệ lực đó.

Lời giải. Độ lớn véctơ chính của hệ lực được xác định bởi công thức

$$R = R' = \int_0^l q(x)dx$$

Mômen chính của hệ lực đối với A

$$\bar{M}_A = \int_0^l q(x)xdx$$

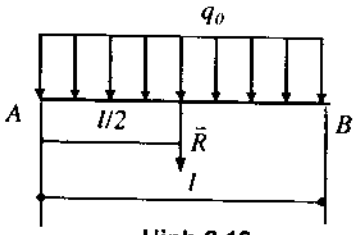


Hình 2.15

Giả sử hợp lực đặt tại C cách A một đoạn $CA = d$. Theo định lý Varignon ta có:

$$\bar{m}_A(\vec{R}) = Rd = \bar{M}_A = \int_0^l q(x)xdx$$

Từ (1) và (2) suy ra: $d = \dfrac{\int_0^l q(x)xdx}{\int_0^l q(x)dx}$



Hình 2.16

Nếu hệ lực phân bố theo quy luật hình chữ nhật như hình 2.16 suy ra

$$q(x) = q_0, \quad \int_0^l q_0 dx = q_0 l, \quad \int_0^l q_0 x dx = \frac{1}{2} q_0 l^2$$

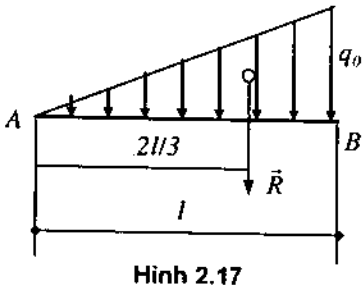
Thế vào (3) ta được $d = \dfrac{1}{2} l$.

Nếu hệ lực phân bố theo quy luật tam giác như hình 2.17 ta có

$$q(x) = q_0 \frac{x}{l}$$

$$\int_0^l q(x)dx = \int_0^l q_0 \frac{x}{l} dx = \frac{1}{2} q_0 l$$

$$\int_0^l q(x)xdx = \int_0^l q_0 \frac{x^2}{l} dx = \frac{1}{3} q_0 l^2$$



Hình 2.17

Vậy $d = \dfrac{2}{3} l$.

3. CÁC ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN PHẲNG

3.1. Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn phẳng tự do

Thay các liên kết bằng phản lực liên kết, xét cân bằng của vật rắn tự do chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$.

Định lý 2.8. Điều kiện cần và đủ để cho vật rắn phẳng tự do chịu tác dụng của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ cân bằng là véctơ chính của hệ lực tác dụng bằng không và mômen chính của hệ lực tác dụng lấy đối với một điểm O tuỳ ý bằng không.

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 & (3.1) \\ \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_0\left(\vec{F}_k\right) = 0 & (3.2) \end{cases}$$

Chứng minh điều kiện cần. Giả sử vật rắn cân bằng nhưng các điều kiện (3.1) và (3.2) không thoả mãn. Khi đó hoặc hệ lực tương đương với một lực hoặc hệ lực tương đương với một ngẫu lực. Đó là điều vô lý. Vậy các điều kiện (3.1) và (3.2) phải thoả mãn.

Chứng minh điều kiện đủ. Khi $\vec{R}' = 0$ và $\vec{M}_0 = 0$, theo biện luận về dạng chuẩn hệ lực tương đương với một cặp lực cân bằng tác dụng lên vật rắn. Theo tiên đề 1, vật rắn ở cân bằng.

Hệ quả. Điều kiện cần và đủ để cho hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$, tác dụng lên vật rắn phẳng tự do, cân bằng là véctơ chính của hệ đó bằng không và mômen chính của hệ lực lấy đối với một điểm O tuỳ ý bằng không.

3.2. Các phương trình cân bằng của hệ lực phẳng bất kỳ

Từ điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn phẳng chịu tác dụng của hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ được trình bày trong định lý 2.8 ở trên, suy ra ba dạng phương trình cân bằng của hệ lực phẳng như sau:

a) Dạng 1. Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ cân bằng là tổng hình chiếu lên hai trục toạ độ vuông góc và mômen chính của các lực lấy đối với tâm O bất kỳ bằng không

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv 0 \Leftrightarrow \sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k) = 0 \qquad (3.3)$$

Sự tương đương giữa các điều kiện (3.1) và (3.2) với các phương trình (3.3) là hiển nhiên. Hai phương trình đầu của (3.3) là hai phương trình hình chiếu của (3.1) còn phương trình thứ 3 của (3.3) chính là phương trình (3.2).

b) Dạng 2. Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ cân bằng là tổng mômen của các lực thuộc hệ đối với hai điểm A, B bất kỳ bằng không và tổng hình chiếu các lực lên trục x không vuông góc với đoạn AB bằng không.

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv 0 \Leftrightarrow \sum \vec{m}_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \sum \vec{m}_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \sum F_{kx} = 0 \qquad (3.4)$$

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên, vì khi hệ lực đã cân bằng thì tổng hình chiếu của các lực lên một trục bất kỳ và tổng mômen của các lực ấy đối với một điểm tuỳ ý đều bằng không. Phần chính là phải chứng minh điều kiện đủ.

Trước hết, cần chứng minh véctơ chính của hệ lực bằng không. Ở đây, sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k \neq 0$. Do $\sum F_{kx} = 0$ nên véctơ chính $\vec{R}'$ phải vuông góc với trục x. Theo giả thiết trục x không vuông góc với đoạn AB nên véctơ chính $\vec{R}'$ không song song với véctơ AB.

Mặt khác do $\vec{R}' \neq 0$ nên hệ lực có hợp lực. Theo giả thiết $\sum \vec{m}_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \sum \vec{m}_B\left(\vec{F}_k\right) = 0$, nên theo định lý Varignon đường tác dụng của hợp lực $\vec{R}$ phải đi qua hai điểm A và B. Do đó, phương của véctơ chính $\vec{R}'$ song song với AB. Điều này mâu thuẫn với kết luận ở trên. Mâu thuẫn đó chứng tỏ giả sử $\vec{R}' \neq 0$ là sai. Vậy véctơ chính $\vec{R}' = 0$.

Bây giờ ta chứng minh $\vec{M}_0 = \sum \vec{m}_0\left(\vec{F}_k\right) = 0$. Lấy một tâm O tuỳ ý. Do véctơ chính của hệ lực $\vec{R}' = 0$, nên mômen chính của hệ lực không phụ thuộc vào tâm thu gọn. Do vậy $\vec{M}_0 = \vec{M}_A = \sum \vec{m}_A\left(\vec{F}_k\right) = 0$. Như thế, xuất phát từ các phương trình (3.4) ta đã chứng minh được $\vec{R}' = 0, \vec{M}_0 = 0$ (với tâm O tuỳ ý). Vậy hệ lực cân bằng.

c) Dạng 3. Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ cân bằng là tổng các momen của các lực thuộc hệ đối với 3 điểm A, B, và C không thẳng hàng triệt tiêu.

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum \vec{m}_A\left(\vec{F}_k\right) = 0, \sum \vec{m}_B\left(\vec{F}_k\right) = 0, \sum \vec{m}_C\left(\vec{F}_k\right) = 0 \qquad (3.5)$$

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên, vì khi hệ lực đã cân bằng thì tổng các mômen của các lực đối với một tâm tuỳ ý bằng không. Bây giờ ta phải chứng minh điều kiện đủ theo phương pháp phản chứng.

Trước hết, chứng minh véctơ chính $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k$ bằng không. Giả sử ngược lại $\vec{R}' \neq 0$. Hệ lực có hợp lực $\vec{R}$. Giả sử hợp lực đi qua điểm O nào đó. Theo định lý biến thiên mômen chính ta có

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{m}_A\left(\vec{R}_O\right) = \bar{m}_A\left(\vec{R}_O\right) = \pm AO.R_O \sin\left(\vec{AO}, \vec{R}_O\right) = 0$$

vậy $\sin\left(\vec{AO}, \vec{R}_O\right) = 0$. Từ đó suy ra điểm A phải nằm trên đường tác dụng của hợp lực.

Chứng minh tương tự ta có điểm B và điểm C cùng nằm trên đường tác dụng của hợp lực. Vậy 3 điểm A, B, C thẳng hàng. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy giả sử $\vec{R}' \neq 0$ là sai. Véctơ chính $\vec{R}' = 0$.

Bây giờ, lấy O là một điểm bất kỳ, phải chứng minh $\bar{M}_O = \sum \bar{m}_O\left(\vec{F}_k\right) = 0$. Do véctơ chính $\vec{R}' = 0$, nên mômen chính không phụ thuộc vào tâm thu gọn. Vậy $\bar{M}_O = \bar{M}_A = 0$.

3.3. Các phương trình cân bằng của các hệ lực phẳng đặc biệt

a) Hệ lực phẳng đồng quy

Giả sử hệ lực đồng quy tại A, ta có $\sum \bar{m}_A\left(\vec{F}_k\right) \equiv 0$. Từ (3.3) suy ra hai phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy phẳng

$$\sum F_{kx} = 0\,,\ \sum F_{ky} = 0 \tag{3.6}$$

b) Hệ lực phẳng song song

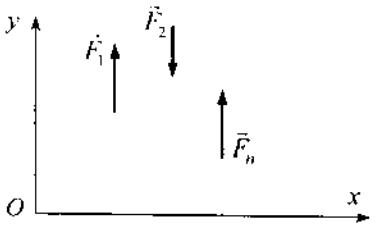
Chọn trục y song song cùng với các lực $\vec{F}_k$. Ta có $\sum F_{kx} \equiv 0$. Từ (3.3) suy ra hai phương trình cân bằng của hệ lực phẳng song song

$$\sum F_{ky} = 0\ ,\ \sum \bar{m}_O\left(\vec{F}_k\right) = 0 \tag{3.7}$$

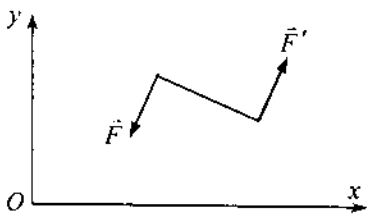
c) Hệ ngẫu lực phẳng

Đối với hệ ngẫu lực phẳng ta có $\sum F_{kx} \equiv 0$, $\sum F_{ky} \equiv 0$. Từ (3.3) suy ra một phương trình cân bằng cho hệ ngẫu lực phẳng

$$\sum \bar{m}_k = 0 \tag{3.8}$$



Hình 2.18



Hình 2.19

4. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA TĨNH HỌC VẬT RẮN

Khi giải một bài toán tĩnh học thường được tiến hành theo ba bước như sau:

– *Bước 1:* Chọn hệ khảo sát. Giải phóng liên kết, thay liên kết bằng các phản lực liên kết tương ứng.

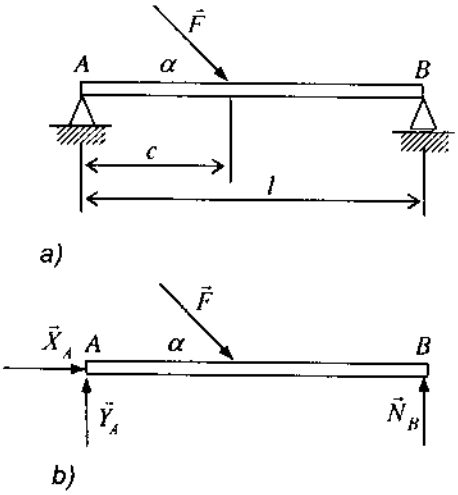
– *Bước 2:* Thiết lập các phương trình cân bằng cho hệ lực tác dụng lên vật rắn khảo sát.

– *Bước 3:* Giải các phương trình cân bằng, xác định các ẩn cần tìm.

4.1. Bài toán xác định phản lực liên kết

Thí dụ 2.4. Dầm AB dài l, chịu tác dụng của lực $\vec{F}$ nghiêng với phương nằm ngang một góc α như hình 2.20a. Xác định phản lực liên kết tại các gối đỡ.

Lời giải. Khảo sát cân bằng của dầm AB chịu tác dụng của lực $\vec{F}$ và bị liên kết ở hai đầu. Giải phóng liên kết ở A và B, thay bằng các phản lực liên kết (hình 2.20b).



Hình 2.20

Phương trình cân bằng của hệ lực này có dạng

$$\sum F_{kx} = X_A + F\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - F\sin\alpha + N_B = 0$$

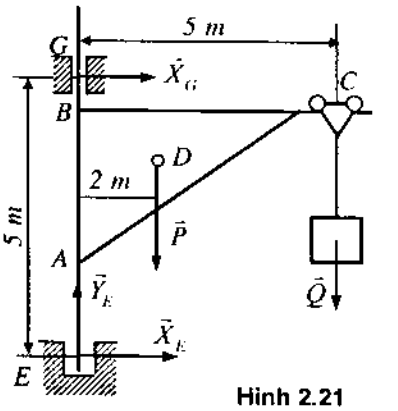
$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -cF\sin\alpha + lN_B = 0$$

Giải hệ phương trình trên suy ra

$$X_A = -F\cos\alpha, \qquad N_B = (c/l)F\sin\alpha,$$

$$Y_A = \left[(l-c)/l\right]F\sin\alpha$$

Thí dụ 2.5. Cần trục ABC có trục quay thẳng đứng EG với $EG = BC = 5$m (hình 2.21). Trọng lượng bản thân cần trục là $P = 19{,}62$kN đặt tại điểm D cách trục quay 2m. Vật được cẩu có trọng lượng $Q = 19{,}43$kN đặt tại điểm C. Xác định phản lực liên kết tại các ổ đỡ G và E. Bỏ qua ma sát.



Hình 2.21

Lời giải. Khảo sát cần trục ABC cân bằng dưới tác dụng của lực hoạt động $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ đặt tại D và C và các phản lực liên kết tại G và E. Do các lực hoạt động tác dụng trong mặt phẳng cần trục nên các phản lực tại G và E cũng nằm trong mặt phẳng cần trục (hình 2.21).

Cần trục cân bằng dưới tác dụng của hệ lực phẳng

$$(\vec{P},\vec{Q},\vec{X}_E,\vec{Y}_E,\vec{X}_G)\equiv 0$$

Các phương trình cân bằng có dạng

$$\sum F_{kx} = X_E + X_G = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_E - P - Q = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overline{m}_E(\vec{F}_k) = -2P - 5Q - 5X_G = 0 \qquad (3)$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$Y_E = P + Q = 39{,}05 \text{ kN}$$

Từ phương trình (3) suy ra:

$$X_G = -Q - \frac{2}{5}P = -27{,}278\text{kN}$$

Thế kết quả trên vào (1) ta được:

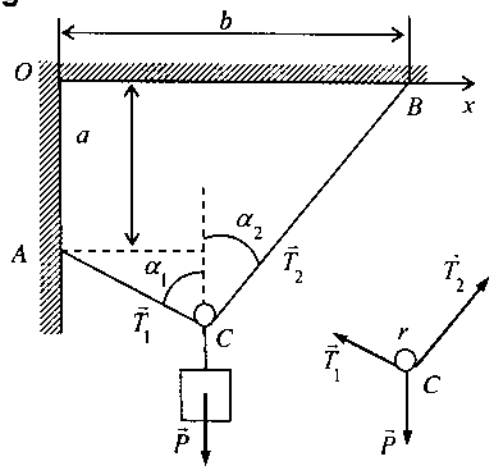
$$X_E = -X_G = 27{,}278\text{kN}$$

Dấu trừ trong kết quả $X_G = -27{,}278\text{kN}$ có nghĩa là chiều của phản lực liên kết $\vec{X}_G$ ngược với chiều vẽ trên hình 2.21.

4.2. Bài toán tìm điều kiện cân bằng

Trong bài toán này, ẩn là những đại lượng xác định vị trí của vật rắn (và một số phản lực). Nếu chọn được các phương trình thích hợp, việc giải bài toán loại này sẽ tương đối nhanh gọn.

Thí dụ 2.6. Treo vật nặng P vào chốt của ròng rọc nhỏ C và đặt ròng rọc lên sợi dây AB dài l, một đầu dây buộc vào điểm A của tường, đầu kia buộc vào điểm B của trần nhà (hình 2.22). Cho biết



Hình 2.22

$OA = a$, $OB = b$, $a^2 + b^2 < l^2$. Tìm vị trí cân bằng của ròng rọc nhỏ C. Cho biết dây mềm không dãn, không trọng lượng.

Lời giải. Gọi x là độ dài đoạn dây AC. Độ dài đoạn dây BC là $l - x$. Các lực tác dụng lên ròng rọc nhỏ C là $\vec{P}, \vec{T}_1, \vec{T}_2$ ($\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$ là hai sức căng của hai nhánh dây).

Ta có hai phương trình cân bằng:

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = T_2 r - T_1 r = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_{kx} = -T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2 = 0 \tag{2}$$

Giải ra ta được:

$$T_1 = T_2 = T\ ,\ \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

Từ hình vẽ 2.22 ta có:

$$CB\cos\alpha - CA\cos\alpha = (l - x)\cos\alpha - x\cos\alpha = a \tag{3}$$

$$CB\sin\alpha + CA\sin\alpha = (l - x)\sin\alpha + x\sin\alpha = b \tag{4}$$

Từ (4) suy ra:

$$\sin\alpha = \frac{b}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}} = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - b^2}$$

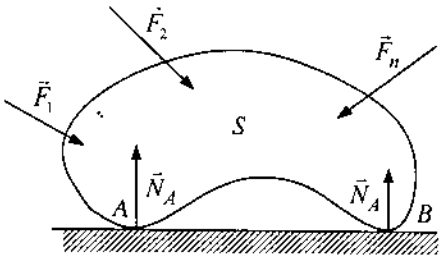
Từ (3) ta có: $2x\cos\alpha = l\cos\alpha - a$. Do đó

$$x = \frac{l\cos\alpha - a}{2\cos\alpha} = l\frac{\sqrt{l^2 - b^2} - a}{2\sqrt{l^2 - b^2}} = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{l^2 - b^2}}\right)$$

4.3. Bài toán vật lật

a) Thiết lập bài toán

Khảo sát vật rắn phẳng (S) chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ và chịu liên kết không giữ với mặt tựa cố định tại hai điểm A và B (hình 2.23). Các phản lực tại hai điểm tựa là $\vec{N}_A$ và $\vec{N}_B$.



Hình 2.23

Khi vật rắn S cân bằng, ta có hệ lực phẳng cân bằng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n, \vec{N}_A, \vec{N}_B) \equiv 0$. Khi các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ thay đổi, có thể xảy ra sự mất liên kết tại một trong hai điểm tựa A hoặc B. Giả sử hệ có thể bị mất liên

kết tại điểm B. Khi đó vật có thể bị lật quanh A. Do đặc điểm và vị trí đặt lực, phân các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ thành hai tập: Tập các lực có khả năng làm vật rắn lật quanh A gọi là các lực lật và tập các lực giữ. Ta gọi tổng mômen của các lực lật đối với điểm A là M_{lat}, tổng mômen của các lực giữ đối với điểm A là M_{giu}.

Điều kiện để vật rắn không bị lật quanh điểm A là nó vẫn còn cân bằng và liên kết tại B vẫn còn hoạt động. Cụ thể là:

$$\sum \overline{m}_A(\vec{F}) = \overline{m}_A(\vec{N}_B) + M_{lat} - M_{giu} = 0, \qquad \overline{m}_A(\vec{N}_B) \geq 0$$

Như thế điều kiện để vật S không bị lật là: $M_{\text{lat}} \leq M_{\text{giu}}$

b) Thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.7. Cần trục phẳng chịu lực và có kích thước như hình 2.24. Trọng lượng cần trục là $\vec{G}$, đối trọng là $\vec{P}$. Tìm trọng lượng $\vec{Q}$ lớn nhất mà cần trục có thể cẩu lên được.

Lời giải. Khi cẩu hàng nặng quá cần trục có khả năng lật quanh điểm A. Trong thí dụ này $\vec{G}$ và $\vec{P}$ là các lực giữ, còn $\vec{Q}$ là lực lật.

Mômen giữ và mômen lật là

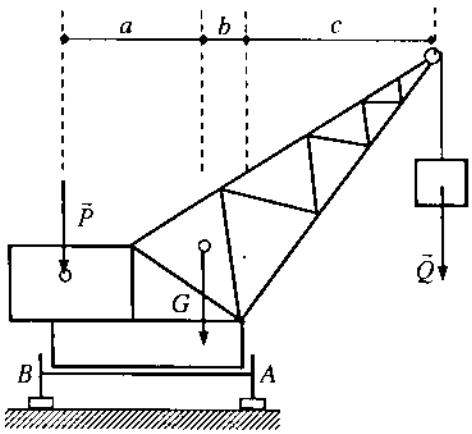
$$M_{\text{giu}} = (a+b)P + bG$$

$$M_{\text{lat}} = cQ$$

Điều kiện không lật là

$$cQ \leq (a+b)P + bG$$

$$\Rightarrow \quad Q \leq \frac{(a+b)P + bG}{c}$$



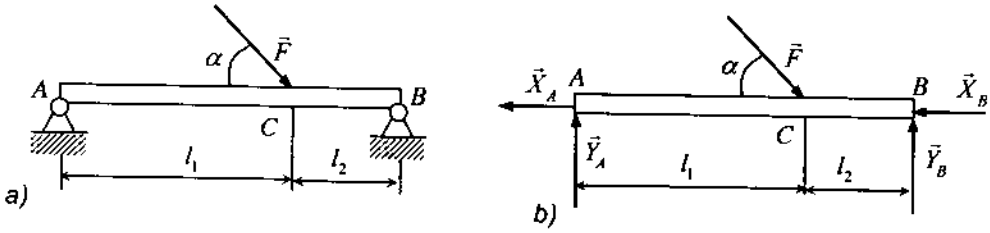
Hình 2.24

4.4. Bài toán siêu tĩnh

Khi số phương trình cân bằng tĩnh học bằng số ẩn cần tìm, bài toán tĩnh học có thể giải được. Khi đó bài toán tĩnh học được gọi là bài toán xác định tĩnh hay gọi tắt là bài toán tĩnh định. Khi số phương trình cân bằng tĩnh học nhỏ hơn số ẩn cần tìm, bài toán tĩnh học không giải được trong lý thuyết cân bằng vật rắn tuyệt đối. Bài toán tĩnh học được gọi là bài toán không xác định tĩnh hay gọi tắt là bài toán siêu tĩnh. Trên hình 2.25 ta đưa ra một mô hình đơn

giản bài toán siêu tĩnh. Đối với mô hình này lập được ba phương trình cân bằng tĩnh học, nhưng có bốn ẩn cần tìm.

Trong giáo trình này không xét các bài toán siêu tĩnh. Bài toán siêu tĩnh sẽ được khảo sát trong giáo trình *Sức bền vật liệu*.



Hình 2.25

5. CÂN BẰNG HỆ VẬT RẮN PHẲNG

5.1. Các phương pháp tính

Từ định nghĩa hệ vật rắn cân bằng ở chương 1, người ta đã đưa ra *phương pháp tách cấu trúc* để tính toán cân bằng hệ nhiều vật rắn. Theo *phương pháp tách cấu trúc*, tách hệ p vật rắn chịu liên kết thành p vật rắn riêng biệt, hoặc tách hệ p vật rắn thành các nhóm nhỏ các vật rắn, hoặc xem cả hệ như một vật rắn, sau đó tách ra một vài nhóm (hoặc một vài vật rắn). Thay thế các liên kết được giải phóng bằng phản lực liên kết tương ứng. Thiết lập các phương trình cân bằng cho từng vật rắn hoặc từng nhóm các vật rắn, sao cho số phương trình cân bằng tĩnh học đúng bằng số ẩn cần tìm. Chú ý rằng, đối với mỗi vật rắn được tách ra (hoặc cả hệ xem như một rắn) có tối đa 3 phương trình cân bằng độc lập.

5.2. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.8. Cho một dầm liên tục gồm hai nhịp có kết cấu và chịu lực như hình vẽ 2.26a. Cho biết a = 0,5m; q_0 = 60 kN/m; F = 80 kN; M_0 = 10 kNm. Hãy xác định các phản lực liên kết tại A, B và lực liên kết tại C.

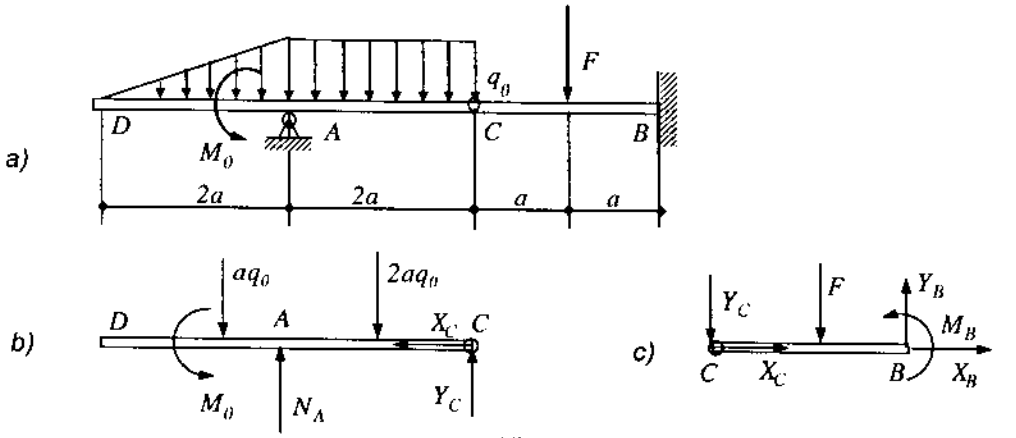
Lời giải: Tách dầm liên tục thành hai dầm đơn như hình vẽ 2.26b và 2.26c.

Xét cân bằng của dầm DC, ta có:

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = \frac{2}{3}a.q_0a + M_0 - a.2q_0a + 2aY_C = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = \frac{8}{3}a.q_0a + M_0 - 2aN_A + a.2q_0a = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_{kx} = -X_C = 0 \qquad (3)$$



Hình 2.26

Từ (1) ta có: $Y_C = \frac{2}{3}q_0a - \frac{M_0}{2a} = 10\text{kN}$.

Từ (2) suy ra: $N_A = \frac{7}{3}q_0a + \frac{M_0}{2a} = 80\text{kN}$.

Xét cân bằng của dầm CB ta có các phương trình cân bằng

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 2aY_C + aF + M_B = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = -Y_C - F + Y_B = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_{kx} = X_C + X_B = 0 \quad (6)$$

Từ (4) suy ra:

$$M_B = 2a\left(-\frac{2}{3}q_0a + \frac{M_0}{2a}\right) - aF = -\frac{4}{3}q_0a^2 + M_0 - aF = -50\text{kNm}$$

Từ (5) suy ra $Y_B = \frac{2}{3}q_0a - \frac{M_0}{2a} + F = 90\text{kN}$. Từ (6) suy ra $X_B = -X_C = 0$.

Thí dụ 2.9. Một hệ dầm có kết cấu và chịu lực như hình vẽ 2.27. Cho biết $\vec{F}$, a và q. Hãy xác định phản lực liên kết ở A và C và nội lực liên kết tại D.

Lời giải. Đầu tiên xem cả hệ dầm như một vật rắn. Ta có ba phương trình cân bằng

$$\sum F_{kx} = F_{Ax} + F + F_{Cx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = F_{Ay} - 3aq + F_{Cy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -aF - \frac{5}{2}aq3a - aF_{Cx} + 4aF_{Cy} = 0 \quad (3)$$

Để giải bài toán, còn cần ba phương trình cân bằng nữa. Tách vật và đặt lực như hình vẽ. Xét cân bằng của dầm DC, ta có ba phương trình cân bằng như sau

$$\sum F_{kx} = -F_{Dx} + F_{Cx} = 0 \tag{4}$$

$$\sum F_{ky} = -F_{Dy} - 2aq + F_{Cy} = 0 \tag{5}$$

$$\sum \bar{m}_D(\bar{F}_k) = -aq2a + 2aF_{Cy} + aF_{Cx} = 0 \tag{6}$$

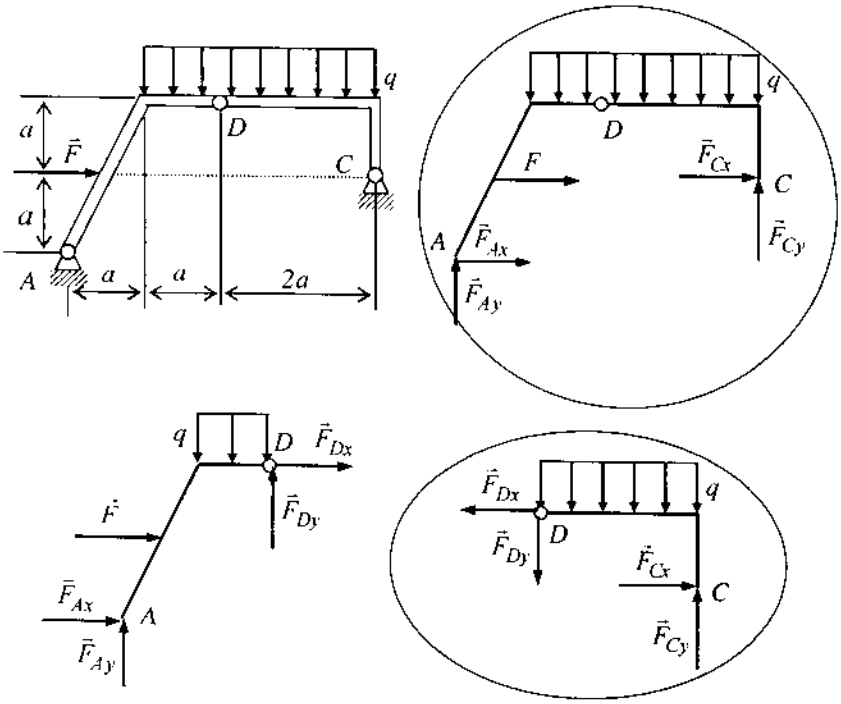
Từ các phương trình (3) và (6) suy ra

$$F_{Cx} = -\frac{F}{3} - \frac{7}{6}qa, \quad F_{Cy} = \frac{F}{6} + \frac{19}{12}qa$$

Thế kết quả trên vào các phương trình (1), (2), (4), (5) ta được

$$F_{Ax} = -\frac{2}{3}F + \frac{7}{6}qa, \quad F_{Ay} = -\frac{F}{6} + \frac{17}{12}qa$$

$$F_{Dx} = -\frac{F}{3} - \frac{7}{6}qa, \quad F_{Dy} = \frac{F}{6} - \frac{5}{12}qa$$



Hình 2.27

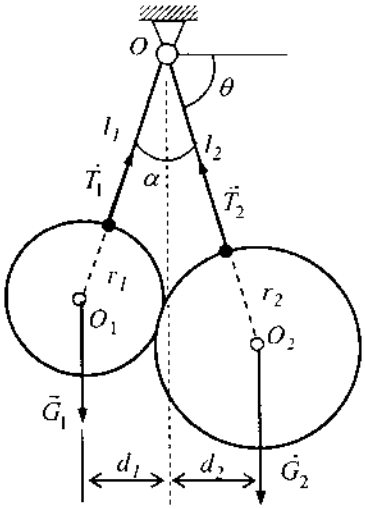
Ngày nay, với sự phát triển của tin học, người ta hay sử dụng các phần mềm để giải các bài toán tĩnh học phức tạp. Để hiểu được ý tưởng, viết lại các phương trình (1)–(6) dưới dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 4a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 2a & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{Dx} \\ F_{Dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 3qa \\ aF + \frac{15}{2}qa^2 \\ 0 \\ 2qa \\ 2qa^2 \end{bmatrix}$$

Sử dụng các phần mềm như MATLAB, MAPLE, MATCAD,... dễ dàng tính toán các phản lực liên kết tại A, C, D. Sau đó vẽ đồ thị các thành phần phản lực liên kết.

Thí dụ 2.10. Treo hai quả cầu đồng chất O_1 có trọng lượng G_1 và O_2 có trọng lượng G_2 bằng hai sợi dây mềm, nhẹ riêng biệt nhau vào cùng điểm O (hình 2.28). Cho biết chiều dài của các đoạn dây treo là l_1 và l_2, bán kính của các quả cầu là r_1 và r_2. Bỏ qua ma sát. Tìm điều kiện cân bằng của hệ vật rắn này.

Lời giải: Xét hệ vật rắn cân bằng là hai quả cầu treo vào điểm O. Ngoại lực tác dụng lên hệ là các trọng lực $\vec{G}_1$ và $\vec{G}_2$, các sức căng $\vec{T}_1, \vec{T}_2$. Khi hệ vật cân bằng thì tam giác OO_1O_2 được xác định vì có ba cạnh đã biết. Do đó góc $\widehat{O_1OO_2} = \alpha$ xác định. Ký hiệu θ là góc nghiêng của cạnh OO_2 với đường nằm ngang thì góc nghiêng của cạnh OO_1 với đường nằm ngang là $\pi - (\alpha + \theta)$. Áp dụng phương pháp hoá rắn, xem cả hệ như một vật rắn ở cân bằng, chịu tác dụng của các ngoại lực $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{T}_1, \vec{T}_2$. Từ điều kiện cân bằng ta có



Hình 2.28

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k) = G_1 d_1 - G_2 d_2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad G_1 d_1 = G_2 d_2 \tag{1}$$

Từ hình vẽ 2.28 suy ra các quan hệ hình học

$$d_1 = (l_1 + r_1)\cos[\pi - (\alpha + \theta)] = -(l_1 + r_1)\cos(\alpha + \theta) \tag{2}$$

$$d_2 = (l_2 + r_2)\cos\theta \tag{3}$$

Thế (2) và (3) vào (1) ta được

$$-G_1(l_1 + r_1)\cos(\alpha + \theta) = G_2(l_2 + r_2)\cos\theta \qquad (4)$$

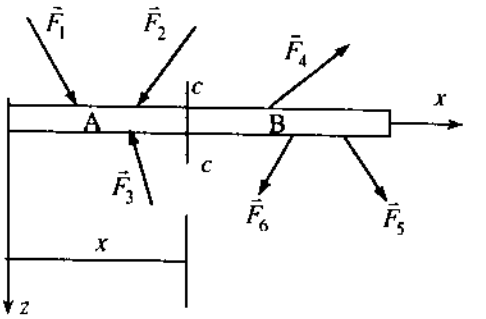
Từ (4) suy ra điều kiện cân bằng của hệ vật rắn là

$$G_1(l_1 + r_1)\cos(\alpha + \theta) + G_2(l_2 + r_2)\cos\theta = 0.$$

6. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TẠI CÁC MẶT CẮT NGANG CỦA DẦM CỨNG

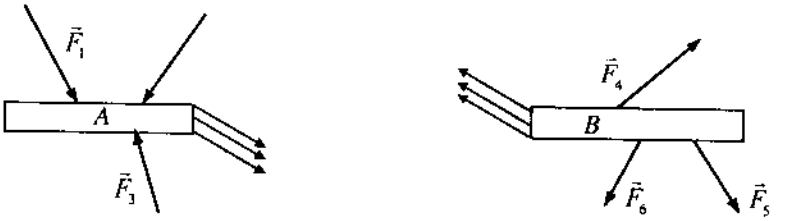
6.1. Khái niệm lực dọc, lực cắt và mômen uốn

Để đơn giản, trong đoạn này giới hạn xét bài toán xác định nội lực ở một mặt cắt bất kỳ của dầm thẳng, chúng được sinh ra do tác dụng của ngoại lực. Xét dầm thẳng cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực như hình 2.29.

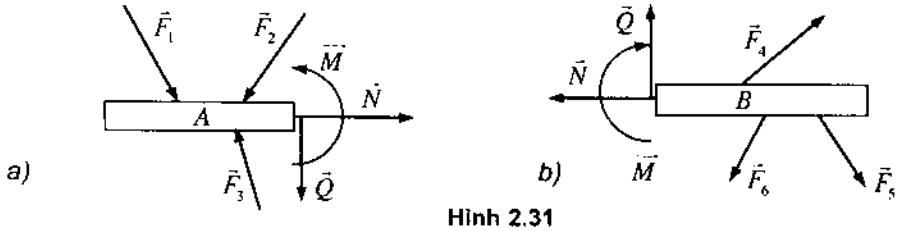


Hình 2.29

Để có thể tính toán xác định nội lực tại mặt c–c cách gốc O một đoạn x, ta phải tìm cách làm xuất hiện chúng. Muốn thế ta tưởng tượng cắt dầm thành hai phần A và B bởi mặt cắt c–c. Tưởng tượng vứt bỏ phần B và xét cân bằng của phần A. Sở dĩ phần A giữ được trạng thái cân bằng là nhờ phần B đã tác động lên phần A một hệ lực phân bố như hình 2.30. Hệ lực đó được gọi là hệ nội lực của vật thể tại mặt cắt c–c. Thu gọn hệ nội lực về điểm giữa của mặt cắt được một lực $\vec{R}$ và một ngẫu lực $\vec{M}$. Lực $\vec{R}$ ta phân thành lực $\vec{N}$ và $\vec{Q}$ như hình 2.31. Nếu xét cân bằng của phần dầm B, thì phần A sẽ tác dụng lên phần B một hệ lực tương tự nhưng có chiều ngược lại.



Hình 2.30



Hình 2.31

Định nghĩa 2.6. Lực $\vec{N} = \vec{N}(x)$ được gọi là lực dọc (hay lực pháp tuyến), lực $\vec{Q} = \vec{Q}(x)$ được gọi là lực cắt, còn mômen $M = M(x)$ được gọi là mômen uốn. Chúng là dương nếu có chiều như hình 2.31a.

6.2. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.11. Cho dầm AB chịu lực như hình 2.32a. Hãy xác định phản lực liên kết tại A và B. Sau đó xác định nội lực tại một mặt cắt bất kỳ. Các kích thước cho trên hình vẽ.

Lời giải.

Bước 1: Xác định phản lực liên kết

Từ các phương trình cân bằng

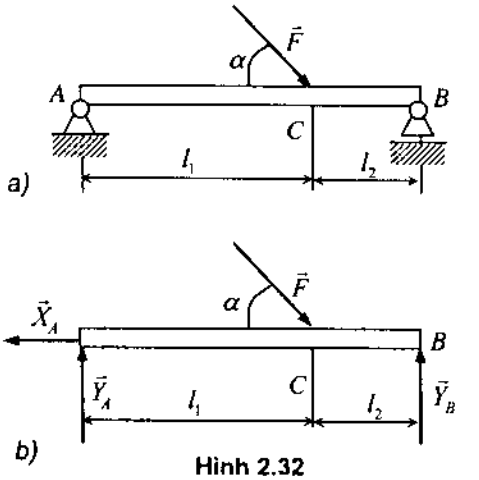
$$\sum F_{kx} = -X_A + F\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B - F\sin\alpha = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = Y_B(l_1 + l_2) - F\sin\alpha . l_1 = 0,$$

suy ra $X_A = F\cos\alpha$,

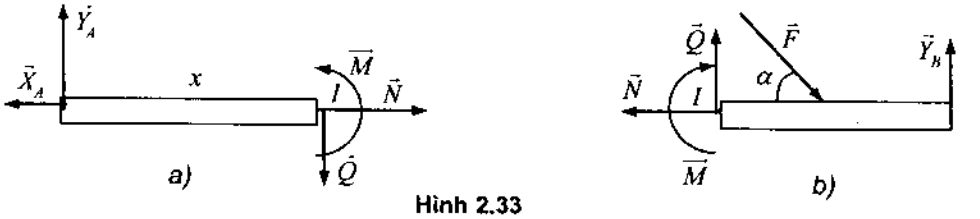
$$Y_B = \frac{F l_1 \sin\alpha}{l_1 + l_2}, \quad Y_A = \frac{F l_2 \sin\alpha}{l_1 + l_2}$$



Hình 2.32

Bước 2: Xác định nội lực trên đoạn AC $(0 < x < l_1)$

Tưởng tượng cắt dầm như hình 2.33.



Hình 2.33

Từ hình 2.33a ta có các phương trình cân bằng

$$\sum F_{kx} = N - X_A = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F\cos\alpha \tag{1}$$

$$\sum F_{ky} = -Q + Y_A = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{l_2}{l_1 + l_2} F \sin\alpha \tag{2}$$

$$\sum m_I(\vec{F}_k) = -Y_A x + M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{x l_2}{l_1 + l_2} F \sin\alpha \tag{3}$$

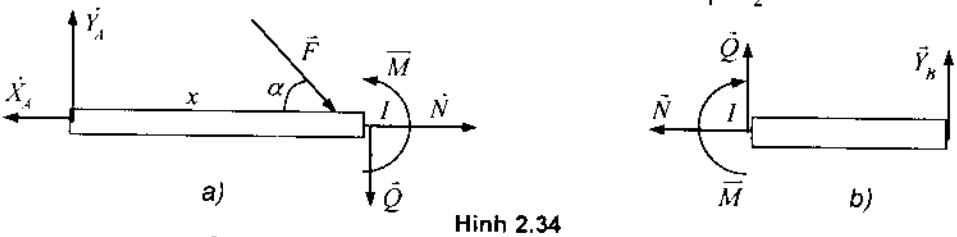
Bước 3: Xác định nội lực trên đoạn CB $(l_1 < x < l_1 + l_2)$

Tưởng tượng cắt dầm như hình 2.34. Từ hình 2.34b ta có các phương trình cân bằng $(\xi = l_1 + l_2 - x)$:

$$\sum F_{kx} = -N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 0 \tag{4}$$

$$\sum F_{k\xi} = -Q - Y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{l_1}{l_1 + l_2} F \sin\alpha \tag{5}$$

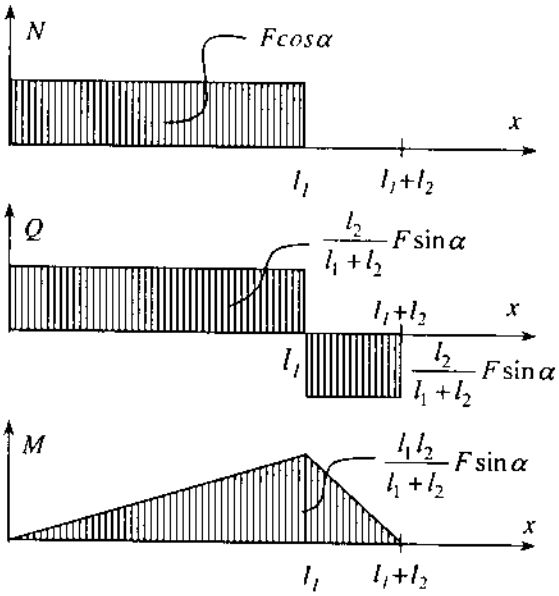
$$\sum m_I(\vec{F}_k) = -M + Y_B \xi = 0 \quad \Rightarrow \quad M = (l_1 + l_2 - x)\frac{l_1}{l_1 + l_2} F \sin\alpha \tag{6}$$



Hình 2.34

Bước 4. Vẽ biểu đồ nội lực

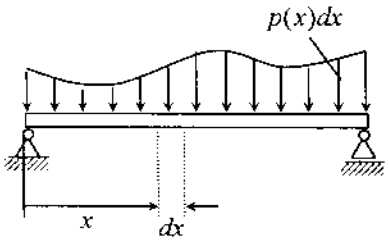
Từ các công thức (1) đến (6) ta vẽ được biểu đồ nội lực như hình 2.35.



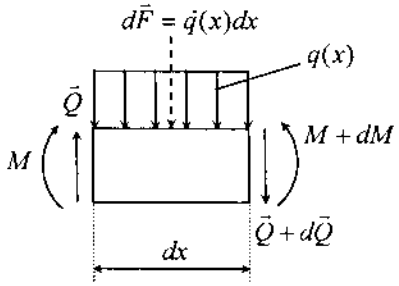
Hình 2.35

6.3. Quan hệ vi phân giữa lực cắt, mômen uốn và tải trọng phân bố liên tục

Trong đoạn này giới hạn xét các dầm chịu tác dụng của tải trong phân bố liên tục như hình 2.36a



Hình 2.36a



Hình 2.36b

Tưởng tượng tách ra một phân tố nhỏ của dầm dài dx. Các ngoại lực và nội lực được thể hiện trên hình 2.36b. Ở mặt cắt x, các nội lực $\vec{Q}$ và M tác dụng lên phân tố, còn ở mặt cắt $x+dx$, các nội lực sẽ là $\vec{Q}+d\vec{Q}$ và $M+dM$. Từ điều kiện cân bằng của phân tố nhỏ ta có các phương trình

$$\sum F_{ky} = Q - qdx - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow qdx + dQ = 0 \qquad (1)$$

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = -M - Qdx + qdx\frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$$

$$\Rightarrow -Qdx + dM + \frac{1}{2}qdx^2 = 0 \qquad (2)$$

Từ phương trình (1) suy ra

$$\frac{dQ}{dx} = -q \qquad (3)$$

Từ phương trình (2), bỏ qua vô cùng bé bậc hai dx^2, ta có

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad (4)$$

Thế (4) vào (3) ta được

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \qquad (5)$$

Các phương trình vi phân (3) và (4) thường được dùng để kiểm tra tính đúng đắn của các đồ thị lực cắt và của mômen uốn. Trong các trường hợp đơn giản các quan hệ đó như sau:

q	Q	M
0	Hằng số	Tuyến tính
Hằng số	Tuyến tính	Parabol bậc 2
Tuyến tính	Parabol bậc 2	Parabol bậc 3

Thí dụ 2.12. Một dầm một đầu bị ngàm chặt, một đầu tự do chịu tác dụng của tải trọng phân bố tam giác như hình 2.37. Hãy xác định lực cắt và mômen uốn của dầm.

Lời giải: Từ hình vẽ suy ra quy luật phân bố tuyến tính của tải trọng phân bố

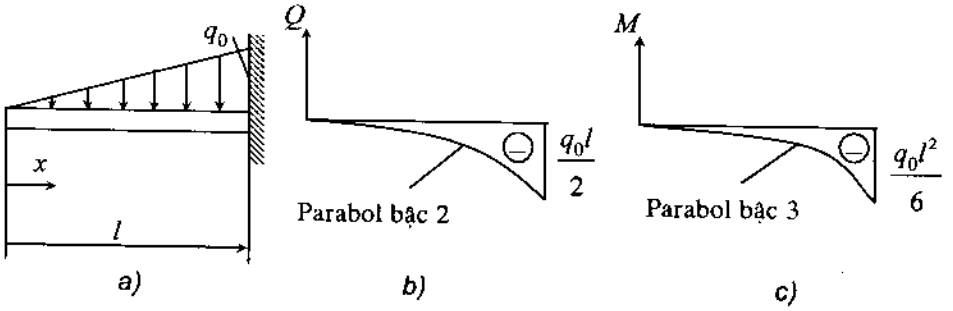
$$q(x) = \frac{q_0}{l}x \qquad (1)$$

Từ các công thức $\frac{dQ}{dx} = -q(x) = -\frac{q_0}{l}x$, $\frac{dM}{dx} = Q$, suy ra

$$Q(x) = -\frac{q_0}{2l}x^2 + C_1 \ , \ M(x) = -\frac{q_0}{6l}x^3 + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

Từ các điều kiện $Q(0) = 0$, $M(0) = 0$ dễ dàng xác định được các hằng số tích phân $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Vậy các đại lượng lực cắt và mômen uốn của dầm là

$$Q(x) = -\frac{1}{2}q_0 l\left(\frac{x}{l}\right)^2, \quad M(x) = -\frac{1}{6}q_0 l^2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$



Hình 2.37

Chương 3

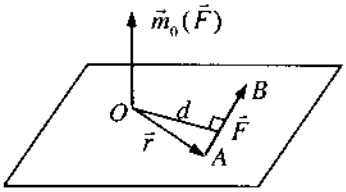
HỆ LỰC KHÔNG GIAN VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHÔNG GIAN

Hệ lực không gian là hệ lực, mà đường tác dụng của chúng không nằm trong cùng một mặt phẳng. Trong chương này xét hai bài toán cơ bản của tĩnh học: Biến đổi hệ lực không gian về dạng đơn giản và tìm điều kiện cân bằng của vật rắn không gian.

1. HAI ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

1.1. Véc tơ mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục

a) Định nghĩa mômen của lực đối với một điểm. Mômen của lực $\vec{F}$ đối với một điểm O, ký hiệu $\vec{m}_O(\vec{F})$, là một đại lượng véctơ có phương vuông góc với mặt phẳng chứa điểm O và lực $\vec{F}$, có chiều sao cho nhìn từ đầu mút của nó xuống mặt phẳng này, thấy lực $\vec{F}$ quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ, có trị số bằng Fd.



Hình 3.1

Trong đó d là khoảng cách từ O đến đường tác dụng của lực $\vec{F}$.

Từ khái niệm tích có hướng của hai véc tơ trong toán học ta có công thức

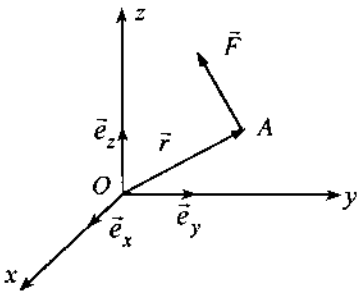
$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1.1)$$

Biểu thức giải tích. Nếu ký hiệu

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z,$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

thì suy ra



Hình 3.2

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(yF_z - zF_y\right)\vec{e}_x + \left(zF_x - xF_z\right)\vec{e}_y + \left(xF_y - yF_x\right)\vec{e}_z \qquad (1.2)$$

Nếu sử dụng khái niệm ma trận đối xứng lệch $\tilde{\mathbf{r}}$ của véc tơ $\vec{r}$ (hay còn gọi là toán tử sóng $\tilde{\mathbf{r}}$)

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

thì công thức (1.2) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{m}_0(\vec{F}) = \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{bmatrix} \qquad (1.4)$$

Biểu thức (1.4) giúp ta tính mômen của lực đối với một điểm trên các phần mềm máy tính một cách thuận tiện.

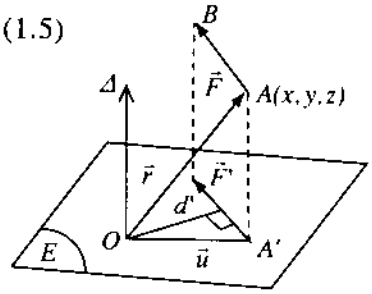
b) Định nghĩa mômen của lực đối với một trục. Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ là mômen đại số của lực $\vec{F}'$ đối với điểm O

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = \vec{m}_0(\vec{F}') = \pm F'd' \qquad (1.5)$$

Trong đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ lên mặt phẳng E vuông góc với trục Δ, còn O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng E, d' là khoảng cách từ O đến $\vec{F}'$.

Chú ý: Từ định nghĩa ta suy ra

$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$ khi $\vec{F} // \Delta$ hoặc khi $\vec{F}$ cắt trục Δ.



Hình 3.3

c) Định lý. Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu lên trục Δ của véctơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục Δ

$$\vec{m}_\Delta(\vec{F}) = hc_\Delta\left[\vec{m}_O(\vec{F})\right] \qquad (1.6)$$

Chứng minh. Chọn trục z trùng với trục Δ, mặt phẳng toạ độ Oxy là mặt phẳng E. Gọi A' là hình chiếu điểm đặt A của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng Oxy. Khi đó ta có $A(x_A, y_A, z_A)$, $A'(x_A, y_A, 0)$, $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ $\vec{F}'(F'_x, F'_y, 0)$ với $F_x = F'_x$, $F_y = F'_y$.

Theo biểu thức (1.2) suy ra

$$hc_{\Delta}\left[\vec{m}_O(\vec{F})\right] = x_A F_y - y_A F_x \qquad (1)$$

Mặt khác theo công thức (1.4) trong chương 2 ta có

$$\vec{m}_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{m}_0(\vec{F}') = x_A F_y' - y_A F_x' = x_A F_y - y_A F_x \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\vec{m}_{\Delta}(\vec{F}) = hc_{\Delta}\left[\vec{m}_O(\vec{F})\right]$$

Chú ý. Từ (2) ta có công thức giải tích tính mômen của một lực đối với một trục.

1.2. Hai đại lượng đặc trưng của hệ lực không gian

a) Véctơ chính

Định nghĩa. Véc tơ chính của hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ là tổng hình học các véc tơ thành phần thuộc hệ

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (1.7)$$

Cách xác định. Hình chiếu của $\vec{R}'$ của trên các trục toạ độ là

$$R_x' = \sum F_{kx}, \quad R_y' = \sum F_{ky}, \quad R_z' = \sum F_{kz} \qquad (1.8)$$

b) Mômen chính

Định nghĩa. Mômen chính đối với một điểm O của hệ lực không gian là tổng hình học các véctơ mômen của các lực thành phần của hệ lấy đối với điểm O đó.

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_o(\vec{F}_k) \qquad (1.9)$$

Cách xác định. Sử dụng công thức (1.6) suy ra

$$M_{Ox} = \sum m_x(\vec{F}_k), \; M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_k), \; M_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_k) \qquad (1.10)$$

Thí dụ 3.1. Hình lăng trụ có các cạnh a, b và c chịu tác dụng của các lực từ $\vec{F}_1$ đến $\vec{F}_6$ như hình vẽ 3.4. Trong đó $b = a$, $c = 2a$, $F_1 = F_2 = F$, $F_3 = F_4 = 2F$, $F_5 = F_6 = 3F$. Hãy xác định véc tơ chính $\vec{R}'$ và véc tơ mômen chính đối với điểm A và điểm B.

Lời giải. Véc tơ chính của hệ lực

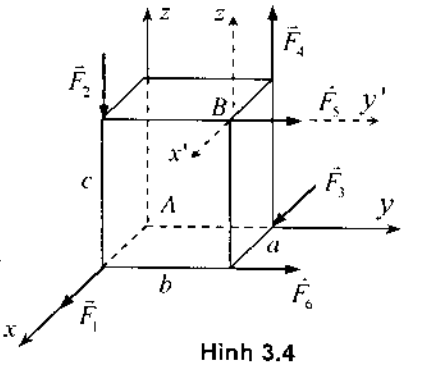
$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_6 \qquad (1)$$

Các hình chiếu trên các trục toạ độ là

$$R'_x = F_1 + F_3 = 3F, \quad R'_y = F_5 + F_6 = 6F,$$

$$R'_z = -F_2 + F_4 = F$$

$$\left|\vec{R}'\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}\, F = \sqrt{46}\, F .$$



Hình 3.4

Mômen chính của hệ lực đối với điểm A và điểm B

$$\vec{M}_A = \sum_{k=1}^{6} \vec{m}_A(\vec{F}_k), \qquad \vec{M}_B = \sum_{k=1}^{6} \vec{m}_B(\vec{F}_k)$$

Từ hình vẽ ta có

$$M_{Ax} = bF_4 - cF_5 = -4aF,\ M_{Ay} = aF_2 = aF,\ \ M_{Az} = aF_5 + aF_6 - bF_3 = 4aF,$$

$$\left|\vec{M}_A\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2}\, aF = \sqrt{33}\, aF,$$

$$M_{Bx'} = bF_2 + cF_6 = 7aF,\ M_{By'} = -cF_1 - cF_3 + aF_4 = -4aF,\ M_{Bz'} = bF_1 = aF,$$

$$\left|\vec{M}_B\right| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 1^2}\, aF = \sqrt{66}\, aF$$

2. THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN

2.1. Thu gọn hệ lực không gian đồng quy

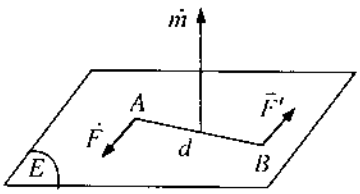
Định lý. Thu gọn hệ lực không gian đồng quy ta được một hợp lực. Hợp lực đặt tại điểm đồng quy của hệ lực và được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k \tag{2.1}$$

Chứng minh. Cách chứng minh hoàn toàn tương tự như chứng minh định lý thu gọn hệ lực đồng quy phẳng.

2.2. Thu gọn hệ ngẫu lực không gian

a) Véc tơ mômen của ngẫu lực. Mômen của ngẫu lực là một đại lượng vectơ, ký hiệu $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$ (hoặc $\vec{m}$), có phương vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực, có chiều tuân theo quy tắc ngược chiều kim



Hình 3.5

đồng hồ, có trị số $|\vec{m}| = Fd$. Trong đó d là cánh tay đòn của ngẫu lực, F là độ lớn của lực $\vec{F}$.

Chú ý: Liên hệ với định nghĩa mômen của lực đối với một điểm ta có

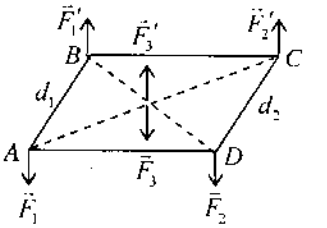
$$\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{m}_A(\vec{F}') = \vec{m}_B(\vec{F}) \qquad (2.1)$$

Mômen của ngẫu lực là một véctơ tự do.

b) Sự tương đương của hai ngẫu lực trong không gian

Định lý. Hai ngẫu lực có véctơ mômen bằng nhau thì tương đương.

Chứng minh. Đặt vào giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD một cặp cân bằng $(\vec{F}_3, \vec{F}_3')$ mà $\vec{F}_3 = \vec{F}_1$



Hình 3.6

Do $\vec{m}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') = \vec{m}(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ mà $d_1 = d_2$ nên

$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$

Do $(\vec{F}_1, \vec{F}_3') \equiv (\vec{F}_3, \vec{F}_2')$, $(\vec{F}_1', \vec{F}_3) \equiv (\vec{F}_3', \vec{F}_2)$,

ta có $(\vec{F}_1, \vec{F}_1') \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_3, \vec{F}_3') \equiv (\vec{F}_3, \vec{F}_2', \vec{F}_3', \vec{F}_2) \equiv (\vec{F}_2, \vec{F}_2')$

Hệ quả:

– Có thể di chuyển song song trong không gian ngẫu lực tác dụng lên vật rắn.

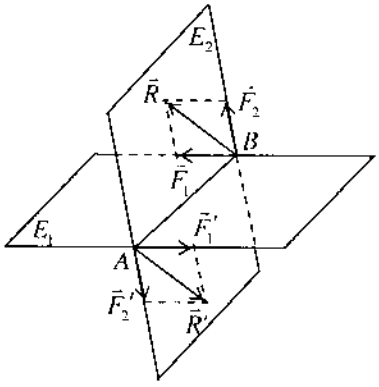
– Véc tơ mômen của ngẫu lực đặc trưng cho tác dụng của ngẫu lực lên vật rắn.

c) Thu gọn hệ ngẫu lực không gian

Định lý. Thu gọn hệ ngẫu lực không gian ta được một ngẫu lực tổng hợp. Véc tơ mômen của ngẫu lực tổng hợp bằng tổng hình học các vectơ mômen của các ngẫu lực thành phần.

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k \qquad (2.2)$$

Chứng minh. Để đơn giản chứng minh theo trường hợp n=2. Cho ngẫu lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ nằm trong mặt phẳng E_1, ngẫu lực $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ nằm trong mặt phẳng E_2. Có hai khả năng xảy ra: E_1 song song với E_2 hoặc E_1 cắt E_2.



Hình 3.7

Nếu $E_1//E_2$. Theo định lý trên đưa hai ngẫu lực về cùng một mặt phẳng, áp dụng định lý thu gọn ngẫu lực phẳng là xong.

Nếu E_1 cắt E_2 theo một đường thẳng, đưa hai ngẫu lực $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ về cùng cánh tay đòn như hình 3.7

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_2, \vec{F}_2') \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2', \vec{F}_1', \vec{F}_2) \equiv (\vec{R}, \vec{R}').$$

Từ đó ta có

$$\vec{m}(\vec{R}, \vec{R}') = \overrightarrow{AB} \times \vec{R} = \overrightarrow{AB} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2$$
$$= \vec{m}_1 + \vec{m}_2$$

2.3. Thu gọn hệ lực không gian bất kỳ về một điểm

a) Định lý dời lực song song. Một lực $\vec{F}$ đặt tại điểm A tương đương với lực $\vec{F}'$ bằng lực $\vec{F}$ đặt tại B và một ngẫu lực có véctơ mômen bằng mômen của lực $\vec{F}$ lấy đối với điểm B

$$\vec{F}_A \equiv \vec{F}_B' \text{ và } \vec{m}_B(\vec{F}_A). \tag{2.3}$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như chứng minh trong trường hợp hệ lực phẳng.

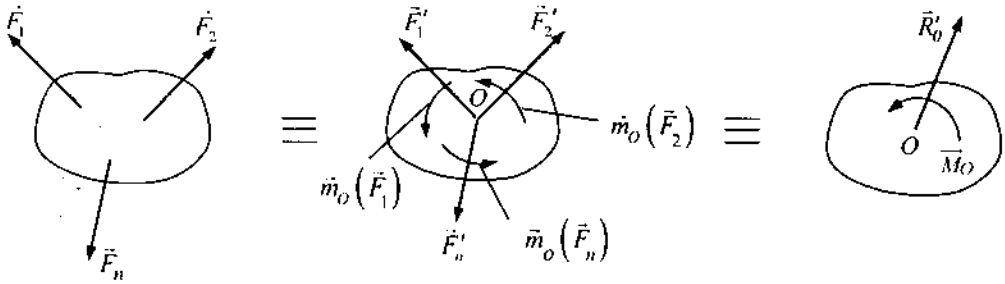
b) Khái niệm toócxơ lực

Định nghĩa. Một hệ gồm một lực và một ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{M}_O)$ được gọi là một toócxơ lực.

Như thế toócxơ lực $(\vec{F}, 0)$ là một lực. Toócxơ lực $(0, \vec{M}_O)$ là một ngẫu lực. Toócxơ lực $(0,0)$ là một hệ lực cân bằng. Nếu $\vec{M}_O // \vec{F}$, toócxơ lực $(\vec{F}, \vec{M}_O)$ là một hệ lực xoắn.

c) Định lý Poinsot (Poanhxô). Thu gọn hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ về điểm O ta được một toócxơ lực $(\vec{R}', \vec{M}_O)$. Trong đó $\vec{R}'$ là véctơ chính của hệ lực, còn $\vec{M}_O$ là véctơ mômen chính của hệ lực đối với điểm O.

Chứng minh. Thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ về điểm O được một hệ lực đồng quy $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ và một hệ ngẫu lực $(\vec{m}_O(\vec{F}_1), \vec{m}_O(\vec{F}_2), ..., \vec{m}_O(\vec{F}_n))$. Tiếp tục thu gọn hệ lực đồng quy ta được một lực $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k' = \sum \vec{F}_k$, thu gọn hệ ngẫu lực được một ngẫu lực tổng hợp $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)$. Vậy ta có $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{R}_O', \vec{M}_O)$.



Hình 3.8

d) Ảnh hưởng của tâm thu gọn

Thu gọn hệ lực không gian $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ về hai tâm thu gọn O và A khác nhau, ta được

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) = \left(\vec{R}_O', \vec{M}_O\right) \text{ với } \vec{R}_O' = \sum \vec{F}_k,\ \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)$$

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) = \left(\vec{R}_A', \vec{M}_A\right) \text{ với } \vec{R}_A' = \sum \vec{F}_k,\ \vec{M}_A = \sum \vec{m}_A\left(\vec{F}_k\right)$$

Như thế véctơ chính $\vec{R}_O'$, $\vec{R}_A'$ như nhau và không phụ thuộc vào tâm thu gọn, còn các mômen chính $\vec{M}_O$, $\vec{M}_A$ phụ thuộc vào tâm thu gọn theo quy luật như sau.

Định lý biến thiên mômen chính. Véc tơ mômen chính của hệ lực không gian phụ thuộc vào tâm thu gọn theo quy luật

$$\vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{m}_O(\vec{R}_A') \tag{2.4}$$

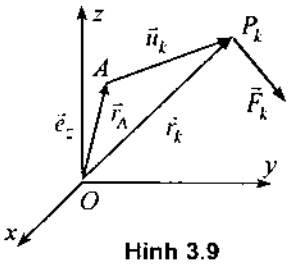
Chứng minh. Theo định nghĩa ta có

$$\vec{M}_A = \sum \vec{u}_k \times \vec{F}_k \qquad (1)$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k \qquad (2)$$

Từ hình 3.9 suy ra

$$\vec{r}_k = \vec{r}_A + \vec{u}_k = \vec{u}_k + \overrightarrow{OA} \qquad (3)$$



Hình 3.9

Thế (3) vào (2) ta được

$$\vec{M}_O = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum (\vec{u}_k + \overrightarrow{OA}) \times \vec{F}_k = \vec{M}_A + \vec{m}_O(\vec{R}_A')$$

Hệ quả: Hệ lực không gian có hai bất biến đối với tâm thu gọn là véc tơ chính $\vec{R}'$ và tích vô hướng véc tơ chính với mômen chính $\vec{R}'.\vec{M}_O$.

2.4. Các dạng chuẩn của hệ lực không gian

Theo định lý Poinsot ta có

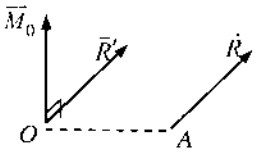
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{R}', \vec{M}_O)$$

Căn cứ vào véctơ chính $\vec{R}'$ và mômen chính $\vec{M}_0$ ta có các dạng chuẩn sau đây của hệ lực không gian.

a) Nếu $\vec{R}' = 0$, $\vec{M}_O = 0$ thì $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv 0$

b) Nếu $\vec{R}' = 0$, $\vec{M}_O \neq 0$ thì $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv \vec{M}_0$

c) Nếu $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{R}'.\vec{M}_O = 0$ thì $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv \vec{R}$



Hình 3.10

Thực vậy, nếu $\vec{M}_O = 0$ thì $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv$ một hợp lực đặt tại O. Nếu $\vec{M}_O \neq 0$ thì $\vec{M}_0 \perp \vec{R}'$. Theo quy tắc ngược của định lý dời lực song song, có thể thay thế toócxơ lực ($\vec{R}', \vec{M}_O \neq 0$) bởi một lực $\vec{R} = \vec{R}'$ đặt tại A.

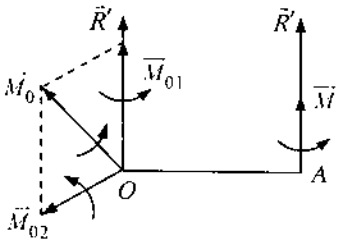
d) Nếu $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{R}'.\vec{M}_0 \neq 0$ thì $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv$ một hệ lực xoắn.

Một hệ lực gồm một lực $\vec{F}$ và một ngẫu lực $\vec{m}$ mà $\vec{m}$ cùng phương với $\vec{F}$ được gọi là một hệ lực xoắn. Nếu $\vec{F}$ và $\vec{m}$ cùng chiều, thì gọi là hệ lực xoắn thuận. Nếu $\vec{F}$ và $\vec{m}$ ngược chiều nhau được gọi là hệ lực xoắn ngược.

Phân tích ngẫu lực $\vec{M}_0$ như hình 3.11.

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02}$$

Vì $\vec{M}_{02}$ và $\vec{R}'$ vuông góc với nhau nên thu về một lực $\vec{R}'$ đặt tại A. Lực $\vec{R}'_A$ và ngẫu lực $\vec{M}_{01}$ tạo thành một hệ lực xoắn.



Hình 3.11

2.5. Định lý Varignon

Định lý. Khi hệ lực có hợp lực thì mômen của hợp lực đối với một điểm O bất kỳ bằng tổng hình học mômen của các lực thành phần đối với điểm O đó.

Nếu $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv \vec{R}$, thì $\vec{m}_O(\vec{R}) = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$ (2.5)

Chứng minh tương tự như trường hợp hệ lực phẳng. Người ta hay áp dụng định lý này trong việc tính mômen của lực đối với các trục.

Chú ý: Khi tính mômen của lực $\vec{F}$ đối với một điểm O, có thể phân tích lực $\vec{F}$ thành ba thành phần vuông góc $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$ rồi áp dụng công thức (2.5).

3. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHÔNG GIAN

3.1. Điều kiện cân bằng tổng quát

Định lý. Điều kiện cần và đủ để cho một vật rắn không gian tự do cân bằng là hệ lực tác dụng lên vật rắn có véctơ chính bằng không và mômen chính đối với một tâm O bất kỳ bằng không.

Chứng minh điều kiện đủ. Do $\vec{R}' = 0$ và $\vec{M} = 0$ nên hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv$ một cặp lực cân bằng. Theo tiên đề 1 thì vật rắn cân bằng.

Chứng minh điều kiện cần. Giả thiết vật rắn cân bằng. Nếu như điều kiện $\vec{R}' = 0$ và $\vec{M} = 0$ bị vi phạm thì theo biện luận dạng chuẩn ở trên hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ sẽ khác không. Do đó vật rắn sẽ không cân bằng. Đó là điều mâu thuẫn với giả thiết. Vậy điều kiện $\vec{R}' = 0$ và $\vec{M} = 0$ phải thoả mãn.

Chú ý: Điều kiện cần và đủ để cho một vật rắn tự do cân bằng tương đương với điều kiện cần và đủ để cho hệ lực tác dụng lên vật rắn đó triệt tiêu.

3.2. Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

a) Các phương trình cân bằng của các hệ lực không gian tổng quát

Từ điều kiện $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k = 0$ và $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0$ suy ra sáu phương trình cân bằng của hệ lực không gian:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0 \tag{3.1}$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum m_y(\vec{F}_k) = 0,\ \sum m_z(\vec{F}_k) = 0 \tag{3.2}$$

b) Các phương trình cân bằng của các hệ lực không gian đặc biệt

Hệ lực không gian đồng quy. Gọi O là điểm đồng quy, điều kiện $\vec{M}_O = 0$ luôn luôn thoả mãn. Vì vậy ta còn ba phương trình cân bằng

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0 \tag{3.3}$$

Hệ lực không gian song song. Giả sử chọn trục z là trục song song với các lực. Khi đó các phương trình $R'_x = 0$; $R'_y = 0$ và $\sum m_z(\vec{F}_k) = 0$ luôn tự thoả mãn. Vậy đối với hệ lực không gian song song ta có ba phương trình cân bằng

$$\sum F_{kz} = 0,\ \sum m_x(\vec{F}_k) = 0,\ \sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \qquad (3.4)$$

Hệ ngẫu lực không gian. Véctơ chính của hệ ngẫu lực không gian luôn luôn bằng không $\vec{R}' = 0$. Vì vậy đối với hệ ngẫu lực không gian ta có ba phương trình cân bằng

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0,\quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0,\quad \sum m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

3.3. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 3.2. Một tấm phẳng đồng chất chữ nhật ABCD, trọng lượng P được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ bản lề cầu A, bản lề trụ B và dây CE nghiêng một góc 30^0. Tìm các phản lực tại A và B và sức căng của dây.

Lời giải. Khảo sát cân bằng tấm ABCD ta có hệ lực cân bằng (hình 3.12)

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}, \vec{P}) \equiv 0$$

Ký hiệu AB = b, AD = a. Chọn hệ trục toạ độ $Axyz$ như hình vẽ. Ta có 6 phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B - T\cos 30^0 \sin 30^0 = 0 \quad (1)$$

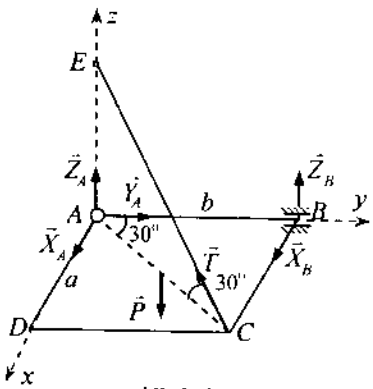
$$\sum F_{ky} = Y_A - T\cos 30^0 \cos 30^0 = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B - P + T\sin 30^0 = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = -P\frac{b}{2} + Z_B b + bT\sin 30^0 = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = P\frac{a}{2} - aT\sin 30^0 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = -X_B b = 0 \quad (6)$$



Hình 3.12

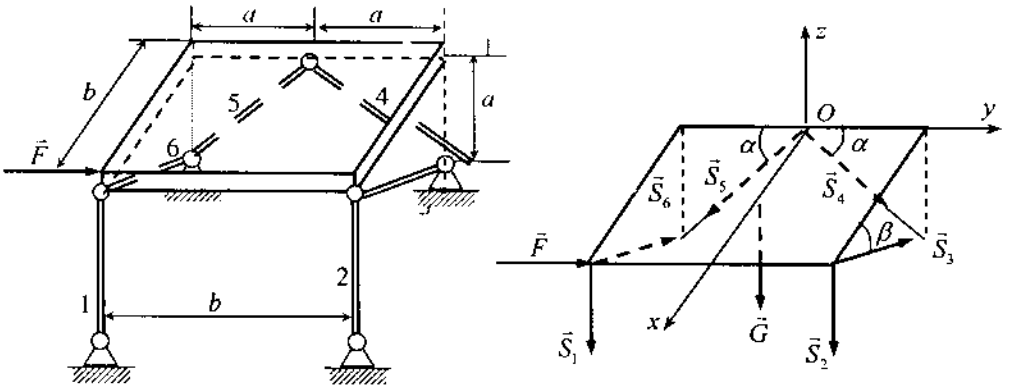
Từ (6) suy ra $X_B = 0$. Từ (5) ta có $T = P$. Thế các giá trị này vào phương trình (1), (2), (3), (4) giải ra được

$$X_A = \frac{\sqrt{3}}{4}P,\ Y_A = \frac{3}{4}P,\ Z_A = \frac{1}{2}P,\ Z_B = 0$$

Thí dụ 3.3. Tấm đồng chất trọng lượng $\vec{G}$ chịu lực tác dụng $\vec{F}$ và được đỡ ở vị trí nằm ngang nhờ 6 thanh (không trọng lượng) như hình 3.13. Hãy xác định ứng lực của các thanh.

Lời giải. Khảo sát cân bằng của tấm đồng chất. Thay các liên kết thanh bằng các phản lực liên kết tương ứng (hình 3.13) ta được hệ lực cân bằng

$$\left(\vec{F}, \vec{G}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6\right) \equiv 0$$



Hình 3.13

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ. Các phương trình cân bằng tĩnh học có dạng

$$\sum F_{kx} = 0 : -S_3 \cos\beta - S_6 \cos\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0 : S_4 \cos\alpha - S_5 \cos\alpha + F = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0 : -S_1 - S_2 - S_3 \sin\beta - S_6 \sin\beta - S_4 \sin\alpha - S_5 \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0 : aS_1 - aS_2 + aS_6 \sin\beta - aS_3 \sin\beta = 0 \qquad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0 : \frac{b}{2}G + bS_1 + bS_2 + bS_6 \sin\beta + bS_3 \sin\beta = 0 \qquad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0 : bF + aS_3 \cos\beta - aS_6 \cos\beta = 0 \qquad (6)$$

Trong đó

$$\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{2a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Giải hai phương trình (1) và (6) ta được

$$S_3 = -S_6 = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}F$$

Thế các kết quả trên vào hai phương trình (4) và (5) suy ra

$$S_1 = -\frac{G}{4} - \frac{F}{2}, \quad S_2 = -\frac{G}{4} + \frac{F}{2}$$

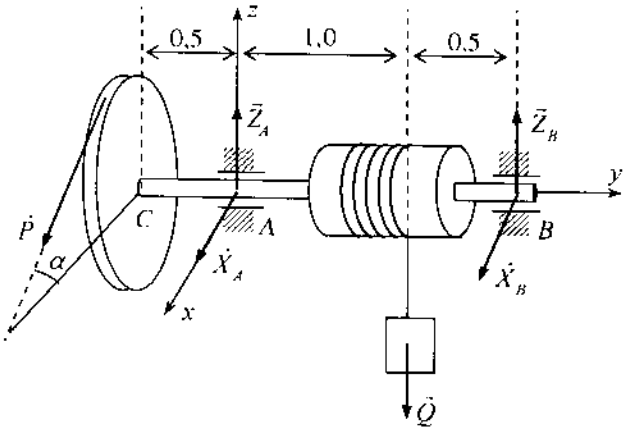
Cuối cùng từ hai phương trình (2) và (3) nhận được

$$S_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{G}{2} + F\right), \quad S_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{G}{2} - F\right)$$

Thí dụ 3.4. Một hình trụ tròn nằm trên hai ổ đỡ A, B và mang đĩa C ở một đầu. Cho biết bán kính của đĩa là R, bán kính trục là r, $R = 6r$. Quanh trụ tròn cuốn dây treo vật nặng Q. Quanh đĩa quấn dây có sức căng dây $P = 60$ N. Các kích thước cho trên hình vẽ, góc $\alpha = 30^0$. Tính Q để hệ cân bằng và xác định các phản lực ở hai ổ đỡ A và B.

Lời giải. Chọn hình trụ tròn AB mang đĩa C ở đầu làm vật rắn khảo sát. Thay thế liên kết ở A và B bằng các phản lực liên kết như hình vẽ 3.14. Ta có hệ lực cân bằng

$$\left(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B\right) \equiv O.$$



Hình 3.14

Để viết phương trình cân bằng thuận tiện, ta phân tích lực P theo các trục toạ độ $P_x = P\cos\alpha$, $P_z = -P\sin\alpha$. Các phương trình cân bằng có dạng:

$$\sum F_x = 0: \; X_A + X_B + P\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{kz} = 0: \; Z_A + Z_B - P\sin\alpha - Q = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0: \; 1{,}5Z_B - 1{,}0Q + 0{,}5P\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0: \; 6rP - rQ = 0 \qquad (4)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0: \; -1{,}5X_B + 0{,}5P\cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

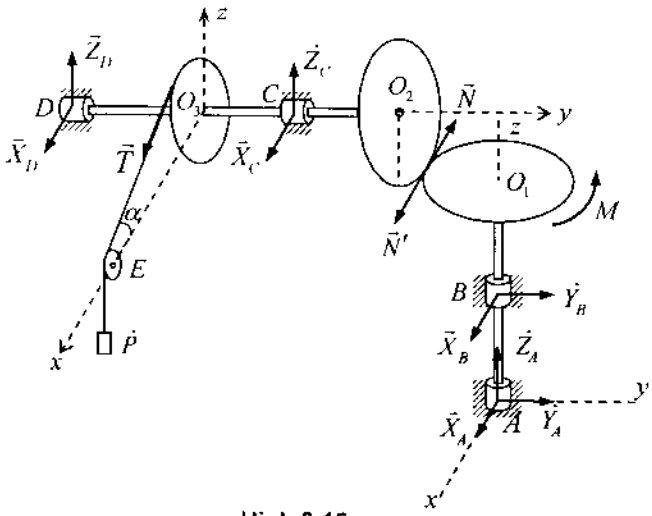
Từ (4) $\Rightarrow Q = 6P = 360\,N$, Từ (5) $\Rightarrow X_B = \dfrac{P\sqrt{3}}{6} = 10\sqrt{3} = 17{,}3\,N$,

Từ (3) $\Rightarrow Z_B = \dfrac{2Q}{3} - \dfrac{P}{6} = 240 - 10 = 230\,N$,

Từ (1) $\Rightarrow X_A = -X_B - \dfrac{P\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} - 30\sqrt{3} = -40\sqrt{3} \simeq -69,3\,N$,

Từ (2) $\Rightarrow Z_A = Q + \dfrac{P}{2} - Z_B = 390 - 230 = 160\,N$.

Thí dụ 3.5. Cho hệ hai trục như hình vẽ 3.15. Trục thẳng đứng ABO_1 mang bánh răng O_1, chịu ngẫu lực $\vec{M}$ và được đỡ bởi ổ đỡ A và B; trục nằm ngang DO_3CO_2 mang hai bánh và được đỡ bởi hai ổ C và D. Bánh răng O_2 ăn khớp với bánh răng O_1, lực tác dụng tương hỗ ở răng ăn khớp nằm ngang theo tiếp tuyến chung và hướng song song với trục x. Bánh O_3 có cuốn dây trên vành, đầu dây tự do treo vật nặng P sau khi vòng qua ròng rọc nhỏ E (bỏ qua kích thước), nhánh dây giữa bánh O_3 và ròng rọc nằm trong mặt phẳng của bánh và nghiêng với trục nằm ngang O_3E một góc α. Bỏ qua trọng lượng các bánh. Cho biết bán kính các bánh là $R_1 = R_2 = R$; $R_3 = r$. Các đoạn $AB = BO_1 = a$, $O_2C = CO_3 = O_3D = b$. Xác định ngẫu lực M để hệ cân bằng và phản lực ở các ổ đỡ.



Hình 3.15

Lời giải. Trước hết xét trục ABO_1 chịu hệ lực gồm ngẫu lực M, các phản lực $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ của ổ đỡ A (loại cối), các phản lực $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$ của ổ đỡ B (loại bản lề), lực ăn khớp $\vec{N}$ (hướng về phía sau) do bánh O_2 tác dụng vào (hình 3.15). Ta có hệ lực cân bằng:

$$\left(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}, \vec{M}\right) \equiv O$$

Từ hình vẽ dễ dàng tính được

$$T = P, T_x = P\cos\alpha, T_z = -P\sin\alpha \quad .$$

Các phương trình cân bằng của vật rắn ABO_1 là

$$\sum F_x = X_A + X_B - N = 0, \quad \sum F_y = Y_A + Y_B = 0, \quad \sum F_z = Z_A = 0,$$

$$\sum m_{Ax}(\vec{F}_k) = -Y_B a = 0, \qquad \sum m_{Ay}(\vec{F}_k) = X_B a - N.2a = 0,$$

$$\sum m_{Az}(\vec{F}_k) = M - NR = 0.$$

Giải ra ta được:

$$Z_A = Y_B = Y_A = 0, N = \frac{M}{R}, X_B = \frac{2M}{R}, X_A = -\frac{M}{R}.$$

Khảo sát cân bằng của trục DO_3CO_2 chịu tác dụng của hệ lực gồm: lực $\vec{P}$ (nằm theo nhánh dây nghiêng và có thể phân tích ra hai thành phần $\vec{P}_X$ và $\vec{P}_Z$); lực ăn khớp $\vec{N}'$ (hướng ra phía trước); các phản lực $\vec{X}_C, \vec{Z}_C, \vec{X}_D, \vec{Z}_D$ của các ổ đỡ C và D. Ta có hệ lực cân bằng:

$$\left(\vec{X}_C, \vec{Z}_C, \vec{X}_D, \vec{Z}_D, \vec{T}, \vec{N}'\right) \equiv O$$

Lập 5 phương trình cân bằng với $N = N'$ ta có

$$\sum F_x = X_C + X_D + N' + P\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_z = Z_C + Z_D - P\sin\alpha = 0$$

$$\sum m_{O_3x}(\vec{F}_k) = Z_C b - Z_D b = 0$$

$$\sum m_{O_3y}(\vec{F}_k) = Pr - N'R = 0$$

$$\sum m_{O_3z}(\vec{F}_k) = X_D b - X_C b - N'.2b = 0$$

Giải ra

$$Z_C = Z_D = \frac{P}{2}\sin\alpha, \; N' = P\frac{r}{R},$$

$$X_D = -\frac{P}{2}\cos\alpha + \frac{P}{2}\frac{r}{R}, \; X_C = -\frac{P}{2}\cos\alpha - \frac{3P}{2}\frac{r}{R}$$

So sánh hai giá trị N và N' vừa tìm được, suy ra $M = Pr$.

Chương 4

TRỌNG TÂM VẬT RẮN

Trọng tâm vật rắn là một trong những bài toán áp dụng quan trong của lý thuyết hệ lực. Archimedes (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) và Pappus (thế kỷ thứ 3 sau công nguyên) là những người đầu tiên đã đưa ra khái niệm trọng tâm vật rắn. Trong chương này trước hết đưa ra định nghĩa và công thức xác định trọng tâm vật rắn, sau đó trình bày các phương pháp xác định trọng tâm của vật rắn đồng chất đối xứng và trọng tâm của các vật ghép. Cuối chương nêu lên hai công thức Guldin xác định diện tích xung quanh và thể tích của vật rắn tròn xoay.

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÔNG THỨC XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM VẬT RẮN

1.1. Tâm của hệ lực song song cùng chiều

Cho hệ lực song song cùng chiều ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) có véc tơ chính $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k \neq 0$. Chọn $\vec{e}$ là véctơ đơn vị trên trục $\Delta // \vec{F}_k$, ta có

$$\vec{F}_k = \bar{F}_k \vec{e} \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

Do $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{R}'.\vec{M}_O = 0$, nên hệ lực song song $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ có hợp lực.

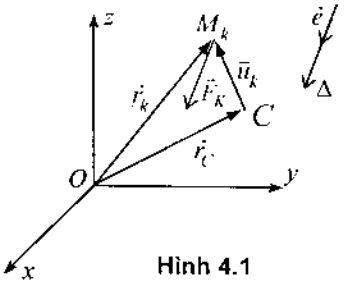
a) Định nghĩa. Điểm hình học C mà mômen chính đối với C của hệ lực song song cùng chiều $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ luôn bằng không khi hướng của hệ lực này thay đổi, được gọi là tâm của hệ lực song song $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$

$$\vec{M}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_C(\vec{F}_k) = 0.$$

b) Công thức xác định vị trí tâm của hệ lực song song cùng chiều

Từ hình vẽ 4.1 ta có

$$\vec{M}_C = \sum_{k=1}^{n} (\vec{u}_k \times \vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_k - \vec{r}_c) \times \vec{F}_k = 0$$



Hình 4.1

hay $$\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\,\vec{r}_k\right)\times\vec{e}=\vec{r}_C\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\right)\times\vec{e}$$

Biểu thức này đúng với mọi phương $\vec{e}$ nên từ công thức trên ta suy ra công thức xác định tâm của hệ lực song song

$$\vec{r}_C=\frac{\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k\,\vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k}. \qquad (1.1)$$

1.2. Định nghĩa và công thức xác định trọng tâm vật rắn

a) Định nghĩa. Khi vật rắn gần trái đất, trọng tâm của vật rắn là tâm của hệ trọng lực của các phần tử tạo thành vật rắn.

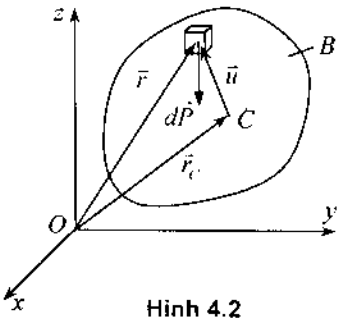
b) Công thức xác định trọng tâm của vật rắn

Chia vật rắn thành các phần tử nhỏ, theo công thức (1.1) ta có

$$\vec{r}_C=\frac{1}{P}\int_B\vec{r}\,dP \qquad (1.2)$$

với P là trọng lượng của vật rắn B.

Công thức (1.2) là công thức xác định trọng tâm vật rắn.



Hình 4.2

Từ (1.2) suy ra:

$$x_C=\frac{1}{P}\int_B x\,dP,\quad y_C=\frac{1}{P}\int_B y\,dP,\quad z_C=\frac{1}{P}\int_B z\,dP \qquad (1.3)$$

Đối với các vật rắn đồng chất, ký hiệu ρ là trọng lượng riêng, V là thể tích vật rắn, ta có $dP=\rho dV$, $P=\rho V$. Các công thức (1.2), (1.3) trong trường hợp này có dạng

$$\vec{r}_C=\frac{1}{V}\int_V\vec{r}\,dV \qquad (1.4)$$

$$x_C=\frac{1}{V}\int_V x\,dV,\quad y_C=\frac{1}{V}\int_V y\,dV,\quad z_C=\frac{1}{V}\int_V z\,dV \qquad (1.5)$$

Nếu vật rắn là một mặt đồng chất có diện tích là S, tương tự trên suy ra

$$\vec{r}_C=\frac{1}{S}\int_S\vec{r}\,dS \qquad (1.6)$$

$$x_C = \frac{1}{S}\int_S x\,dS, \quad y_C = \frac{1}{S}\int_S y\,dS, \quad z_C = \frac{1}{S}\int_S z\,dS \tag{1.7}$$

Đặc biệt khi mặt là một tấm phẳng đồng chất có diện tích là A, thì

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x\,dA, \quad y_C = \frac{1}{A}\int_A y\,dA \tag{1.8}$$

Chú ý. Các đại lượng $S_x = \int_A y\,dA$, $S_y = \int_A x\,dA$ được gọi là mômen tĩnh của tiết diện A đối với các trục x và y tương ứng.

Nếu vật rắn là một đường đồng chất, chiều dài L, tương tự trên, ta có

$$\vec{r}_C = \frac{1}{L}\int_L \vec{r}\,ds \tag{1.9}$$

$$x_C = \frac{1}{L}\int_L x\,ds, \quad y_C = \frac{1}{L}\int_L y\,ds, \quad z_C = \frac{1}{L}\int_L z\,ds \tag{1.10}$$

Thí dụ 4.1. Xác định toạ độ trọng tâm của một tam giác cạnh đáy b, chiều cao là h (hình 4.3).

Lời giải. Diện tích một phân tố nhỏ như hình vẽ là

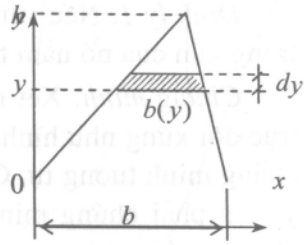
$$dA = b(y)dy$$

Theo công thức (1.8) suy ra

$$Ay_C = \int_A y\,dA = \int_0^h y\,b(y)dy \quad (1)$$

Từ hình vẽ ta có mối quan hệ hình học

$$\frac{b(y)}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow b(y) = \frac{b(h-y)}{h} \quad (2)$$



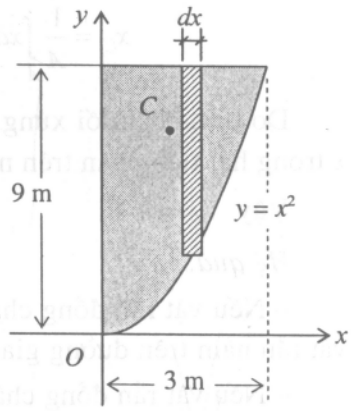
Hình 4.3

Thế (2) vào (1) ta được

$$Ay_C = \frac{b}{h}\int_0^h (hy - y^2)dy = \frac{bh^2}{6}$$

Do $A = \frac{1}{2}bh$, suy ra $y_C = \frac{h}{3}$.

Thí dụ 4.2. Một tấm phẳng đồng chất có hình dạng như trên hình vẽ. Hãy xác định diện tích tấm và tọa độ trọng tâm x_C, y_C của tấm.



Hình 4.4

Từ hình vẽ 4.4 ta có diện tích

$$dA = ydx = (9 - x^2)dx$$

$$A = \int_0^3 (9 - x^2)\mathrm{d}x = 18 \ m^2$$

Vị trí trọng tâm phân tố dA

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = (9 + y)/2 = \tfrac{1}{2}(9 + x^2)$$

Vị trí trọng tâm của tấm

$$x_C = \frac{1}{A}\int \tilde{x}dA = \frac{9}{8} = 1{,}125 \ m, \qquad y_C = \frac{1}{A}\int \tilde{y}dA = \frac{27}{5} = 5{,}4 \ m.$$

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ TRỌNG TÂM VẬT RẮN

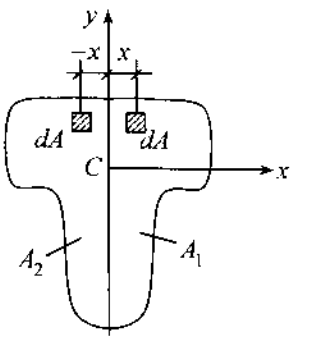
Để xác định vị trí của trọng tâm vật rắn, ta phải thực hiện các phép tính tích phân theo các công thức (1.2) đến (1.10) ở đoạn trên. Nếu biết chọn một cách thích hợp các hệ toạ độ, các phần tử thể tích, diện tích, đường, thì tính toán cũng khá đơn giản. Dưới đây dựa vào những tính chất đặc biệt của hình thể vật rắn, ta có thể xác định trọng tâm của nó một cách nhanh chóng và thuận tiện.

2.1. Xác định vị trí trọng tâm của vật rắn đồng chất đối xứng

Định lý 1. Nếu vật rắn đồng chất có mặt phẳng (trục, tâm) đối xứng, thì trọng tâm của nó nằm trên mặt phẳng (trục, tâm) đối xứng đó.

Chứng minh. Xét trường hợp hình phẳng có trục đối xứng như hình 4.5. Các trường hợp khác chứng minh tương tự. Chọn trục đối xứng là trục y, cần phải chứng minh $x_c = 0$. Theo công thức (1.8) ta có

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A xdA = \frac{1}{A}\left[\int_{A_1} xdA + \int_{A_2} xdA\right]$$



Hình 4.5

Do tính chất đối xứng cho nên dấu của biến x trong hai tích phân trên ngược nhau.

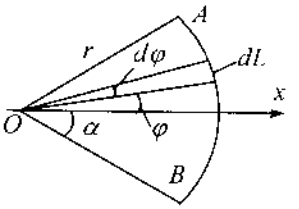
Vậy $x_C = 0$.

Hệ quả:

– Nếu vật rắn đồng chất có nhiều mặt phẳng đối xứng, thì trọng tâm của vật rắn nằm trên đường giao của các mặt phẳng đối xứng đó.

– Nếu vật rắn đồng chất có nhiều trục đối xứng, thì trọng tâm của vật rắn nằm tại giao điểm của trục đối xứng đó.

Thí dụ 4.3. Xác định vị trí trọng tâm của cung tròn đồng chất AB có bán kính r và góc ở tâm AOB = 2α (hình 4.6).



Hình 4.6

Lời giải. Lấy một cung dL nhỏ ứng với góc $d\varphi$. Ta có

$$dL = rd\varphi\,,\ x = r\cos\varphi\,,\ L = 2r\alpha \qquad (1)$$

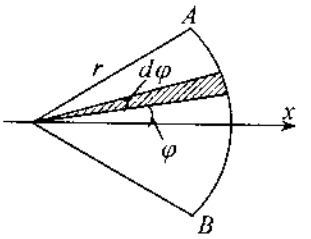
Do tính chất đối xứng, ta có trọng tâm C của cung tròn nằm trên trục x. Tính x_C theo công thức (1.10)

$$x_C = \frac{1}{L}\int xdL = \frac{1}{2r\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2\cos\varphi d\varphi = r\frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (2)$$

Nếu cung AB là nửa đường tròn, thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$,

Từ (2) suy ra: $x_C = 2\frac{r}{\pi}$. (3)

Thí dụ 4.4. Xác định vị trí trọng tâm của hình quạt tròn đồng chất AOB tâm O bán kính r, góc ở tâm AOB là 2α (hình 4.7).



Hình 4.7

Lời giải. Do hình quạt tròn đồng chất đối xứng qua trục x như hình vẽ nên $y_C = 0$, ta chỉ cần tìm x_C mà thôi. Ta chia hình quạt tròn thành vô số hình quạt nhỏ, mỗi hình quạt nhỏ xem gần đúng là một hình tam giác, có trọng tâm nằm ở 2/3 bán kính.

Vậy: $$x = \frac{2}{3}r\cos\varphi$$

$$dA = \frac{1}{2}r.d\varphi.r = \frac{1}{2}r^2d\varphi\,,\ A = r^2\alpha$$

Áp dụng công thức (1.8) suy ra

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A ydA = \frac{1}{r^2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{2}{3}r\cos\varphi\frac{1}{2}r^2d\varphi = \frac{r}{3\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Nếu AOB là nửa mặt tròn, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì ta có $x_C = \frac{4r}{3\pi}$.

2.2. Xác định vị trí trọng tâm của các vật ghép

Định lý 2. Nếu một vật rắn phẳng được ghép từ m phần, mỗi phần đồng chất có diện tích A_i, và có vị trí trọng tâm $C_i(x_i, y_i)$, thì trọng tâm của toàn vật rắn được xác định bởi công thức

$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}, \quad y_C = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \tag{2.1}$$

Chứng minh. Theo công thức (1.8) ta có

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x dA = \frac{1}{A}\left[\int_{A_1} x dA + \int_{A_2} x dA + ... + \int_{A_m} x dA\right] \tag{1}$$

Cũng theo công thức (1.8)

$$\int_{A_i} x dA = x_i A_i \tag{2}$$

Thế (2) vào (1) ta được công thức cần chứng minh

$$x_C = \frac{1}{A}\left[x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_n A_n\right] = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i}$$

Chú ý: Đối với các vật ghép không gian, các công thức (2.1) được mở rộng thành

$$x_C = \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i}; \; y_C = \frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i}; \; z_C = \frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i} \tag{2.2}$$

Thí dụ 4.5. Tìm vị trí trọng tâm của thiết diện đồng chất hình chữ L như hình 4.8.

Lời giải. Chia thiết diện hình chữ L thành hai tiết diện hình chữ nhật. Toạ độ các trọng tâm của hai hình chữ nhật con là

$$x_1 = 1\ cm; \; y_1 = 5\ cm$$

$$x_2 = 3\ cm; \; y_2 = 1\ cm$$

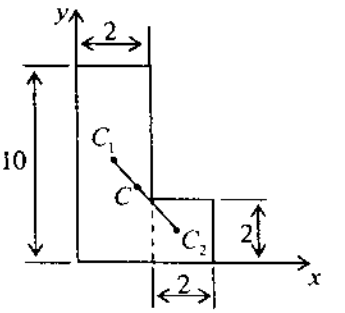
Diện tích các hình chữ nhật con là

$$A_1 = 20\ cm^2; \; A_2 = 4\ cm^2$$

Theo công thức (2.1) ta có

$$x_C = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{20 + 12}{24} = \frac{4}{3}\ cm$$

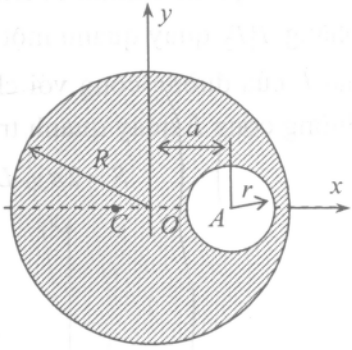
$$y_C = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{100 + 4}{24} = 4{,}3\ cm$$



Hình 4.8

Thí dụ 4.5. Tìm trọng tâm của một thiết diện tròn đồng chất tâm O, bán kính R, bị khoét đi một hình tròn tâm A bán kính r. Cho biết OA= a, $a+r < R$ (hình 4.9).

Lời giải. Xem thiết diện trên hình 4.9 là kết quả của việc ghép một hình tròn tâm O(0,0) bán kính R , diện tích $A_1 = \pi R^2$ với một hình tròn tâm A(a, 0), bán kính r, diện tích $A_2 = -\pi r^2$. Chọn hệ trục toạ độ như trên hình 4.9, trục Ox là trục đối xứng. Do đó $y_C = 0$, chỉ cần tìm x_C.



Hình 4.9

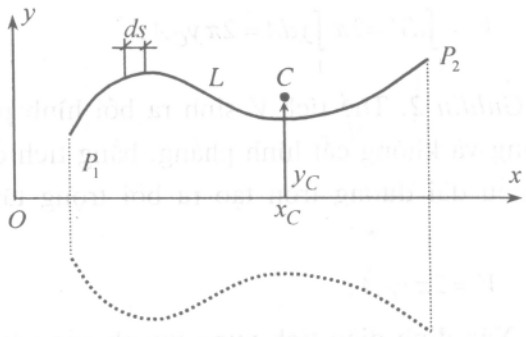
Theo công thức (2.1) ta có

$$x_C = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0.\pi R^2 - a\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}$$

2.3. Các công thức Guldin

Paul Habakuk Guldin (1577–1643, người Áo) đã trình bày hai công thức tính diện tích xung quanh và tính thể tích của vật thể tròn xoay dựa trên các khái niệm trọng tâm đường và trọng tâm mặt.

Xét một đường cong phẳng P_1P_2 nằm trên mặt phẳng xy, dài L, trọng tâm của nó tại C. Cho đường cong P_1P_2 quay quanh trục x, nằm trong cùng một mặt phẳng với đường cong và không cắt đường cong, ta được một mặt tròn xoay (hình 4.10). Như thế cung vi phân ds của đường cong phẳng, tạo thành một mặt tròn xoay vi phân có diện tích $dS = 2\pi y ds$

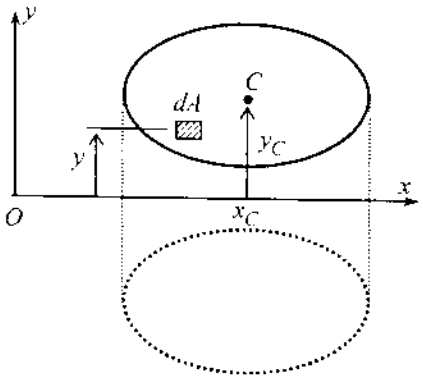


Hình 4.10

Diện tích toàn bộ mặt tròn xoay là $S = \int_S dS = \int_L 2\pi y ds = 2\pi \int_L y ds = 2\pi y_C L$.

Công thức Guldin 1. Diện tích của mặt tròn xoay sinh ra bởi đường cong phẳng P_1P_2 quay quanh một trục đồng phẳng x không cắt nó, bằng tích chiều dài L của đường cong với chiều dài của đường tròn tạo ra bởi trọng tâm của đường cong L quay quanh trục x

$$S = 2\pi y_C L . \tag{2.3}$$



Hình 4.11

Tương tự xét một hình phẳng có diện tích A nằm trên mặt phẳng xy. Trọng tâm của nó là $C(x_c, y_c)$. Cho hình phẳng quay quanh trục x, nằm trong cùng một mặt phẳng với hình phẳng và không cắt hình phẳng đó, ta được một vật thể tròn xoay (hình 4.11). Một phân tố diện tích dA của hình quay quanh trục x, tạo thành một thể tích phân tố

$$dV = 2\pi y dA$$

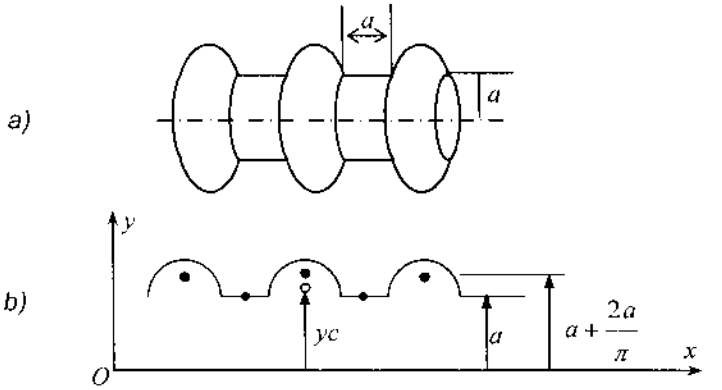
Thể tích toàn thể của vật tròn xoay là

$$V = \int_V dV = 2\pi \int_A y dA = 2\pi y_C A .$$

Công thức Guldin 2. Thể tích V sinh ra bởi hình phẳng A quay quanh trục x đồng phẳng và không cắt hình phẳng, bằng tích diện tích hình phẳng cơ sở A với chiều dài đường tròn tạo ra bởi trọng tâm hình phẳng quay quanh trục x

$$V = 2\pi y_C A . \tag{2.4}$$

Thí dụ 4.7. Xác định diện tích xung quanh của vật thể tròn xoay được biểu diễn trên hình 4.12.



Hình 4.12

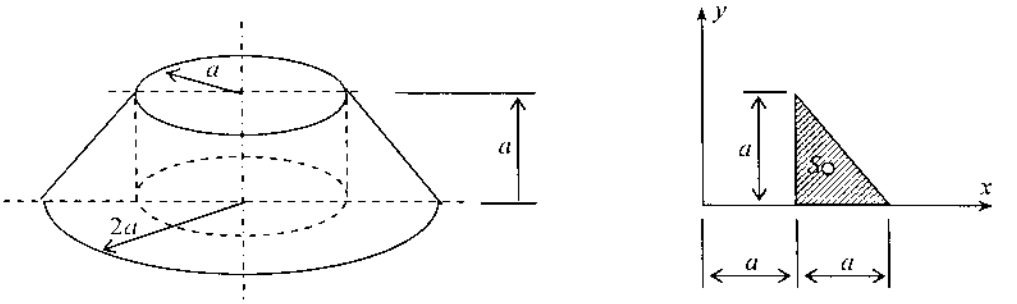
Lời giải. Sử dụng cách xác định trọng tâm của các vật ghép (ở đây là năm đoạn đường cong ghép bao gồm 3 cung tròn và 2 đoạn thẳng) ta có

$$y_C = \frac{3\left[\pi a\left(a + 2a/\pi\right)\right] + 2.a.a}{L} = \frac{17,42a^2}{L}$$

Trong đó $L = 3a\pi + 2a$. Theo (2.3) suy ra

$$S = 2\pi y_C L = 109,48\ a^2$$

Thí dụ 4.8. Xác định thể tích của khối tròn xoay sinh ra do quay một tam giác quanh trục thẳng đứng như hình 4.13.



Hình 4.13

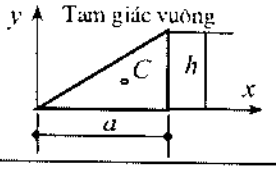
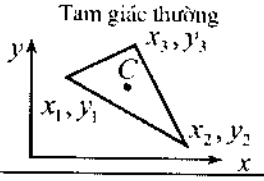
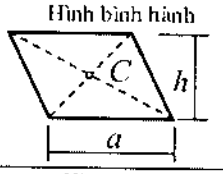
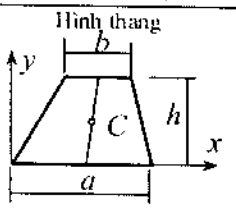
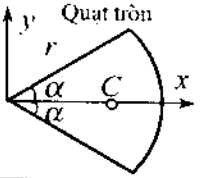
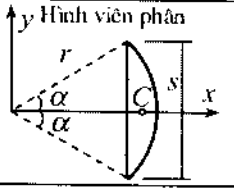
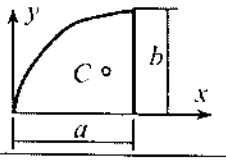
Lời giải. Từ hình vẽ suy ra

$$A = \frac{1}{2}a^2\ ,\ x_C = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a$$

Theo công thức (2.4) tính được

$$V = 2\pi x_C A = 4,19a^3\ .$$

Bảng 4.1 sau đây là công thức tính diện tích và vị trí trọng tâm của một vài hình phẳng thường gặp

Hình phẳng	Diện tích	Vị trí trọng tâm
Tam giác vuông 	$A=\frac{1}{2}ah$	$x_C=\frac{2}{3}a;\ y_C=\frac{h}{3}$
Tam giác thường 	$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}(x_2-x_1)(y_2-y_1)\\-(x_3-x_1)(y_3-y_1)\end{bmatrix}$	$x_C=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ $y_C=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$
Hình bình hành 	$A=ah$	Nằm ở giao điểm các đường chéo
Hình thang 	$A=\frac{(a+b)h}{2}$	$x_C=\frac{a}{2},$ $y_C=\frac{h}{3}\frac{a+2b}{a+b}$
Quạt tròn 	$A=\alpha r^2$	$x_C=\frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha},$ $y_C=0$
Hình viên phân 	$A=\frac{1}{2}r^2(2\alpha-\sin 2\alpha)$	$x_C=\frac{4}{3}r\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha},$ $y_C=0$
Hình Parabol 	$A=\frac{2}{3}ab$	$x_C=\frac{3}{5}a$ $y_C=\frac{3}{8}b$

Bảng 4.1

Chương 5

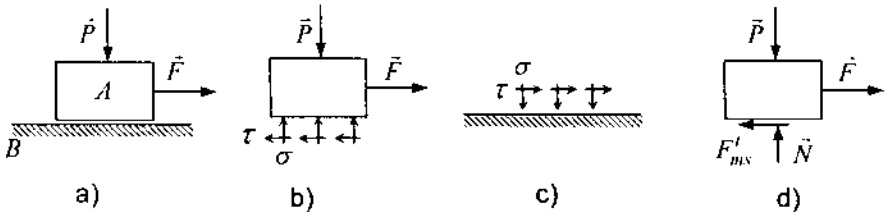
MA SÁT GIỮA CÁC VẬT RẮN

Ma sát giữa các vật rắn là một trong các bài toán phức tạp của cơ học. Xuất phát từ quan điểm kỹ thuật, có thể phân biệt hai hiện tượng ma sát khác nhau. Thứ nhất là hiện tượng ngăn cản sự bắt đầu chuyển động tương đối giữa hai vật thể mà nguyên nhân là sự tiếp xúc giữa chúng. Thứ hai là sự ngăn cản chuyển động tương đối giữa hai vật thể tiếp xúc nhau. Hiện tượng thứ nhất được gọi là ma sát tĩnh. Hiện tượng thứ hai được gọi là ma sát động. Hiện tượng dính – trượt xảy ra khi có sự thay đổi luân phiên giữa ma sát tĩnh và ma sát động. Bài toán ma sát là một trong những bài toán có ý nghĩa ứng dụng lớn. Trong chương này chỉ trình bày một số khái niệm và kết quả ứng dụng cơ bản về ma sát.

1. ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI MA SÁT

Ở các chương trước, khi xét liên kết tựa giữa hai vật rắn, người ta xem các vật tiếp xúc nhau tại một điểm còn các mặt tiếp xúc coi như là nhẵn tuyệt đối. Khi đó phản lực liên kết nằm theo phương pháp tuyến của mặt tựa. Thực ra sự tiếp xúc giữa hai vật thể xảy ra trên một diện tích nhỏ và các mặt tựa tiếp xúc nhau không nhẵn. Do đó, ngoài thành phần phản lực nằm theo phương pháp tuyến còn xuất hiện những thành phần phản lực và ngẫu lực khác.

Để dễ hình dung ta xét vật rắn A nằm trên mặt bàn B và chịu lực kéo $\vec{F}$ theo phương nằm ngang (hình 5.1a). Dưới tác dụng của các lực $\vec{F}$ và $\vec{P}$, tại vùng tiếp xúc giữa vật rắn A và mặt bàn B xuất hiện một hệ phản lực liên kết (các hình 5.1b và 5.1c). Thu gọn hệ phản lực liên kết về hai lực đặt tại một điểm như hình 5.1d.



Hình 5.1

Dưới tác dụng của lực $\vec{P}$ và $\vec{F}$ ta thấy: Khi $\vec{F}$ còn đủ nhỏ vật rắn A vẫn nằm ngang. Từ các phương trình cân bằng tĩnh học ta có

$$\sum F_{kx} = 0 : F_{ms}^{t} = F \ , \ \sum F_{ky} = 0 : N = P$$

Phản lực theo phương nằm ngang $\vec{F}_{ms}^{t}$ được gọi là lực ma sát trượt tĩnh (hoặc lực ma sát dính).

Định nghĩa. Ma sát giữa hai vật thể là hiện tượng xuất hiện các lực và ngẫu lực ở chỗ hai vật thể tiếp xúc nhau, chúng có tác dụng cản trở chuyển động hoặc xu hướng chuyển động tương đối của hai vật thể trên bề mặt của nhau.

Thông thường người ta phân loại ma sát như sau:

1) Ma sát tĩnh và ma sát động: Ma sát được gọi là tĩnh khi giữa hai vật thể mới chỉ xuất hiện xu hướng chuyển động tương đối nhưng chúng vẫn ở trạng thái cân bằng tương đối. Ma sát được gọi là ma sát động khi hai vật thể chuyển động tương đối với nhau.

2) Ma sát trượt và ma sát lăn: Nếu xu hướng chuyển động (hoặc chuyển động xảy ra) giữa hai vật là chuyển động trượt thì ma sát là ma sát trượt. Trường hợp xu hướng chuyển động (hoặc chuyển động xảy ra) là lăn ta có ma sát lăn.

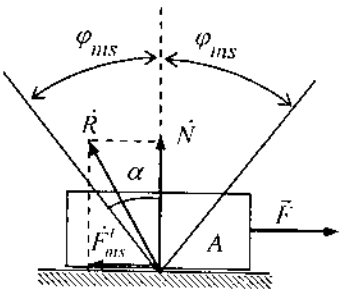
3) Ma sát khô (hay ma sát Coulomb) và ma sát nhớt: Ma sát được gọi là khô khi hai vật tiếp xúc trực tiếp với nhau và được gọi là nhớt khi chúng tiếp xúc với nhau có một lớp chất lỏng ở giữa.

Đến nay bài toán ma sát mới chỉ được giải quyết một cách gần đúng trên cơ sở các kết quả thực nghiệm. Dưới đây trình bày một số kết quả về ma sát trượt và ma sát lăn tĩnh và động.

2. MA SÁT TRƯỢT TĨNH VÀ MA SÁT TRƯỢT ĐỘNG

2.1. Định luật Coulomb về ma sát trượt tĩnh

Trước hết ta trình bày định luật ma sát trượt tĩnh (hay còn gọi là định luật ma sát dính). Trở lại hình 5.1 thấy rằng, khi độ lớn của lực $\vec{F}$ còn nhỏ hơn độ lớn của lực $\vec{F}_O$ (được gọi là lực tới hạn), thì vật rắn vẫn còn ở cân bằng, ta có $\vec{F}_{ms}^{t} = -\vec{F}$. Khi độ lớn của lực $\vec{F}$ bằng độ lớn của lực $\vec{F}_O$, vật rắn A bắt đầu chuyển động trượt. Qua nhiều thí nghiệm, nhà vật lý người Pháp Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) đã đi đến kết luận, là ở xấp xỉ thứ nhất, lực ma sát trượt tĩnh (hay lực ma sát dính) thoả mãn hệ thức



Hình 5.2

$$F_{ms}^{t} \le \mu_0 N \qquad (2.1)$$

Trong đó, N là độ lớn phản lực pháp tuyến, μ_0 được gọi là hệ số ma sát trượt tĩnh hay hệ số ma sát dính ($\mu_0 = F_0 / N$). Hệ số ma sát trượt tĩnh chỉ phụ thuộc vào tính chất của vật liệu và độ nhám của bề mặt tiếp xúc, không phụ thuộc vào diện tích của bề mặt tiếp xúc. Trong thí dụ này lực ma sát dính là một thành phần phản lực liên kết, không phụ thuộc vào áp lực $\vec{P}$.

Người ta có thể phát biểu định luật ma sát Coulomb (2.1) dưới dạng hình học. Gọi góc φ_{ms} xác định bởi công thức $tg\varphi_{ms} = \mu_0$ là góc ma sát (hình 5.2). Ký hiệu α là góc giữa lực $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{ms}^{t}$ và phương pháp tuyến. Từ hình 5.2 ta có

$$tg\alpha = \frac{F_{ms}^{t}}{N} \le tg\varphi_{ms} = \mu_0 \qquad (2.2)$$

Từ đó suy ra

$$\alpha \le \varphi_{ms}$$

Định luật. Điều kiện để vật rắn cân bằng là phản lực toàn phần của liên kết tựa có ma sát trượt nằm trong góc ma sát.

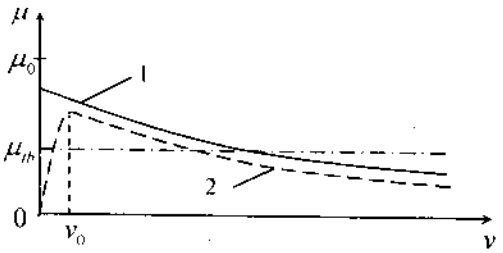
Chú ý: Lực ma sát trượt tĩnh là một dạng của phản lực liên kết. Tuy nhiên giữa các phản lực liên kết $\vec{N}$ và $\vec{F}_{ms}^{t}$ có sự khác nhau. $\vec{N}$ là phản lực liên kết sinh ra do liên kết hình học, còn $\vec{F}_{ms}^{t}$ là phản lực liên kết sinh ra do liên kết vật lý. Do đó $\vec{N}$ luôn thẳng góc với mặt B và hướng lên trên, còn hướng của $\vec{F}_{ms}^{t}$ phụ thuộc vào xu hướng chuyển động trượt của vật A trên mặt phẳng B.

2.2. Định luật Coulomb về ma sát trượt động

Khi hai vật rắn chuyển động tương đối với nhau, ở chỗ tiếp xúc xuất hiện lực ma sát trượt động. Qua nhiều thí nghiệm, người ta rút ra định luật Coulomb về ma sát trượt động

$$F_{ms}^{d} = \mu N . \qquad (2.3)$$

Trong đó, N là phản lực pháp tuyến, μ là hệ số ma sát trượt động. Hệ số ma sát trượt động μ, một cách gần đúng, không phụ thuộc vào diện tích bề mặt tiếp xúc, phụ thuộc vào tính chất của vật liệu và trạng thái bề mặt tiếp xúc.



Hình 5.3. Đồ thị hai loại đường đặc trưng ma sát trượt động

Hệ số ma sát trượt động còn phụ thuộc vào trị số vận tốc chuyển động tương đối của hai vật thể. Hình 5.3 trình bày hai dạng đồ thị điển hình về đường đặc trưng của hệ số ma sát trượt động. Theo đồ thị ta thấy khi v tăng thì μ giảm (đường 1) hoặc lúc đầu μ tăng, đến khi $v > v_0$ thì μ lại giảm (đường 2). Đó là nguyên nhân gây nên hiện tượng tự chấn trong máy hoặc gây nên tiếng rít khi viên phấn viết trên bảng.

Trong kỹ thuật, khi không cần chính xác lắm, ta thường sử dụng giá trị trung bình của hệ số ma sát trượt động μ_{tb}. Trong công thức (2.3) hệ số μ là viết tắt của μ_{tb}.

Cần chú ý đến sự khác nhau cơ bản giữa lực ma sát trượt tĩnh và lực ma sát trượt động. Lực ma sát trượt tĩnh là phản lực liên kết thụ động. Khi đã khẳng định vật rắn ở cân bằng lực này được xác định từ các phương trình cân bằng tĩnh học. Lực ma sát trượt động là lực chủ động. Ta bắt buộc phải cho biết hệ số ma sát trượt động μ.

2.3. Các thí dụ áp dụng

Khi giải các bài tập ma sát trượt người ta phân chia thành ba trạng thái như sau:

– Trạng thái dính: Vật khảo sát vẫn ở trạng thái cân bằng. Lực ma sát là lực liên kết và được xác định từ các điều kiện cân bằng tĩnh học. Ta có công thức

$$F_{ms}^{t} \le \mu_0 N .$$

– Trạng thái tới hạn: Vật khảo sát tuy vẫn còn ở trạng thái cân bằng, nhưng nếu nó bị kích động nhẹ, do $\mu < \mu_0$, nó sẽ bắt đầu chuyển động. Ta có công thức

$$\max(F_{ms}^{t}) = F_0 = \mu_0 N .$$

– Trạng thái trượt: Vật khảo sát trượt trên một vật thể khác. Lực ma sát trượt động bây giờ là lực hoạt động

$$F_{ms}^{d} = \mu N$$

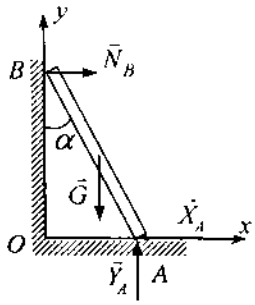
Thí dụ 5.1. Một thang đồng chất AB dài l, trọng lượng G tựa trên nền nằm ngang không nhẵn Ox và tường nhẵn thẳng đứng Oy. Giả thiết tường thẳng đứng nhẵn có thể bỏ qua ma sát dính. Hãy xác định lực ma sát dính tại đầu A, khi thang đứng yên.

Lời giải. Các lực tác dụng lên thang là $(\vec{G}, \vec{N}_B, \vec{X}_A, \vec{Y}_A) \equiv 0$. Trong đó $\vec{X}_A = \vec{F}^t_{ms}$. Các phương trình cân bằng có dạng

$$\sum F_{kx} = N_B - X_A = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - G = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = G\frac{l}{2}\sin\alpha - N_B l\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$



Hình 5.4

Giải các phương trình trên ta được:

$$Y_A = G\,,\ N_B = \frac{1}{2}G\,tg\alpha\,,\ \ X_A = \frac{1}{2}G\,tg\alpha$$

Thành phần phản lực nằm ngang $\vec{X}_A$ chính là lực ma sát dính tại đầu A. Vậy

$$F^t_{ms} = \frac{1}{2}G\,tg\alpha \qquad (4)$$

Thí dụ 5.2. Trong thí dụ 5.1 cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa nền nhà và đầu thang A là $\mu_0 = 0,4$, trọng lượng thang là $G = 800\ N$. Hãy xác định lực ma sát trượt tĩnh cực đại và các giá trị F^t_{ms} khi $\alpha = 30^0$ và khi $\alpha = 15^0$.

Lời giải. Từ công thức (4) thấy rằng khi góc α tăng lên, thì lực ma sát trượt tĩnh cũng tăng cho đến lực ma sát trượt tĩnh cực đại. Vậy ta có

$$\left(F^t_{ms}\right)_{\max} = \mu_0 Y_A = 0,4 \times 800 = 320\ \text{(N)}.$$

Khi $\alpha = 30^0$: $F^t_{ms} = 400 \times tg30^0 = 400N \times 0,577 = 231\,\text{(N)}$.

Khi $\alpha = 15^0$: $F^t_{ms} = 400 \times tg15^0 = 400N \times 0,218 = 107\,\text{(N)}$.

Do $F^t_{ms} \le \mu_0 Y_A$ nên ta có công thức

$$\frac{1}{2}G\,tg\alpha \le \mu_0 G \Rightarrow tg\alpha \le 2\mu_0 = 0,8$$

vậy $\qquad \alpha_{\max} = 38,6^0$

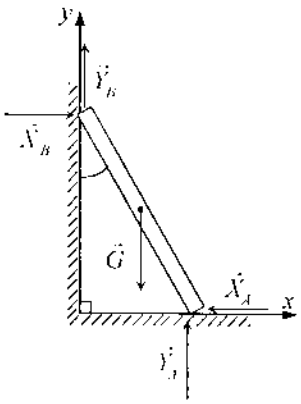
Qua hai thí dụ trên thấy rằng:

– Lực ma sát trượt tĩnh là một dạng *phản lực liên kết* được xác định từ hệ các phương trình cân bằng tĩnh học.

– Khi có ma sát, ta có một *miền cân bằng*, thang vẫn còn ở trạng thái cân bằng khi góc $\alpha \le 38,6^0$.

– Định luật ma sát dính cho phép xác định điều kiện cân bằng của vật rắn trên mặt tựa có ma sát.

Thí dụ 5.3. Một thang đồng chất AB dài là l, trọng lượng G tựa trên nền nằm ngang và tường không nhẵn, hệ số ma sát trượt tĩnh là μ_0. Xác định góc nghiêng α của thang với tường để thang đứng yên.



Hình 5.5

Lời giải. Các lực tác dụng lên thang là $\vec{G}, \vec{X}_A = \vec{F}'_{Amax}, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B = \vec{F}'_{Bmax}$. Ở đây ngoài 4 ẩn $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$, còn có ẩn thứ 5 là góc α. Ta có 5 ẩn nhưng chỉ có 3 phương trình cân bằng tĩnh học. Đây là hệ số ma sát bài toán siêu tĩnh. Để đơn giản ta giải bài toán này ở trạng thái giới hạn.

Các phương trình cân bằng tĩnh học là

$$\sum F_{kx} = -X_A + X_B = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B - G = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overline{m}_A(\vec{F}_k) = \frac{1}{2}Gl\sin\alpha^* - Y_B l\sin\alpha^* - X_B l\cos\alpha^* = 0 \qquad (3)$$

Ngoài ra ở trạng thái giới hạn ta có hai điều kiện dính là

$$X_A = \mu_0 Y_A, \quad Y_B = \mu_0 X_B \qquad (4)$$

Từ các phương trình trên giải ra được

$$Y_A = \frac{G}{1+\mu_0^2}, \quad X_B = \frac{\mu_0 G}{1+\mu_0^2}, \ \mathrm{tg}\,\alpha^* = \frac{2\mu_0}{1-\mu_0^2}$$

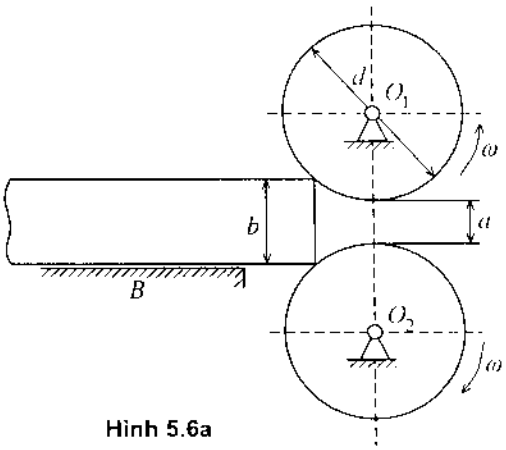
Nếu thay $\mu_0 = \mathrm{tg}\,\varphi$ (trong đó φ là góc ma sát) suy ra

$$\mathrm{tg}\,\alpha^* = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi} = \mathrm{tg}\,2\varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = 2\varphi.$$

Kinh nghiệm cho thấy khi góc α nhỏ thì thang dễ cân bằng. Vậy điều kiện cân bằng của thang là $\alpha \le 2\varphi$.

Thí dụ 5.4. Một máy cán kim loại gồm hai trục cán O_1 và O_2 quay ngược chiều nhau. Cho biết đường kính mỗi trục cán là d, khoảng cách giữa 2 trục cán

là a, hệ số ma sát trượt động là $\mu = \text{tg}\varphi$. Tìm bề dày lớn nhất b của những tấm kim loại mà máy có thể cán được (hình 5.6). Cho biết $d = 50cm$, $a = 0,5cm$, $\mu = 0,1$.



Hình 5.6a

Lời giải. Các lực tác dụng lên tấm thép là

$$(\vec{P}, \vec{N}_B, \vec{N}, \mu\vec{N}, \vec{N}, \mu\vec{N})$$

Xét bài toán ở trạng thái tới hạn. Ta có phương trình cân bằng

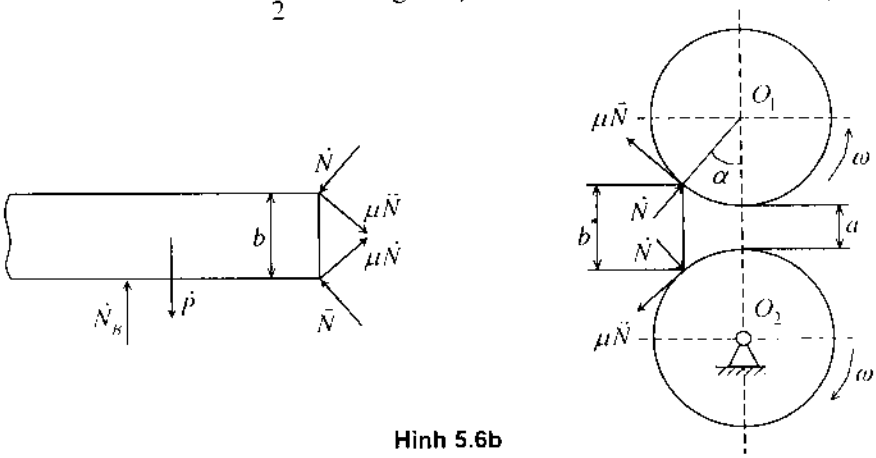
$$\sum F_{kx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu N\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\alpha = \frac{\mu N}{N} = \mu \qquad (1)$$

Từ hình vẽ suy ra

$$b = a + 2\frac{d}{2}(1 - \cos\alpha) \qquad (2)$$

Do góc α nhỏ nên có thể bỏ qua các xấp xỉ bậc cao khi khai triển $\cos\alpha$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha \approx \text{tg}\alpha = \mu \qquad (3)$$



Hình 5.6b

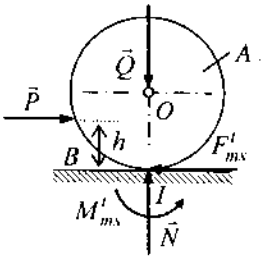
Thế (3) vào (2) suy ra bề dày tấm thép có thể cán được là

$$b = a + d\left(1 - 1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) = a + d\frac{\alpha^2}{2} = a + d\frac{\mu^2}{2} \qquad (4)$$

Thay số vào (4) ta được $b \le 0,5 + \dfrac{50}{200} = 0,75cm$.

3. MA SÁT LĂN

Xét mô hình một hình trụ A tiếp xúc với một mặt phẳng B theo đường sinh của nó. Hình 5.7 là mặt cắt của mô hình này trên một mặt phẳng vuông góc với trục của hình trụ A. Trước hết ta đặt lên hình trụ một lực $\vec{Q}$ đi qua trục của nó và có phương vuông góc với mặt phẳng B. Dưới tác dụng của lực $\vec{Q}$ sẽ xuất hiện một phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ từ B tác dụng vào A. Ta có:



Hình 5.7

$$\vec{N} = -\vec{Q}$$

Bây giờ đặt tiếp lên vật A một lực $\vec{P}$ song song với mặt phẳng B và cách mặt phẳng B một đoạn là h. Khi $\vec{P}$ còn đủ nhỏ, vật rắn A ở cân bằng. Do vật rắn A ở cân bằng nên tại điểm tiếp xúc B phải có phản lực $\vec{F}^t_{ms}$ và một ngẫu lực, ký hiệu là M^t_{ms}, tác dụng lên vật rắn A để cân bằng với tác dụng của lực $\vec{P}$. Từ các phương trình cân bằng tĩnh học dễ dàng xác định được

$$F^t_{ms} = P, \quad M^t_{ms} = Ph$$

Khi tăng độ lớn của lực $\vec{P}$ lên đến một giá trị nào đó, thì trụ A bắt đầu lăn nhưng không trượt. Nếu tăng lực $\vec{P}$ lên nữa, thì trục A sẽ vừa lăn vừa trượt. Qua thực nghiệm xác định được công thức ma sát lăn tĩnh

$$M^t_{ms} \le k_0 N \tag{3.1}$$

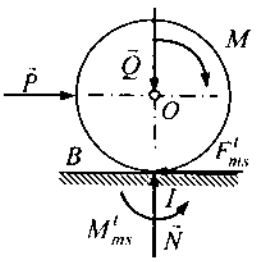
Trong đó k_0 được gọi là hệ số ma sát lăn tĩnh.

Khi trụ A đã lăn thì ngẫu lực ma sát lăn được gọi là ngẫu lực ma sát lăn động và xác định được công thức thực nghiệm

$$M^d_{ms} = kN \tag{3.2}$$

Trong đó k được gọi là hệ số ma sát lăn động. Thông thường $k_0 > k$.

Thí dụ 5.5. Một bánh xe tròn bán kính r, chịu tác dụng của các lực $\vec{Q}$, $\vec{P}$ và ngẫu lực có mômen M như hình 5.8. Tìm điều kiện để bánh xe cân bằng. Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh là μ_0, hệ số ma sát lăn tĩnh là k_0.



Hình 5.8

Lời giải. Từ các phương trình cân bằng tĩnh học ta có

$$\sum F_{kx} = 0: \; P - F_{ms}^{t} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0: \; N - Q = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_I(\vec{F}_k) = 0: \; -M - \Pr + M_{ms}^{t} = 0 \qquad (3)$$

Từ các phương trình (1), (2), (3) suy ra

$$N = Q, \; F_{ms}^{t} = P, \; M_{ms}^{t} = M + \Pr \qquad (4)$$

Các điều kiện để bánh xe không trượt và không lăn là

$$F_{ms}^{t} \le \mu_0 N, \; M_{ms}^{t} \le k_0 N \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra: Điều kiện để cho bánh xe cân bằng là lực $\vec{P}$ và ngẫu lực M phải thoả mãn các điều kiện sau

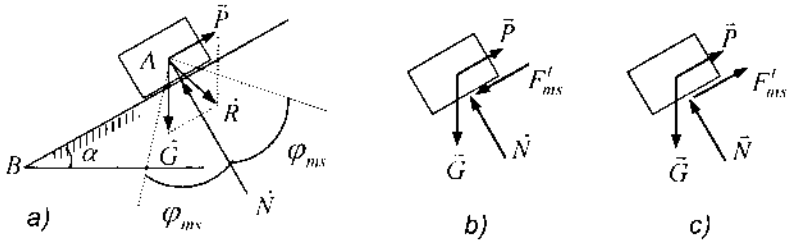
$$P \le \mu_0 Q, \; M \le k_0 Q - \Pr \qquad (6)$$

4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ÁP DỤNG CỦA MA SÁT TRONG MÁY

Các bài toán ma sát là các bài toán hay và có ý nghĩa trong kỹ thuật. Tuy nhiên, trong phạm vi giáo trình cơ học kỹ thuật, giới hạn chỉ trình bày một vài bài toán áp dụng quan trọng.

4.1. Ma sát dính trên mặt phẳng nghiêng, hiện tượng tự hãm

Bài toán. Xét một vật rắn A trọng lượng $\vec{G}$ nằm trên mặt phẳng nhám B, nghiêng với phương ngang một góc α. Cho biết hệ số ma sát dính (ma sát trượt tĩnh) giữa vật rắn A và mặt phẳng nghiêng là μ_0. Tác dụng vào vật rắn A một lực $\vec{P}$ như hình 5.9a. Tìm khoảng xác định độ lớn của lực $\vec{P}$ để cho vật A nằm cân bằng trên mặt phẳng nghiêng B.



Hình 5.9

Lời giải. Khi lực $\vec{P}$ đủ lớn *(Trường hợp 1)*, vật rắn A có xu hướng trượt lên trên. Lực ma sát trượt tĩnh trong trường hợp này hướng xuống dưới (hình 5.9b)

Các phương trình cân bằng tĩnh học có dạng

$$\sum F_{kx} = P - G\sin\alpha - F_{ms}^{t} = 0 \Rightarrow F_{ms}^{t} = P - G\sin\alpha \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = N - G\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = G\cos\alpha \qquad (2)$$

Điều kiện để vật A không trượt là

$$F_{ms}^{t} \le \mu_0 N \qquad (3)$$

Thế (1) và (2) vào (3) ta được

$$P - G\sin\alpha \le \mu_0 G\cos\alpha$$

Từ đó suy ra

$$P \le G(\mu_0\cos\alpha + \sin\alpha) \qquad (4)$$

Nếu sử dụng khái niệm góc ma sát $\mu_0 = tg\varphi_{ms}$, từ (4) suy ra

$$P \le G(\sin\alpha + tg\varphi_{ms}\cos\alpha) = \frac{G\sin(\alpha + \varphi_{ms})}{\cos\varphi_{ms}} \qquad (5)$$

Khi lực $\vec{P}$ đủ nhỏ *(Trường hợp 2)*, vật rắn A có xu hướng trượt xuống. Lực ma sát trượt tĩnh hướng lên phía trên như hình 5.9c. Trong trường hợp này ta có các phương trình cân bằng

$$\sum F_{kx} = P - G\sin\alpha + F_{ms}^{t} = 0 \Rightarrow F_{ms}^{t} = G\sin\alpha - P \qquad (6)$$

$$\sum F_{ky} = N - G\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = G\cos\alpha \qquad (7)$$

Thế (6) và (7) vào điều kiện (3) suy ra

$$G\sin\alpha - P \le \mu_0 G\cos\alpha \qquad (8)$$

Nếu sử dụng khái niệm góc ma sát $\mu_0 = tg\varphi_{ms}$, từ (8) ta có

$$P \ge G(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha) = \frac{G\sin(\alpha - \varphi_{ms})}{\cos\varphi_{ms}} \qquad (9)$$

Kết hợp các bất phương trình (5) và (9) tìm được miền xác định của lực $\vec{P}$ để cho vật rắn A nằm yên trên mặt phẳng nghiêng B

$$\frac{G\sin(\alpha - \varphi_{ms})}{\cos\varphi_{ms}} \le P \le \frac{G\sin(\alpha + \varphi_{ms})}{\cos\varphi_{ms}} \qquad (10)$$

Để tính toán bằng số, chọn $\mu_0 = 0{,}15$ (hệ số ma sát trượt tĩnh giữa thép và thép). Khi đó $\varphi_{ms} = arctg\,0{,}15 = 0{,}149$ rad.

Nếu chọn góc nghiêng $\alpha = 10^0 \approx 0{,}175$ rad, thì từ (10) suy ra

$$\frac{G\sin(0{,}175 - 0{,}149)}{\cos 0{,}149} \le P \le \frac{G\sin(0{,}175 + 0{,}149)}{\cos 0{,}149}$$

Tính toán bằng số ta được

$$0,026G \le P \le 0,32G$$

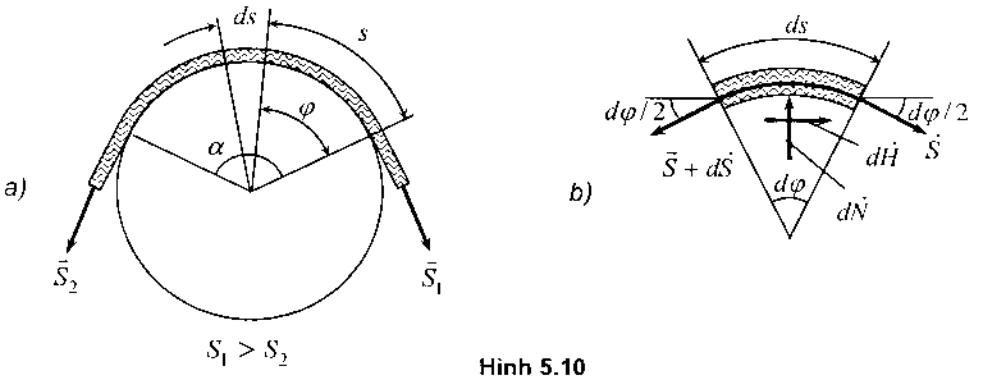
Trong thí dụ bằng số này thấy rằng, khi $\alpha = 10^0 \approx 0,175$ rad nếu P lấy giá trị giữa 3% và 30% của trọng lượng G của vật rắn A thì nó nằm yên trên mặt phẳng nghiêng B.

Hiện tượng tự hãm. Xét trường hợp lực $P = 0$. Nếu chọn $\alpha < \varphi_{ms}$, thì từ hình vẽ 5.9a ta thấy lực $\vec{G}$ (dù rất lớn) vẫn nằm trong góc ma sát. Do đó, vật nặng A vẫn đứng yên. Như thế góc nghiêng α là biện pháp giữ cho vật nặng A đứng yên. Hiện tượng dưới tác dụng của trọng lượng $\vec{G}$ (dù là rất lớn) vật nặng A vẫn đứng yên trên mặt phẳng nghiêng như trên được gọi là hiện tượng tự hãm. Hiện tượng tự hãm được sử dụng nhiều trong kỹ thuật.

4.2. Ma sát trượt tĩnh và ma sát trượt động của dây

Bài toán. Xét mô hình trên hình vẽ 5.10a. Mô hình gồm một trụ tròn cố định (thường hay gọi là puli). Trên trụ tròn có mắc một dây đai dẹt mềm tiếp xúc với vành trụ tròn trên một cung ứng với góc α ở tâm, được gọi là góc ôm. Tại đầu dây bên trái ta đặt lực $\vec{S}_2$, còn ở đầu dây bên phải ta đặt lực $\vec{S}_1$. Giả sử $S_2 > S_1$. Tìm quan hệ giữa lực căng ở hai đầu dây. Cho biết hệ số ma sát dính là μ_o.

Lời giải. Xét một cung nhỏ của ứng với góc $d\varphi$ như hình 5.10b. Các phương trình cân bằng lực của phân tố dây này có dạng



Hình 5.10

$$\sum F_{kx} = 0:\ dH - (S + dS)\cos\frac{d\varphi}{2} + S\cos\frac{d\varphi}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0:\ dN - (S + dS)\sin\frac{d\varphi}{2} - S\sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \qquad (2)$$

Từ các phương trình (1) và (2) suy ra

$$dH = dS\cos\frac{d\varphi}{2}, \qquad dN \approx 2S\sin\frac{d\varphi}{2}. \tag{3}$$

Do góc $\frac{d\varphi}{2}$ nhỏ, ta có xấp xỉ $\cos\frac{d\varphi}{2} \approx 1$, $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$. (4)

Thay (4) vào (3) suy ra

$$dN \approx Sd\varphi\,;\ dH \approx dS\,. \tag{5}$$

Chú ý đến các định luật Coulomb về ma sát trượt tĩnh, ta có

$dH < \mu_0 dN$ (khi dính), $dH = \mu_0 dN$ (trường hợp giới hạn).

Xét trường hợp tới hạn $dH = \mu_0 dN$. Chú ý đến (5) suy ra

$$dH = \mu_0 Sd\varphi = dS \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mu_0 d\varphi$$

Cho góc φ biến thiên từ 0 đến α, chú ý rằng S dương, ta có:

$$\int_{S_1}^{S_2}\frac{dS}{S} = \mu_0\int_0^{\alpha}d\varphi \Rightarrow \ln\frac{S_2}{S_1} = \mu_0\alpha \Rightarrow S_2 = S_1e^{\mu_0\alpha}. \tag{4.1}$$

Công thức (6) đúng khi $S_2 > S_1$.

Nếu $S_2 < S_1$ sự phân bố lực ma sát trên dây đai sẽ có hướng ngược lại. Tính toán tương tự suy ra

$$S_1 = S_2e^{\mu_0\alpha} \ hay\ S_2 = S_1e^{-\mu_0\alpha} \tag{4.2}$$

Kết hợp (4.1) và (4.2) ta được hệ thức

$$S_1e^{-\mu_0\alpha} \le S_2 \le S_1e^{\mu_0\alpha} \tag{4.3}$$

Khi $S_2 < S_1e^{-\mu_0\alpha}$ dây trượt về bên phải, khi $S_2 > S_1e^{\mu_0\alpha}$ dây trượt về bên trái.

Thí dụ 5.6. Tác dụng một ngẫu lực M lên trục hình trụ. Hình trụ được giữ ở trạng thái cân bằng nhờ hệ thống dây và đòn như hình 5.11a. Cho biết hệ số ma sát dính là μ_0. Hãy xác định độ lớn nhỏ nhất của lực F để trục ở cân bằng.

Lời giải. Ta tưởng tượng cắt đôi dây và đặt lực như hình 5.11b. Phương trình cân bằng mômen đối với điểm A của các lực tác dụng lên đòn

$$lF - 2rS_1 = 0 \Rightarrow S_1 = \frac{l}{2r}F \tag{1}$$

Phương trình cân bằng mômen đối với điểm B của các lực tác dụng lên trụ

$$M_d + (S_1 - S_2)r = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 - \frac{M_d}{r} \tag{2}$$

Do mômen M_d quay về bên trái, nên từ điều kiện cân bằng trên ta suy ra $S_2 > S_1$. Trong thí dụ này góc ôm $\alpha = \pi$ nên từ công thức (4.1) suy ra

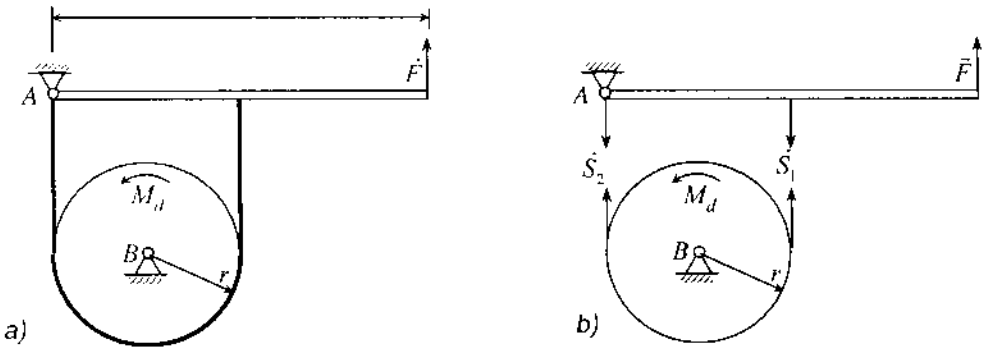
$$S_2 = S_1 e^{\mu_0 \pi} \tag{3}$$

Thế (3) vào (2) ta được

$$S_1 = S_1 e^{\mu_0 \pi} - \frac{M_d}{r} \Rightarrow S_1 = \frac{M_d}{r(e^{\mu_0 \pi} - 1)} \tag{4}$$

Từ (1) suy ra công thức xác định lực F tối thiểu

$$F = \frac{2r}{l} S_1 = 2\frac{M_d}{l}\frac{1}{e^{\mu_0 \pi} - 1} \tag{5}$$



Hình 5.11

PHẦN 2. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

MỞ ĐẦU

Động học vật rắn là phần thứ hai của giáo trình *Cơ học kỹ thuật*. Trong đó, chúng ta nghiên cứu chuyển động cơ học của các vật thể về mặt hình học, không quan tâm đến nguyên nhân gây ra chuyển động cũng như nguyên nhân gây nên sự biến đổi chuyển động của chúng.

Hai mô hình của vật thể là điểm và vật rắn được nghiên cứu trong phần này. Tuy nhiên mô hình vật rắn là mô hình chủ đạo của giáo trình *Cơ học kỹ thuật*. Như trong phần tĩnh học vật rắn đã trình bày, vật rắn là tập hợp nhiều điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó luôn luôn không đổi. Chú ý rằng, nếu các kích thước nội tại của vật thể có thể bỏ qua khi khảo sát chuyển động của nó, thì có thể sử dụng mô hình điểm để nghiên cứu chuyển động của vật thể. Một vật thể, mà mô hình cơ học của nó là một điểm chuyển động, được gọi là vật điểm.

Chuyển động của các vật thể xảy ra trong không gian và thời gian. Không gian và thời gian là hai dạng tồn tại của vật chất cho nên nói chung chúng phụ thuộc vào lượng vật chất và chuyển động của vật thể. Trong Cơ học kỹ thuật cũng như trong Cơ học cổ điển, để đơn giản chúng ta xem không gian và thời gian không phụ thuộc vào chuyển động của các vật khảo sát và gọi là không gian tuyệt đối, thời gian tuyệt đối. Không gian tuyệt đối được quan niệm là không gian Euclid ba chiều, không phụ thuộc vào thời gian và các vật thể chuyển động trong nó. Thời gian tuyệt đối được quan niệm là thời gian trôi đều từ quá khứ qua hiện tại đến tương lai, không phụ thuộc vào hệ quy chiếu khảo sát chuyển động cũng như không phụ thuộc vào chuyển động của các vật thể.

Chuyển động xảy ra trong không gian, nhưng hoàn toàn có tính chất tương đối, phụ thuộc vào vật lấy làm mốc để theo dõi chuyển động. Thí dụ, một chiếc ô tô đang chạy đối với một gốc cây nào đó đứng bên đường nhưng đứng yên với người ngồi trong ô tô đó. Như vậy, muốn mô tả chuyển động

của vật thể, ta phải chỉ rõ vật lấy làm mốc đã chọn. Vật lấy làm mốc để theo dõi vị trí của vật thể chuyển động được gọi là hệ quy chiếu. Việc chọn hệ quy chiếu hoàn toàn tuỳ ý, nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho việc khảo sát chuyển động của đối tượng. Để thuận tiện cho việc tính toán có khi người ta gắn vào hệ quy chiếu một hệ toạ độ. Nhiều khi, để cho đỡ cồng kềnh, người ta dùng ngay hệ toạ độ đó thay cho hệ quy chiếu đã chọn.

Để tính thời gian trong quá trình chuyển động, chọn một thời điểm tuỳ ý làm thời điểm gốc. Thông thường, người ta lấy thời điểm lúc bắt đầu khảo sát chuyển động của vật thể làm thời điểm gốc và ký hiệu là $t_0 = 0$. Những thời điểm sau sẽ được ký hiệu là t_1, t_2,... Đó là những khoảng thời gian tính từ thời điểm gốc đến thời điểm đang xét.

Khảo sát động học chuyển động của điểm hoặc vật rắn trước hết là tìm cách xác định các đại lượng động học đặc trưng của chúng. Hai đặc trưng cơ bản của động học điểm là vận tốc và gia tốc. Còn đối với vật rắn, hai đại lượng động học đặc trưng cơ bản là vật tốc góc, gia tốc góc.

Trong phần này, về mặt lý thuyết, chỉ khảo sát động học điểm và động học vật rắn. Tuy nhiên, trong các bài toán áp dụng chúng ta phải tính toán động học của hệ gồm nhiều vật rắn có các liên kết hình học (liên kết bản lề, liên kết tựa, liên kết dây mềm không dãn, v.v...). Để xác định chuyển động của chúng, đưa vào khái niệm toạ độ suy rộng và khái niệm số bậc tự do. Các thông số định vị của vật rắn hoặc hệ các vật rắn trong một hệ quy chiếu xác định được gọi là các toạ độ suy rộng của chúng. Ký hiệu các toạ độ suy rộng là q_1,... q_n. Thông thường các toạ độ suy rộng là các độ dài, góc quay. Tuy nhiên, theo định nghĩa thì bản chất vật lý của toạ độ suy rộng là tuỳ ý. Số bậc tự do của vật rắn hoặc của hệ các vật rắn chịu các liên kết hình học là số thông số độc lập đủ để xác định vị trí của chúng đối với một hệ quy chiếu xác định. Trong phần động lực học, chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa tổng quát hơn về khái niệm quan trọng này.

Chương 1

ĐỘNG HỌC ĐIỂM

Trong chương này chúng ta khảo sát chuyển động của vật thể dưới dạng mô hình vật điểm (hay cũng gọi là điểm) đối với một hệ quy chiếu đã chọn trước. Vận tốc của điểm và gia tốc của điểm là hai đại lượng đặc trưng cơ bản cho động học điểm. Trong một số trường hợp để xác định hai đại lượng này người ta cần phải biết phương trình chuyển động của điểm. Tuy nhiên, trong thực tế nhiều khi lại biết gia tốc của điểm trước. Từ đó cần phải tìm vận tốc, phương trình chuyển động của điểm.

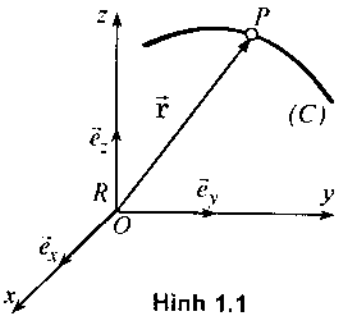
1. HAI ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CƠ BẢN CỦA ĐỘNG HỌC ĐIỂM

Vận tốc của điểm (velocity of the particle) và gia tốc của điểm (acceleration of the particle) là hai đại lượng đặc trưng cơ bản cho động học điểm. Dựa trên khái niệm véc tơ xác định vị trí của điểm chuyển động, chúng ta đưa ra định nghĩa chính xác về hai đại lượng đặc trưng này. Tuy nhiên, trong các bài toán kỹ thuật, không nhất thiết phải biết véc tơ định vị vẫn có nhiều cách xác định vận tốc và gia tốc của điểm.

1.1. Phương trình chuyển động và quỹ đạo chuyển động của điểm

a) Phương trình chuyển động. Mô hình chuyển động của điểm P đối với một hệ quy chiếu R cho trên hình 1.1. Vị trí của điểm P được xác định bởi véc tơ định vị $\vec{r} = \vec{OP}$. Do điểm P di chuyển, nên $\vec{r}$ thay đổi theo thời gian

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.1)$$



Hình 1.1

Trong hệ toạ độ Descartes* ký hiệu $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ là các véc tơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và x, y, z là toạ độ của điểm P, từ phương trình (1.1) suy ra

* René Descartes sinh năm 1596 ở Lahaye (Pháp), mất năm 1650 ở Stockholm (Thụy Điển). Khi ở Thụy Điển ông lấy bút danh là Renatus Cartesius nên hệ toạ độ Descartes còn được gọi là hệ toạ độ Cartesius.

$$\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \tag{1.2}$$

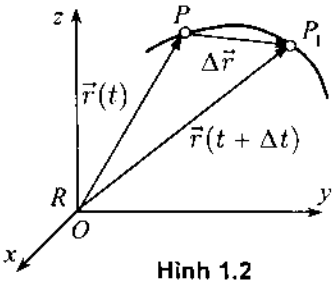
Phương trình (1.1) hoặc (1.2) được gọi là phương trình chuyển động của điểm P.

b) Quỹ đạo chuyển động. Tập hợp các vị trí của điểm P ở trong không gian được gọi là quỹ đạo chuyển động của điểm P. Nếu quỹ đạo chuyển động của điểm P là một đường thẳng, thì chuyển động được gọi là chuyển động thẳng. Nếu quỹ đạo chuyển động là đường cong, thì chuyển động được gọi là chuyển động cong.

1.2. Vận tốc của điểm

a) Định nghĩa. Vận tốc của điểm là đạo hàm theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R={Oxyz} của véc tơ định vị $\vec{r}$ của nó.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{{}^R d\vec{r}}{dt} \tag{1.3}$$



Hình 1.2

b) Biểu thức tính. Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc chú ý đến công thức (1.2), biểu thức (1.3) có dạng

$$\vec{v} = \frac{{}^R d}{dt}\left[x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + x(t)\vec{e}_z\right]$$

hay
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \tag{1.4}$$

Từ đó suy ra

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{1.5}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{1.6}$$

Theo ý nghĩa của đạo hàm, vận tốc $\vec{v}$ của điểm P nằm trên tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm P và hướng về phía chuyển động.

1.3. Gia tốc của điểm

a) Định nghĩa. Gia tốc của điểm P là đạo hàm theo thời gian véctơ vận tốc của nó ở trong hệ quy chiếu R

$$\vec{a} = \frac{{}^R d\vec{v}}{dt} = \frac{{}^R d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.7}$$

b) Biểu thức tính. Trong hệ tọa độ Descartes, thế biểu thức (1.4) vào (1.7) ta được

$$\vec{a} = \frac{{}^{R}d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right] = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z \qquad (1.8)$$

Từ đó suy ra

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \qquad (1.9)$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (1.10)$$

1.4. Nhận xét

Khi điểm P chuyển động trên đường thẳng véctơ vận tốc $\vec{v}$ và véctơ gia tốc $\vec{a}$ của nó luôn cùng phương dọc theo đường thẳng. Khi điểm P chuyển động trên đường cong, véctơ vận tốc $\vec{v}$ nói chung thay đổi cả về hướng và về trị số. Do đó các véctơ $\vec{v}$ và $\vec{a}$ nói chung không cùng phương. Từ đó ta có tiêu chuẩn nhận xét:

$\vec{v} \times \vec{a} \equiv 0$: chuyển động thẳng,

$\vec{v} \times \vec{a} \neq 0$: chuyển động cong.

2. CHUYỂN ĐỘNG THẲNG CỦA ĐIỂM

Chuyển động thẳng của điểm là chuyển động mà quỹ đạo chuyển động của nó là một đường thẳng.

2.1. Phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc của điểm

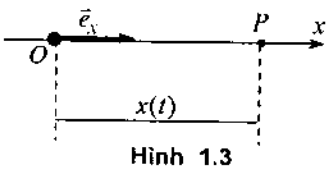
Vị trí tức thời của điểm P được xác định bởi véctơ định vị $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x$ (hình 1.3). Trong đó $\vec{e}_x$ là véctơ đơn vị trên trục Ox. Từ hình vẽ 1.3 dễ dàng xác định được

Phương trình chuyển của điểm P:

$$x = x(t) \qquad (2.1)$$

Vận tốc điểm P:

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \qquad (2.2)$$



Hình 1.3

Gia tốc điểm P:

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Trong kỹ thuật, nhiều khi chỉ biết gia tốc hoặc vận tốc của điểm P chuyển động thẳng. Khi đó cần phải giải bài toán ngược

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \tag{2.4}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt \tag{2.5}$$

Trong đó $v_0 = v(t_0), x_0 = x(t_0)$.

2.2. Chuyển động thẳng đều và chuyển động thẳng biến đổi đều

a) Chuyển động thẳng đều. Chuyển động thẳng của điểm mà vận tốc của nó có trị số không đổi được gọi là chuyển động thẳng đều. Do $v = v_0 = const$, suy ra

$$a = \dot{v} = 0$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt = x_0 + v_0(t - t_0) \tag{2.6}$$

b) Chuyển động thẳng biến đổi đều. Chuyển động thẳng của điểm mà gia tốc của nó có trị số không đổi được gọi là chuyển động thẳng biến đổi đều. Do $a = a_0 = const$, suy ra

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_0 dt = v_0 + a_0(t - t_0) \tag{2.7}$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \tag{2.8}$$

Nếu tại thời điểm đầu $t_0 = 0$ ta có $x_0 = 0$ và $v_0 = 0$, thì từ các phương trình (2.7) và (2.8) suy ra

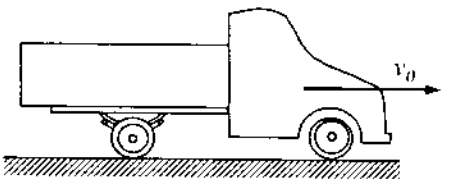
$$\left.\begin{aligned} v &= a_0 t \\ x &= \frac{1}{2}a_0 t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{2a_0 x} \tag{2.9}$$

2.3. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 1.1. Một ôtô đang chạy trên đoạn đường thẳng ở thời điểm $t_0 = 0$ có vận tốc $v_0 = 40$ m/s. Ở thời điểm đó, ôtô chạy với gia tốc giảm dần tuyến

tính từ giá trị ban đầu a_0 = 5 m/s cho đến khi a = 0 trong thời gian 6 s. Tiếp đó ôtô chuyển động đều trên đoạn đường s_2 = 550 m. Sau đó do hãm phanh ôtô chuyển động chậm dần với gia tốc a_3 = 11 m/s^2 cho đến khi dừng hẳn. Hãy xác định khoảng thời gian ôtô chạy trên đường và quãng đường đi được.

Lời giải. Chuyển động của ôtô được phân thành ba giai đoạn. Giai đoạn một, ôtô chuyển động có gia tốc dương ($0 \le t_1 \le t_1^*$) giai đoạn hai ôtô chuyển động đều ($0 \le t_2 \le t_2^*$), giai đoạn ba ôtô bị hãm phanh, chuyển động chậm dần đều ($0 \le t_3 \le t_3^*$).



Hình 1.4

* *Giai đoạn 1:* ôtô chuyển động có gia tốc dương ($0 \le t_1 \le t_1^*$). Trong giai đoạn này gia tốc có dạng

$$a_1(t) = a_0(1 - \frac{t_1}{t_1^*}) \qquad \text{với } t_1^* = 6(s)$$

Chú ý đến các điều kiện đầu $x_1(t_1 = 0) = 0$, $v_1(t_1 = 0) = v_0$, từ các công thức (2.4), (2.5) ta có

$$v_1 = v_0 + \int_0^{t_1} a_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_1^*}\right) d\tau = v_0 + a_0 \left(t_1 - \frac{t_1^2}{2t_1^*}\right)$$

$$x_1 = \int_0^{t_1} v_1 d\tau = v_0 t_1 + a_0 \left(\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_1^3}{6t_1^*}\right)$$

Từ đó dễ dàng xác định được vận tốc và quãng đường đi được ở cuối giai đoạn một ($t_1 = t_1^* = 6s$)

$$v_1^* = v_0 + v_0 + a_0 \frac{t_1^*}{2} = 40 + 5.3 = 55\, m/s,$$

$$x_1^* = v_0 t_1^* + a_0 \frac{t_1^{*2}}{2} = 40.6 + 5.\frac{6^2}{3} = 300\, m$$

* *Giai đoạn 2:* ôtô chuyển động đều ($0 \le t_2 \le t_2^*$). Trong giai đoạn này ôtô chuyển động đều với vận tốc $v_2 = v_1^* = 55\ m/s$. Thời gian ôtô chuyển động trong giai đoạn này là

$$t_2^* = \frac{s_2}{v_2} = \frac{550}{55} = 10\ s$$

Theo công thức (2.6) phương trình chuyển động của ôtô có dạng

$$x_2 = x_1^* + v_2 t_2$$

Vậy quãng đường ôtô đi được trong hai giai đoạn là

$$x_2^* = x_1^* + v_2 t_2^* = 300 + 55.10 = 850 \ m$$

* *Giai đoạn 3:* ôtô chuyển động chậm dần đều ($0 \le t_3 \le t_3^*$). Các giá trị đầu của giai đoạn ba chính là các giá trị cuối của giai đoạn hai. Theo công thức (2.7), (2.8) ta có

$$v_3 = v_2^* - a_3 t_3$$

$$x_3 = x_2^* + v_2^* t_3 - a_3 \frac{t_3^2}{2}$$

Thời gian chuyển động của ôtô trong giai đoạn 3 là

$$v_3^* = v_2^* - a_3 t_3^* = 0 \Rightarrow t_3^* = \frac{v_2^*}{a_3} = \frac{55}{11} = 5 \ s$$

Thời gian tổng cộng ôtô chuyển động cho đến khi dừng

$$t^* = t_1^* + t_2^* + t_3^* = 6 + 10 + 5 = 21 \ s$$

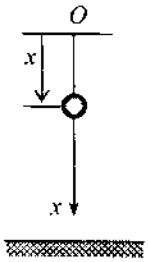
Quãng đường ôtô đi được

$$s = x_3^* = x_2^* + v_3^* t_3^* - a_3 \frac{t_3^{*2}}{2} = 850 + 55.5 - 11.\frac{5^2}{2} = 987,5 \ m$$

Thí dụ 1.2. Một chất điểm rơi tự do từ độ cao h =100 m với gia tốc trọng trường g = 9,81 m/s^2. Bỏ qua sức cản của không khí.

– Xác định quy luật chuyển động, vận tốc của chất điểm khi chạm đất và thời gian rơi.

– Vẽ đồ thị của gia tốc, vận tốc và quy luật chuyển động của chất điểm.



Hình 1.5

Lời giải. Chọn vị trí bắt đầu rơi làm gốc toạ độ. Dễ dàng xác định được các điều kiện đầu

$$t_0 = 0, \ x_0 = x(0) = 0, v_0 = v(0) = 0.$$

Chuyển động rơi tự do có gia tốc $a = g = const$ (chuyển động nhanh dần đều). Theo (2.7), (2.8) suy ra

$$v = gt, \quad x = \frac{1}{2} g t^2$$

Quan hệ giữa vận tốc v và quãng đường rơi x theo công thức (2.9) có dạng

$$v = \sqrt{2gx}$$

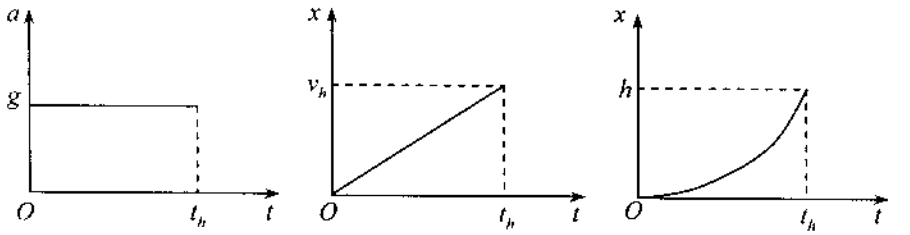
Từ đó dễ dàng tính được vận tốc chất điểm khi chạm đất

$$v_h = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.9,81.100} = 44,3\ m/s$$

Thời gian rơi là

$$t_h = \frac{v_h}{g} = \frac{44,3}{9,81} = 4,52s.$$

Hình 1.6 là đồ thị gia tốc, vận tốc và quy luật chuyển động của chất điểm rơi tự do.



Hình 1.6

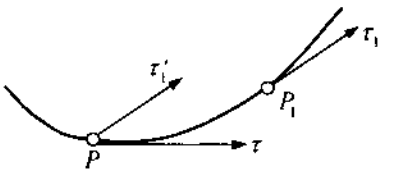
3. CHUYỂN ĐỘNG CONG CỦA ĐIỂM

Khi xác định các đại lượng vận tốc, gia tốc của điểm cần phải tìm hiểu xem quỹ đạo chuyển động của điểm đã biết trước hay chưa. Nếu chưa biết quỹ đạo chuyển động của điểm nên sử dụng các công thức xác định vận tốc, gia tốc trong hệ toạ độ Descartes vuông góc (1.5) và (1.9). Nếu đã biết được quỹ đạo chuyển động của điểm, thì nên sử dụng phương pháp toạ độ tự nhiên. Khi đó việc tính toán sẽ đơn giản hơn nhiều.

3.1. Một số kiến thức của hình học vi phân

a) Mặt phẳng mật tiếp. Trước hết chúng ta đưa ra cách xác định mặt phẳng mật tiếp (osculating planc) với quỹ đạo tại điểm P của nó. Người ta phân ra hai trường hợp:

– Quỹ đạo của điểm là một đường cong phẳng. Khi đó mặt phẳng chứa quỹ đạo là mặt phẳng mật tiếp tại mọi điểm của quỹ đạo.



Hình 1.7

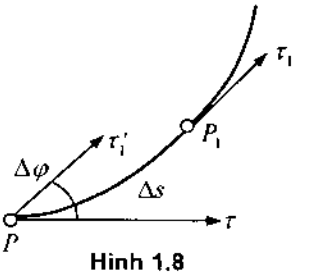
– Quỹ đạo của điểm là một đường cong không gian. Tại P dựng tiếp tuyến Pτ và lấy một điểm P_1 bất kỳ trên quỹ đạo, kẻ tiếp tuyến $P_1\tau_1$ (hình 1.7). Tại P kẻ $P\tau_1'$ song song với $P_1\tau_1$. Ký hiệu mặt phẳng chứa Pτ và $P\tau_1'$ là mặt phẳng E_1.

Khi đó mặt phẳng mật tiếp với đường cong tại điểm P, ký hiệu là E^* được xác định bởi hệ thức

$$E^* = \lim_{P_1 \to P} E_1$$

Trong thực hành chúng ta có thể xác định mặt phẳng mật tiếp tại một điểm P bất kỳ của đường cong không gian một cách gần đúng như sau. Lấy một cung rất bé $\widehat{ds} = \widehat{PP'}$ trên đường cong, có chứa điểm P. Vì cung $\widehat{ds}$ rất bé nên có thể thay nó bằng một cung phẳng có cùng điểm đầu P và điểm cuối P'. Mặt phẳng chứa cung phẳng này sẽ được xem một cách gần đúng là mặt phẳng mật tiếp với quỹ đạo tại điểm P.

b) Độ cong của đường cong. Dễ dàng nhận thấy đường tròn có bán kính càng nhỏ thì tiếp tuyến tại các điểm trên đường tròn đổi hướng càng nhanh. Vì vậy, người ta đưa ra khái niệm độ cong của đường cong như sau. Dựng $P\tau$ là tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm P, dựng $P_1\tau_1$ là tiếp với quỹ đạo tại điểm P_1. Kẻ $P\tau_1'$ song song $P_1\tau_1$.



Hình 1.8

Định nghĩa. Độ cong của đường cong tại điểm P của nó được định nghĩa bởi công thức sau

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| \tag{3.1}$$

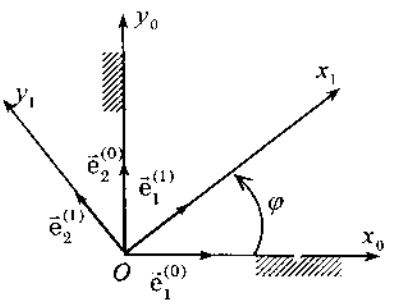
Đại lượng $\rho = 1/k$ được gọi là bán kính cong tại điểm P của đường cong.

Để minh hoạ, xét quỹ đạo là đường tròn bán kính R. Khi đó $\Delta s = R\Delta\varphi$. Ta có

$$k = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R}, \quad \rho = \frac{1}{k} = R$$

Như thế bán kính cong tại các điểm của đường tròn bằng bán kính của đường tròn.

c) Đạo hàm theo thời gian của véctơ đơn vị của hệ quy chiếu động. Cho $R = \{Ox_0y_0\}$ là hệ quy chiếu cố định. Véctơ đơn vị trên các trục là $\vec{e}_1^{(0)}$, $\vec{e}_2^{(0)}$. Cho $R_1 = \{Ox_1y_1\}$ là các hệ quy chiếu động, các véctơ đơn vị trên các trục là $\vec{e}_1^{(1)}$, $\vec{e}_2^{(1)}$ (hình 1.9). Từ hình vẽ suy ra



Hình 1.9

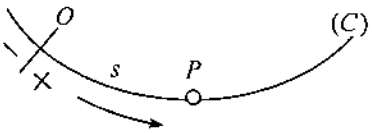
$$\vec{e}_1^{(1)} = \cos\varphi \cdot \vec{e}_1^{(0)} + \sin\varphi \cdot \vec{e}_2^{(0)}$$
$$\vec{e}_2^{(1)} = -\sin\varphi \cdot \vec{e}_1^{(0)} + \cos\varphi \cdot \vec{e}_2^{(0)}$$

Đạo hàm các véctơ trên theo thời gian ở trong hệ quy chiếu cố định $R_O = \{Ox_Oy_O\}$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{{}^{R_O}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} &= \left(-\sin\varphi\vec{e}_1^{(0)} + \cos\varphi\vec{e}_2^{(0)}\right)\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{e}_2^{(1)} \\ \frac{{}^{R_O}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} &= -\left(\cos\varphi\vec{e}_1^{(0)} + \sin\varphi\vec{e}_2^{(0)}\right)\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\vec{e}_1^{(1)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2. Phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc của điểm

a) Phương trình chuyển động. Chọn một điểm tuỳ ý O ở trên quỹ đạo làm điểm gốc (thường chọn điểm bắt đầu xuất phát làm điểm gốc) và định chiều dương trên quỹ đạo (hình 1.10). Vị trí của điểm P được xác định bằng độ dài đại số cung $\overset{\frown}{OP} = s$. Điểm P chuyển động nên s thay đổi theo thời gian. Do đó



Hình 1.10

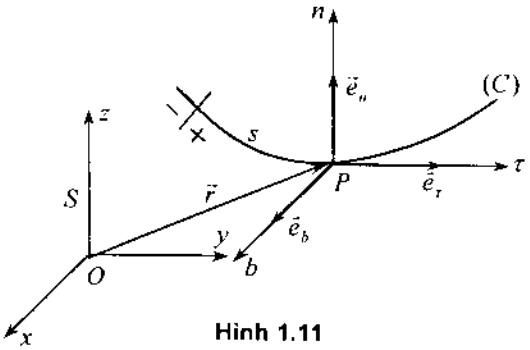
$$s = s(t) \tag{3.3}$$

Phương trình (3.3) được gọi là phương trình chuyển động của điểm P trên quỹ đạo cong (C).

b) Vận tốc của điểm. Để tính vận tốc của điểm P, gắn vào điểm P một hệ toạ độ vuông góc như hình 1.11:

– Trong mặt phẳng mật tiếp với đường cong tại điểm P ta kẻ tiếp tuyến Pτ và pháp tuyến Pn hướng về phía lõm của quỹ đạo. Pháp tuyến Pn nằm trong mặt phẳng mật tiếp được là pháp tuyến chính.

– Kẻ pháp tuyến Pb vuông góc với mặt phẳng mật tiếp tại P sao cho Pτnb tạo thành một hệ quy chiếu thuận. Pháp tuyến này được gọi là trùng pháp tuyến. Hệ toạ vuông góc Pτnb được gọi là hệ toạ độ tự nhiên. Các véc tơ đơn vị trên các trục này là $\vec{e}_\tau, \vec{e}_n, \vec{e}_b$. Vận tốc điểm P được tính theo công thức



Hình 1.11

$$\vec{v} = \frac{{}^{R}d\vec{r}\left(s(t)\right)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Do $d\vec{r}$ hướng theo tiếp tuyến quỹ đạo và $|d\vec{r}| = ds$, nên $d\vec{r} = ds\vec{e}_\tau$. Từ đó suy ra

$$\vec{v} = \dot{s}(t)\vec{e}_\tau = v\vec{e}_\tau \tag{3.4}$$

c) Gia tốc của điểm. Đạo hàm biểu thức (3.4) theo thời gian ta được

$$\vec{a} = \frac{{}^R d\vec{v}}{dt} = \frac{{}^R d}{dt}\left(v\vec{e}_\tau\right) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + v\frac{{}^R d\vec{e}_\tau}{dt} \tag{3.5}$$

Theo công thức (3.2) ta có

$$\frac{{}^R d\vec{e}_\tau}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_n = \frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\vec{e}_n = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n \tag{3.6}$$

Thế (3.6) vào (3.5) ta được

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n = a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n \tag{3.7}$$

Thành phần gia tốc $a_\tau = \dot{v}$ được gọi là thành phần gia tốc tiếp, còn thành phần gia tốc $a_n = v^2/\rho$ được gọi là thành phần gia tốc pháp tuyến. Do công thức (3.7) ta thấy: gia tốc của điểm P nằm trên mặt phẳng mật tiếp với quỹ đạo tại điểm P và luôn hướng về phía lõm của quỹ đạo.

3.3. Chuyển động cong đều và chuyển động cong biến đổi đều

a) Chuyển động cong đều. Chuyển động cong của điểm P mà vận tốc của nó có trị số không đổi được gọi là chuyển động cong đều.

Do $v = v_0 = const$, suy ra:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,\ \ a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{3.8}$$

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt = s_0 + v_0\left(t - t_0\right) \tag{3.9}$$

Trong đó $v_0 = v(t_0)$, $s_0 = s(t_0)$

Như thế khi chất điểm chuyển động cong đều thành phần gia tốc tiếp tuyến bằng không, còn thành phần gia tốc pháp tuyến có thể khác không. Do đó gia tốc $\vec{a}$ có thể khác không.

b) Chuyển động cong biến đổi đều. Chuyển động cong của điểm P mà thành phần gia tốc tiếp tuyến của nó luôn luôn có trị số không đổi được gọi là chuyển động cong biến đổi đều.

Do $a_\tau = a_0 = const$, suy ra

$$v = v_0 + a_0(t - t_0) \tag{3.10}$$

Từ hệ thức $\frac{ds}{dt} = v = v_0 + a_0(t - t_0)$ suy ra

$$ds = \left[v_0 + a_0(t - t_0)\right]dt$$

Tích phân lên ta được

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \tag{3.11}$$

3.4. Thí dụ áp dụng

Thí dụ 1.3. Cho một điểm chuyển động theo quy luật

$$x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin(t/2).$$

Hãy xác định bán kính cong một điểm tuỳ ý của quỹ đạo theo thời gian t.

Lời giải. Đạo hàm các hàm $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ theo thời gian ta được

$$\dot{x} = 1 - \cos t,\ \dot{y} = \sin t,\ \dot{z} = 2\cos\frac{t}{2}$$

$$\ddot{x} = \sin t,\quad \ddot{y} = \cos t,\quad \ddot{z} = -\sin\frac{t}{2}$$

Từ đó ta tính các biểu thức xác định vận tốc, gia tốc, gia tốc tiếp của điểm

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2} = 4$$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2\frac{t}{2} = 1 + \sin^2\frac{t}{2}$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

Do $a_\tau = 0$ nên $a = a_n$. Theo công thức xác định thành phần gia tốc pháp $a_n = v^2/\rho$ suy ra

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{a} = \frac{4}{\sqrt{1 + \sin^2\frac{t}{2}}}$$

3.5. Các toạ độ cực, các toạ độ trụ và các toạ độ cầu

a) Các toạ độ cực. Khi điểm P chuyển động trên mặt phẳng Oxy, nhiều khi người ta cũng sử dụng phương pháp toạ độ cực để xác định vận tốc, gia tốc của

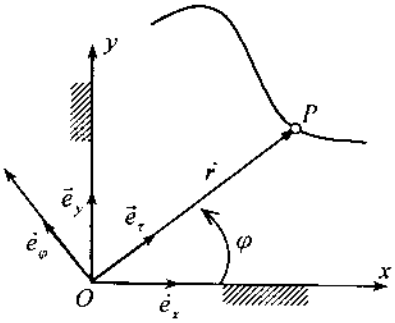
nó. Bên cạnh hệ toạ độ ($\vec{e}_x, \vec{e}_y$) ta đưa vào hệ toạ độ động ($\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$) như hình 1.12. Trong đó $\vec{e}_r$ nằm trên đường thẳng nối tâm O và điểm P. Vị trí điểm P trên mặt phẳng E được xác định bởi hai tham số r và φ. Do đó các phương trình chuyển động của điểm P có dạng

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t) \qquad (3.12)$$

Dựa trên công thức (3.12) dễ dàng xác định được biểu thức tính vận tốc, gia tốc của điểm P. Đạo hàm $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$ theo t, suy ra

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad (3.13)$$



Hình 1.12

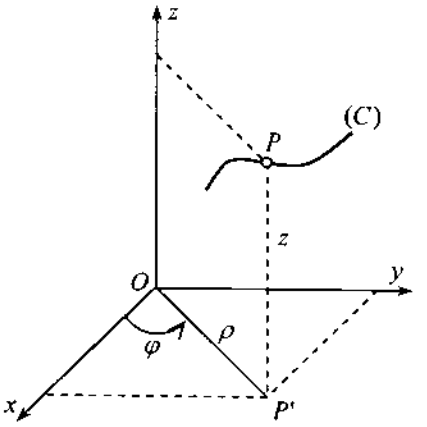
Đạo hàm (3.13) theo t tính được biểu thức tính gia tốc

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

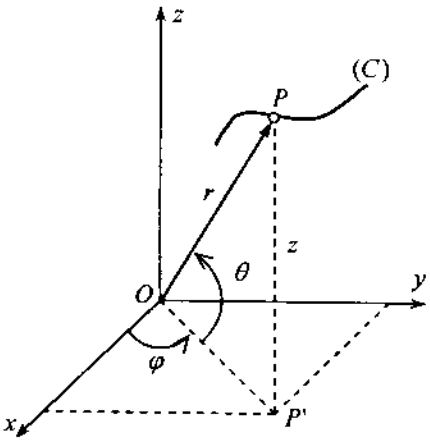
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi \qquad (3.14)$$

b) Các toạ độ trụ và các toạ độ cầu. Sử dụng các toạ độ trụ (hình 1.13), vị trí điểm P được xác định bởi ba tham số ρ, φ, z. Do đó phương trình chuyển động của điểm P có dạng

$$\rho = \rho(t), \ \varphi = \varphi(t), \ z = z(t). \qquad (3.15)$$



Hình 1.13



Hình 1.14

Sử dụng các toạ độ cầu (hình 1.14), vị trí của điểm P được xác định bởi ba tham số r, φ và θ. Do đó phương trình chuyển động của điểm P có dạng

$$r = r(t),\ \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t) \tag{3.16}$$

Các công thức liên hệ giữa các toạ độ trụ, các toạ độ cầu và các toạ độ đề các của điểm P có dạng như sau

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z \tag{3.17}$$

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\ y = r\cos\theta\sin\varphi, z = r\sin\theta \tag{3.18}$$

Từ đó dễ dàng xác định được các biểu thức tính vận tốc, gia tốc của điểm P trong các toạ độ trụ, hoặc trong các toạ độ cầu.

4. KHẢO SÁT ĐỘNG HỌC MỘT SỐ CHUYỂN ĐỘNG ĐẶC BIỆT

Trong phần này áp dụng công thức ở trên xác định phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc của một số mô hình chuyển động điểm có ý nghĩa trong kỹ thuật.

4.1. Chuyển động theo quỹ đạo parabol

Thí dụ 1.4. Trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy, một điểm P chuyển động theo phương trình

$$x = v_0 t\cos\alpha,\quad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Trong đó v_0, α, g là các hằng số. Tìm quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm P và bán kính cong của quỹ đạo ứng với $t = 0$ và lúc P ở vị trí cao nhất.

Lời giải. Rút t từ phương trình thứ nhất $t = \dfrac{x}{v_0 cos\alpha}$ rồi thay vào phương trình thứ hai suy ra

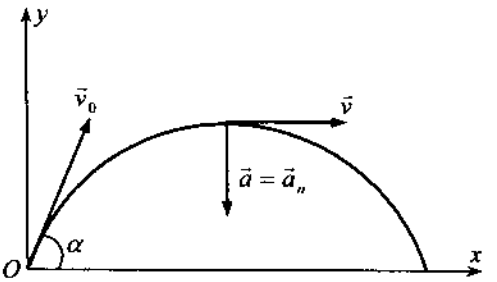
$$y = xtg\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

Vậy quỹ đạo là một đường parabol.

Đạo hàm phương trình chuyển động ta được

$$v_x = \dot{x} = v_0\cos\alpha$$

$$v_y = \dot{y} = v_0\sin\alpha - gt$$



Hình 1.15

Từ đó suy ra

$$v = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}$$

Đạo hàm biểu thức vận tốc ta có

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = -g$$

Do đó véctơ $\vec{a}$ luôn hướng thẳng xuống dưới. Để tìm bán kính cong của quỹ đạo ta sử dụng công thức $\rho = v^2 / a_n$. Trong bài toán này, ta có

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{-g\left(v_0 \sin\alpha - gt\right)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + \left(v_0 \sin\alpha - gt\right)^2}}$$

Khi P ở vị trí gốc toạ độ ($t = 0$): $a_\tau = -g\sin\alpha, \quad a = g$.

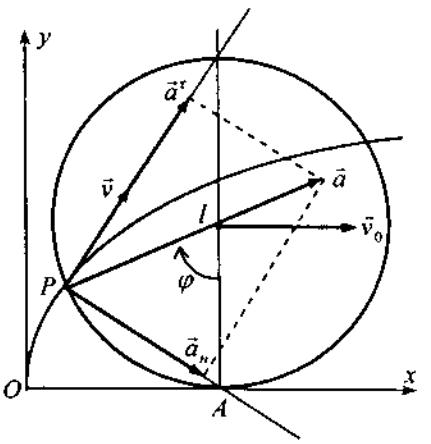
Vậy $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = g\cos\alpha$. Do đó $\rho = \dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha}$

Khi P ở vị trí cao nhất của quỹ đạo: do $\vec{v}$ song song với trục x, do đó $v_y = v_0 \sin\alpha - gt = 0$. Từ đó suy ra $a_\tau = 0, a_n = g$. Vậy bán kính cong quỹ đạo tại điểm đỉnh của parabol là

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g}$$

4.2. Chuyển động theo đường xycloit

Thí dụ 1.5. Một bánh xe tròn bán kính R lăn không trượt trên đường ray thẳng. Vận tốc tâm bánh xe là hằng số và bằng $\vec{v}_0$. Tìm phương trình chuyển động của điểm P ở trên vành bánh xe. Tìm quỹ đạo vận tốc, gia tốc của điểm đó.



Hình 1.16

Lời giải. Chọn hệ toạ độ Oxy như hình 1.16 với chú ý khi $t = 0$ thì P ≡ 0. Do bánh xe lăn không trượt nên cung $\overset{\frown}{AP}$ bằng đoạn OA. Do $\overset{\frown}{AP} = R\varphi$, OA = $v_0 t$, nên $v_0 t = R\varphi$. Do đó

$$\varphi = \omega t \qquad \text{với} \qquad \omega = \frac{v_0}{R}.$$

Toạ độ của điểm P là

$$x = v_0 t - R\sin\varphi = v_0 t - R\sin\omega t \qquad (1)$$

$$y = R - R\cos\varphi = R\left(1 - \cos\omega t\right) \qquad (2)$$

Các phương trình chuyển động của điểm P này cũng là phương trình tham số của quỹ đạo của nó. Quỹ đạo của P gồm những cung xyclôit như hình 1.16. Hình chiếu vận tốc của điểm P trên các trục Ox và Oy là

$$v_x = \dot{x} = v_0 - R\omega\cos\omega t = v_0\left(1-\cos\omega t\right) \qquad (3)$$

$$v_y = \dot{y} = R\omega\sin\omega t = v_0\sin\omega t \qquad (4)$$

Độ lớn của vận tốc điểm P

$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = v_0\sqrt{\left(1-\cos\omega t\right)^2+\sin^2\omega t} = v_0\sqrt{2\left(1-\cos\omega t\right)} = 2v_0\sin\frac{\omega t}{2}$$

Do góc φ nằm trong vùng $2\pi \geq \varphi \geq 0$, nên $\sin\frac{\omega t}{2} \geq 0$.

Để tìm hướng vận tốc của điểm P ta xác định các cosin chỉ hướng của véctơ vận tốc

$$\cos\left(x,\vec{v}\right) = \frac{v_x}{v} = \frac{1-\cos\omega t}{2\sin\frac{\omega t}{2}} = \sin\frac{\omega t}{2}, \quad \cos\left(y,\vec{v}\right) = \frac{v_y}{v} = \frac{\sin\omega t}{2\sin\frac{\omega t}{2}} = \cos\frac{\omega t}{2}$$

Từ đó suy ra véctơ vận tốc điểm P luôn luôn nằm trên đường thẳng nối từ điểm P tới điểm cao nhất của bánh xe. Hình chiếu gia tốc của điểm P trên các trục Ox và Oy là

$$a_x = \ddot{x} = v_0\omega\sin\omega t,\ a_y = \ddot{y} = v_0\omega\cos\omega t$$

Do đó $\qquad a = \sqrt{a_x^2+a_y^2} = v_0\omega = \omega^2 R$

Do $\cos\left(x,\vec{a}\right) = \frac{a_x}{a} = \sin\omega t; \cos\left(y,\vec{a}\right) = \frac{a_y}{a} = \cos\omega t$, nên véctơ gia tốc của điểm P luôn đi qua tâm của bánh xe. Bán kính cong của quỹ đạo được tính từ biểu thức $\rho = v^2/a_n$.

Do $\qquad a_n = \sqrt{a^2-a_\tau^2}$ và $a_\tau = \frac{dv_t}{dt} = v_0\omega\cos\frac{\omega t}{2}$ (vì $v_\tau = v$)

Nên $\qquad a_n = v_0\omega\sqrt{1-\cos^2\frac{\omega t}{2}} = v_0\omega\sin\frac{\omega t}{2}$

Vậy ta có $\qquad \rho = \dfrac{4v_0^2\sin^2\frac{\omega t}{2}}{v_0\omega\sin\frac{\omega t}{2}} = \dfrac{4v_0}{\omega}\sin\dfrac{\omega t}{2} = 4R\sin\dfrac{\omega t}{2} = 2AP$.

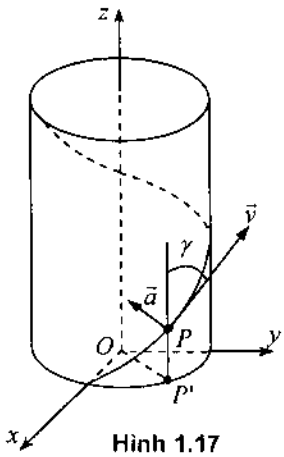
Trong đó AP là khoảng cách từ điểm P đến điểm thấp nhất của bánh xe.

4.3. Chuyển động theo đường xoắn ốc

Thí dụ 1.6. Cho điểm P chuyển động theo quy luật

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = p\varphi$$

Trong đó r và p là các hằng số, $\varphi = \varphi(t)$. Tìm vận tốc, gia tốc của điểm P và xét tính biến đổi chuyển động khi $\varphi = \omega_0 t$ với $\omega_0 = const$.



Hình 1.17

Lời giải. Theo phương trình chuyển động của điểm P, nó sẽ vạch nên một đường xoắn ốc đều như hình 1.17. Áp dụng phương pháp toạ độ Descartes tính vận tốc và gia tốc điểm P, ta có

$$v_x = \dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi;$$
$$v_y = \dot{y} = r\dot{\varphi}\cos\varphi; \qquad (1)$$
$$v_z = p\dot{\varphi}$$
$$v = \sqrt{r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + p^2\dot{\varphi}^2} = |\varphi|\sqrt{r^2 + p^2}$$

Đạo hàm biểu thức (1) theo thời gian ta được

$$a_x = \ddot{x} = -r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi$$
$$a_y = \ddot{y} = -r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi$$
$$a_z = \ddot{z} = p\ddot{\varphi}$$

Để ý, ta xét trường hợp $\dot{\varphi} \geq 0$. Khi đó, nếu gọi γ là góc giữa tiếp tuyến với quỹ đạo và trục z, ta có:

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{p\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}\sqrt{r^2 + p^2}} = \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}} = const$$

Như thế, đường xoắn ốc có độ nghiêng không đổi đối với mặt phẳng Oxy. Ký hiệu P' là hình chiếu của P trên mặt phẳng Oxy. Dễ dàng thấy hình chiếu của quỹ đạo trên mặt phẳng Oxy là đường tròn tâm O bán kính

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2.$$

Khi điểm P' đi được một vòng trên đáy trụ tròn $\varphi = 2\pi$ (radian), thì điểm P chuyển động dọc trục z được một đoạn không đổi là $h = 2\pi p$. Người ta gọi h là bước của xoắn ốc, còn p là tham số của xoắn ốc.

Xét trường hợp $\varphi = \omega_0 t$. Khi đó các thành phần vận tốc có dạng

$$v_x = -r\omega_0 \sin\omega_0 t; v_y = r\omega_0 cos\omega_0 t$$

$$v_z = p\omega_0$$

Từ đó ta có $v = \omega_0\sqrt{r^2 + p^2} = const$. Như thế điểm P sẽ chuyển động đều trên đường xoắn ốc. Các thành phần gia tốc

$$a_x = -r\omega_0^2 \cos\omega_0 t,\ a_y = -r\omega_0^2 \sin\omega_0 t,\ a_z = 0.$$

Vì vậy ta có $a = r\omega_0^2$. Véctơ gia tốc $\vec{a}$ song song với mặt phẳng Oxy (vì $a_z = 0$).

Chú ý rằng $a_x = -\omega^2 x; a_y = -\omega^2 y$, mà x, y lại là toạ độ của điểm P'. Vậy gia tốc $\vec{a}$ ngược chiều với véctơ $\overrightarrow{OP'}$.

Do $v = const$, nên $a_\tau = 0; a_n = a$. Vậy bán kính cong của quỹ đạo là

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{r^2 + p^2}{r}.$$

Chương 2

CƠ SỞ ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

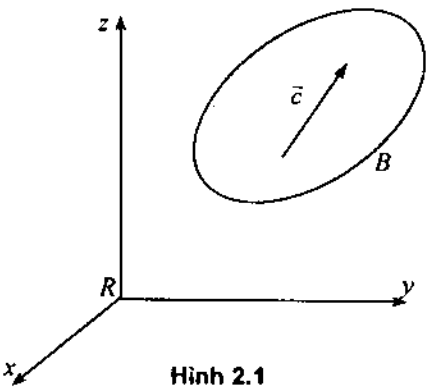
Trong chương này, trước hết giới thiệu hai đại lượng động học đặc trưng cơ bản của vật rắn chuyển động. Hai đại lượng đó là vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn. Từ đó đưa ra các công thức tổng quát xác định vận tốc, gia tốc của một điểm bất kỳ thuộc vật rắn chuyển động. Áp dụng các kết quả đó khảo sát hai loại chuyển động đơn giản nhất nhưng cũng là phổ biến nhất của vật rắn. Đó là chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục cố định của vật rắn. Cuối chương trình bày các loại truyền động đơn giản nhưng phổ biến trong kỹ thuật.

1. HAI ĐẠI LƯỢNG ĐẶC TRƯNG CƠ BẢN CỦA ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

Mô hình bài toán động học vật rắn cho trên hình 2.1. Việc thiết lập các phương trình chuyển động của vật rắn là bài toán khá phức tạp, chúng ta sẽ trình bày ở chương Động học vật rắn không gian cuối phần động học. Ở đây, chỉ nghiên cứu hai đại lượng động học đặc trưng cơ bản của vật rắn, đó là vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn.

1.1. Vận tốc góc của vật rắn

Vận tốc góc của vật rắn là một trong những khái niệm cơ bản nhất trong động học. Thế nhưng khái niệm này cũng là một trong những khái niệm hay bị hiểu sai nhất. Lý do của sự hay nhầm lẫn này có thể là chưa xây dựng được sự tương xứng giữa khái niệm vận tốc của mô hình điểm với khái niệm vận tốc góc của mô hình vật rắn.



Hình 2.1

Xét vật rắn B chuyển động đối với hệ quy chiếu R như hình 2.1. Lấy $\vec{c}$ là một véc tơ tuỳ ý khác không thuộc vật rắn B. Do $(\vec{c})^2 = const$ nên đạo hàm theo t biểu thức này ta được $\vec{c}.\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$. Như thế $\frac{d\vec{c}}{dt}$ là một véc tơ vuông góc với véc tơ $\vec{c}$.

Mặt khác tích có hướng của hai véc tơ có dạng $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$. Trong đó, véc tơ $\vec{b}$ vuông góc với mặt phẳng chứa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$. Những nhận xét đó gợi ý cho chúng ta xây dựng khái niệm véc tơ vận tốc góc của vật rắn như sau.

a) Định nghĩa. Lấy $\vec{c}$ là một véc tơ tuỳ ý khác không thuộc vật rắn B. Vận tốc góc của vật rắn B đối với hệ quy chiếu R là một véc tơ, ký hiệu là ${}^R\vec{\omega}^B$, mà nhân véc tơ với véc tơ $\vec{c}$ ta được đạo hàm $\dfrac{{}^R d\vec{c}}{dt}$

$$\frac{{}^R d\vec{c}}{dt} = {}^R\vec{\omega}^B \times \vec{c} \tag{1.1}$$

b) Sự tồn tại và duy nhất của vận tốc góc. Vận tốc góc của vật rắn B được định nghĩa bởi biểu thức (1.1) là duy nhất. Thật vậy, giả sử ${}^R\vec{\omega}^B$ không duy nhất, sẽ tồn tại véc tơ ${}^R\vec{\omega}'^B$ mà

$$\frac{{}^R d\vec{c}}{dt} = {}^R\vec{\omega}'^B \times \vec{c} \tag{1.2}$$

Lấy biểu thức (1.1) trừ đi biểu thức (1.2) ta được

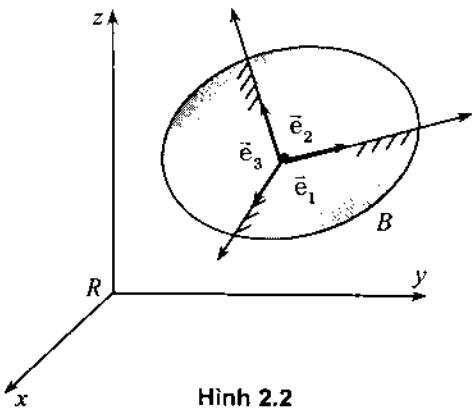
$${}^R\vec{\omega}^B \times \vec{c} - {}^R\vec{\omega}'^B \times \vec{c} = \left({}^R\vec{\omega}^B - {}^R\vec{\omega}'^B\right) \times \vec{c} = 0 \tag{1.3}$$

Do $\vec{c}$ là một véc tơ tuỳ ý khác không thuộc vật rắn B và do phương trình (1.3) luôn thoả mãn với mọi $\vec{c}$ nên ta phải có hệ thức

$${}^R\vec{\omega}^B - {}^R\vec{\omega}'^B = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^R\vec{\omega}^B = {}^R\vec{\omega}'^B.$$

Sự tồn tại của ${}^R\vec{\omega}^B$: Nếu ta công nhận tính liên tục về sự phân bố vật chất của vật rắn, thì đạo hàm $\dfrac{{}^R d\vec{c}}{dt}$ sẽ tồn tại. Từ đó suy ra vận tốc góc của vật rắn tồn tại.

c) Công thức tính vận tốc góc ${}^R\vec{\omega}^B$. Gắn chặt vào vật rắn B một hệ quy chiếu vuông góc có các véctơ đơn vị trên các trục là $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (hình 2.2). Ta có định lý sau đây để xác định vận tốc góc của vật rắn B.



Hình 2.2

Định lý 2.1. Cho $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ là ba véc tơ đơn vị của một hệ quy chiếu động gắn liền vào vật rắn B. Khi đó vận tốc góc của vật rắn B được xác định bởi công thức

$$^{R}\vec{\omega}^{B} = \vec{e}_1\left(\frac{^{R}d\vec{e}_2}{dt}\cdot\vec{e}_3\right) + \vec{e}_2\left(\frac{^{R}d\vec{e}_3}{dt}\cdot\vec{e}_1\right) + \vec{e}_3\left(\frac{^{R}d\vec{e}_1}{dt}\cdot\vec{e}_2\right) \qquad (1.4)$$

Chứng minh. Trong hệ quy chiếu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ véc tơ vận tốc góc của vận rắn B có thể biểu diễn dưới dạng

$$^{R}\vec{\omega}^{B} = \left(^{R}\vec{\omega}^{B}\cdot\vec{e}_1\right)\vec{e}_1 + \left(^{R}\vec{\omega}^{B}\cdot\vec{e}_2\right)\vec{e}_2 + \left(^{R}\vec{\omega}^{B}\cdot\vec{e}_3\right)\vec{e}_3 \qquad (1.5)$$

Do $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ là các véctơ đơn vị trên ba trục của một hệ toạ độ vuông góc nên ta có các hệ thức

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_2\times\vec{e}_3,\ \vec{e}_2 = \vec{e}_3\times\vec{e}_1,\ \vec{e}_3 = \vec{e}_1\times\vec{e}_2 \qquad (1.6)$$

Thế các hệ thức (1.6) vào biểu thức (1.5) ta được

$$^{R}\vec{\omega}^{B} = \left[^{R}\vec{\omega}^{B}\left(\vec{e}_2\times\vec{e}_3\right)\right]\vec{e}_1 + \left[^{R}\vec{\omega}^{B}\left(\vec{e}_3\times\vec{e}_1\right)\right]\vec{e}_2 + \left[^{R}\vec{\omega}^{B}\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_2\right)\right]\vec{e}_3 \qquad (1.7)$$

Chú ý đến tính chất quen biết của tích hỗn hợp ba véc tơ

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{c}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right) \qquad (1.8)$$

và định nghĩa vận tốc góc của vật rắn (1.1) hệ thức (1.7) được biến đổi như sau

$$^{R}\vec{\omega}^{B} = \left[\vec{e}_3\cdot\left(^{R}\vec{\omega}^{B}\times\vec{e}_2\right)\right]\vec{e}_1 + \left[\vec{e}_1\cdot\left(^{R}\vec{\omega}^{B}\times\vec{e}_3\right)\right]\vec{e}_2 + \left[\vec{e}_2\cdot\left(^{R}\vec{\omega}^{B}\times\vec{e}_1\right)\right]\vec{e}_3$$

$$= \left(\vec{e}_3\cdot\frac{^{R}d\vec{e}_2}{dt}\right)\vec{e}_1 + \left(\vec{e}_1\cdot\frac{^{R}d\vec{e}_3}{dt}\right)\vec{e}_2 + \left(\vec{e}_2\cdot\frac{^{R}d\vec{e}_1}{dt}\right)\vec{e}_3$$

Do tích vô hướng của hai véctơ có tính giao hoán nên ta có

$$^{R}\vec{\omega}^{B} = \vec{e}_1\left(\frac{^{R}d\vec{e}_2}{dt}\cdot\vec{e}_3\right) + \vec{e}_2\left(\frac{^{R}d\vec{e}_3}{dt}\cdot\vec{e}_1\right) + \vec{e}_3\left(\frac{^{R}d\vec{e}_1}{dt}\cdot\vec{e}_2\right)$$

Định lý được chứng minh xong. Chú ý rằng, công thức (1.4) thường được sử dụng để tính vận tốc góc của vật rắn trong nhiều trường hợp cụ thể.

Sau đây trong bài toán khảo sát chuyển động của một vật rắn B đối với một hệ quy chiếu R, khi chỉ có một vật rắn và một hệ quy chiếu để đơn giản cách viết, ta thay $^{R}\vec{\omega}^{B} = \vec{\omega}$.

1.2. Gia tốc góc của vật rắn

Định nghĩa. Gia tốc góc của vật rắn B đối với hệ quy chiếu R là một đại lượng véctơ, ký hiệu là $^{R}\vec{\varepsilon}^{B}$, bằng đạo hàm theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R của véctơ vận tốc góc của vật rắn đó

$$^{R}\vec{\varepsilon}^{B} = \frac{^{R}d\,^{R}\vec{\omega}^{B}}{dt} \qquad (1.9)$$

Chú ý. Khi khảo sát chuyển động của một vật rắn B đối với một hệ quy chiếu R ta có thể thay ký hiệu ${}^{R}\vec{\varepsilon}^{B}$ bằng ký hiệu $\vec{\varepsilon}$ cho đơn giản cách viết. Trong một số tài liệu người ta ký hiệu gia tốc góc là $\vec{\alpha}$.

2. BIỂU THỨC XÁC ĐỊNH VẬN TỐC, GIA TỐC CỦA MỘT ĐIỂM BẤT KỲ THUỘC VẬT RẮN

2.1. Vận tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn

a) Định lý 2.2. Nếu biết vận tốc góc của vật rắn và vận tốc một điểm A nào đó thuộc vật rắn B, thì vận tốc một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn B được xác định bởi hệ thức sau

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \qquad (2.1)$$

trong đó $\vec{u}_P = \overrightarrow{AP}$, $\vec{v}_{PA}$ là vận tốc của điểm P trong chuyển động quay của vật rắn quay quanh điểm A.

Chứng minh. Ta lấy hai điểm A, P tuỳ ý thuộc vật rắn B đang chuyển động (hình 2.3). Từ hình vẽ suy ra

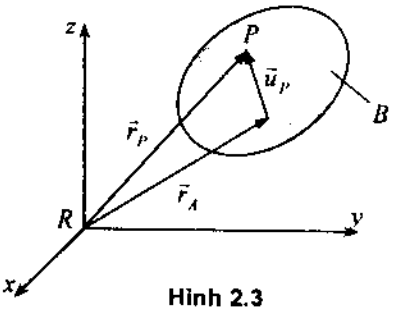
$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{u}_P \qquad (2.2)$$

Đạo hàm hai vế hệ thức (2.2) theo t ở trong hệ quy chiếu R ta được

$$\frac{{}^{R}d\vec{r}_P}{dt} = \frac{{}^{R}d\vec{r}_A}{dt} + \frac{{}^{R}d\vec{u}_P}{dt} \qquad (2.3)$$

Theo định nghĩa vận tốc góc, công thức (1.1), ta có

$$\frac{{}^{R}d\vec{u}_P}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_P \qquad (2.4)$$



Hình 2.3

Thế (2.4) vào (2.3) ta được

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_P$$

Hệ quả: Hình chiếu vận tốc hai điểm bất kỳ thuộc vật rắn B lên đường thẳng nối hai điểm đó thì bằng nhau.

Chứng minh. Do tích $\vec{\omega} \times \vec{u}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$ luôn vuông góc với đường thẳng AP nên từ (2.1) suy ra

$$hc_{AP}(\vec{v}_P) = hc_{AP}(\vec{v}_A) \qquad (2.5)$$

2.2. Gia tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn

Định lý 2.3. Nếu biết vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn B và gia tốc một điểm A nào đó thuộc vật rắn đó, thì gia tốc một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn B được xác định bởi hệ thức sau

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{u}_P\right) \tag{2.6}$$

Chứng minh. Đạo hàm theo thời gian t ở trong hệ quy chiếu R biểu thức (2.1) ta được

$$\frac{{}^R d\vec{v}_P}{dt} = \frac{{}^R d\vec{v}_A}{dt} + \frac{{}^R d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times \frac{{}^R d\vec{u}_P}{dt}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{u}_P\right)$$

Từ các công thức (2.1) và (2.2) ta xác định được vận tốc và gia tốc các điểm của vật rắn.

Qua trên ta thấy hai bài toán cơ bản của động học vật rắn là:

1. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn.

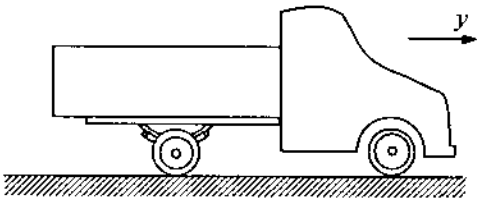
2. Xác định vận tốc, gia tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn.

Sau đây áp dụng các kết quả của hai tiết trên khảo sát hai dạng chuyển động cơ bản của vật rắn là chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục cố định.

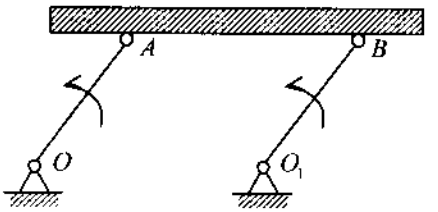
3. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN

3.1. Định nghĩa và thí dụ

a) Định nghĩa. Chuyển động của vật rắn được gọi là chuyển động tịnh tiến nếu mọi đoạn thẳng thuộc vật rắn luôn song song với vị trí ban đầu của nó.



Hình 2.4



Hình 2.5

b) Các thí dụ. Chuyển động của thân xe ôtô trên đoạn đường thẳng là chuyển động tịnh tiến (hình 2.4). Chuyển động của thanh truyền AB trong cơ cấu 4 khâu của máy sàng có các tay quay OA = O_1B là chuyển động tịnh tiến (hình 2.5)

c) Chú ý. Chuyển động tịnh tiến là một dạng chuyển động của vật rắn. Không có khái niệm điểm chuyển động tịnh tiến. Khi một vật rắn chuyển động tịnh tiến, các điểm thuộc vật đó có thể chuyển động không thẳng, không đều.

3.2. Vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn chuyển động tịnh tiến

Định lý 3.1. Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn luôn luôn triệt tiêu.

Chứng minh. Theo định nghĩa chuyển động tịnh tiến vật rắn ta có $\vec{c} = const$. Do đó

$$\frac{d\vec{c}}{dt} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\varepsilon} \equiv 0$$

3.3. Vận tốc, gia tốc các điểm thuộc vật rắn chuyển động tịnh tiến

Định lý 3.2. Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, vận tốc mọi điểm thuộc vật đều bằng nhau, gia tốc mọi điểm thuộc vật đều bằng nhau.

Chứng minh. Do $\vec{\omega} \equiv 0$, $\vec{\varepsilon} \equiv 0$ nên từ công thức (2.1) và (2.6) ta suy ra

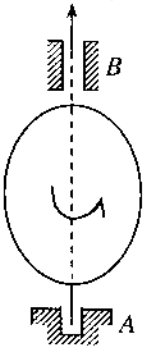
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A; \ \vec{a}_P = \vec{a}_A$$

Chú ý. Từ hai định lý trên suy ra có thể sử dụng mô hình vật điểm để khảo sát mô hình vật rắn chuyển động tịnh tiến.

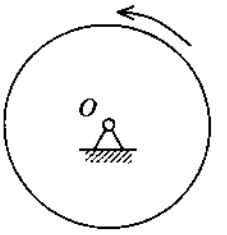
4. CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH CỦA VẬT RẮN

4.1. Định nghĩa và thí dụ

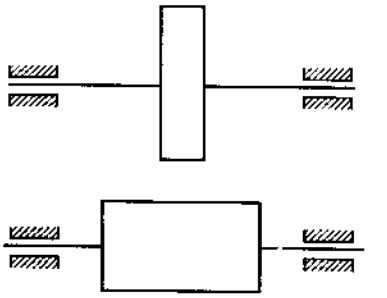
a) Định nghĩa. Chuyển động của vật rắn có hai điểm cố định, do đó có một trục đi qua hai điểm đó cố định, được gọi là chuyển động quay quanh một trục cố định. Trục đi qua hai điểm cố định được gọi là trục quay của vật rắn.



Hình 2.6a



Hình 2.6b



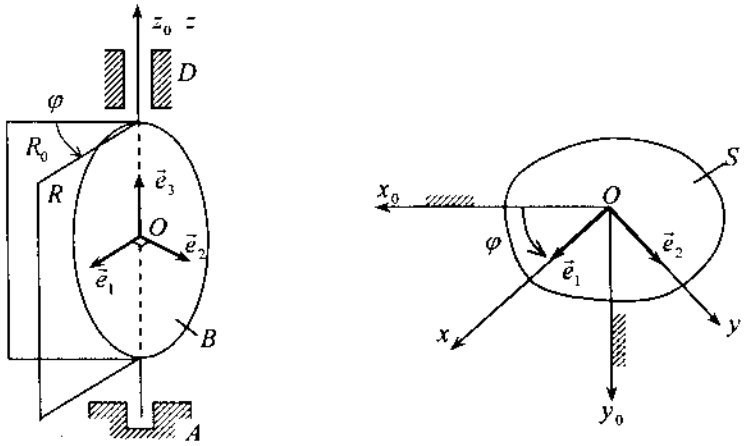
Hình 2.7

b) Mô hình và thí dụ. Hình 2.6a là mô hình không gian còn hình 2.6b là mô hình phẳng của vật rắn quay quanh một trục cố định.

Đa số các trục máy thường thực hiện truyền động quay quanh một trục cố định (hình 2.7).

4.2. Vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định

a) Phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định. Chọn hệ quy chiếu cố định $Ox_Oy_Oz_O$ với Oz_O là trục quay của vật rắn. Chọn hệ trục Oxyz gắn liền vào vật rắn B và cùng quay với vật. Trong đó $Oz_O \equiv Oz$. Các véctơ đơn vị trên hệ trục toạ độ động Oxyz là $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (hình 2.8)



Hình 2.8

Như thế vị trí của vật rắn B đối với hệ quy chiếu cố định $Ox_Oy_Oz_O$ được xác định bởi góc quay φ. Vậy phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định là

$$\varphi = \varphi(t) \tag{4.1}$$

b) Vận tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định. Theo (1.4) biểu thức xác định vận tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định có dạng

$$\vec{\omega} = \vec{e}_1\left(\frac{{}^{R_O}d\vec{e}_2}{dt}\cdot\vec{e}_3\right) + \vec{e}_2\left(\frac{{}^{R_O}d\vec{e}_3}{dt}\cdot\vec{e}_1\right) + \vec{e}_3\left(\frac{{}^{R_O}d\vec{e}_1}{dt}\cdot\vec{e}_2\right) \tag{4.2}$$

Trong trường hợp vật rắn quay quanh một trục cố định, do $\vec{e}_3 = const$ nên $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0$.

Còn các đạo hàm $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$ và $\frac{d\vec{e}_2}{dt}$ được tính theo công thức (3.2) chương một

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_2,\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_1,\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0 \tag{4.3}$$

Thế (4.3) vào (4.2) ta được

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_1 + (0 \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_2 + \dot{\varphi}(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_3$$

Do $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$, nên ta nhận được biểu thức xác định vận tốc góc của vật rắn quay quanh 1 trục cố định

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_3 \tag{4.4}$$

c) Gia tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định. Đạo hàm biểu thức vận tốc góc (4.4) theo thời gian xác định được biểu thức gia tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định

$$\vec{\varepsilon} = \frac{{}^{R_0}d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi}\vec{e}_3 \tag{4.5}$$

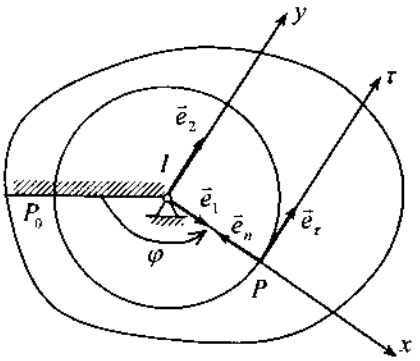
Như thế, gia tốc góc của vật rắn quay quanh một trục cố định là một véctơ nằm trên trục quay và có trị đại số $\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$

Chú ý. Khi hai véctơ $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ cùng chiều ta có chuyển động quay nhanh dần. Khi hai véctơ $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ trái chiều ta có chuyển động quay chậm dần.

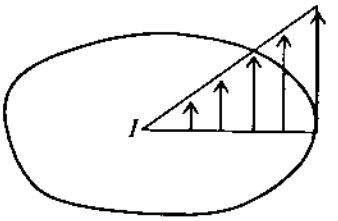
4.3. Vận tốc, gia tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn

a) Quỹ đạo chuyển động. Xét chuyển động của một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn, nằm cách trục z một đoạn IP = r. Khi vật rắn quay quanh trục z cố định, quỹ đạo của điểm P là đường tròn tâm I bán kính r nằm trong mặt phẳng đi qua I và vuông góc với trục quay (hình 2.9). Phương trình chuyển động của P là

$$s = \overset{\frown}{P_0P} = r\varphi(t) \tag{4.6}$$



Hình 2.9



Hình 2.10

b) Vận tốc điểm P bất kỳ thuộc vật rắn. Để thuận tiện cho tính toán, cùng với hệ toạ độ động Ixy ta đưa vào hệ toạ độ tự nhiên Pτn (hình 2.9). Ký hiệu

$$\vec{u}_P = \overrightarrow{IP} = r\vec{e}_1 \tag{4.7}$$

Theo định nghĩa ta có

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_P \tag{4.8}$$

Thế các biểu thức (4.4) và (4.7) vào biểu thức (4.8) ta được

$$\vec{v}_P = (\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_3) \times (r\vec{e}_1) = r\dot{\varphi}\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = r\dot{\varphi}\vec{e}_2 \tag{4.9}$$

Do $\vec{e}_2 = \vec{e}_\tau$ nên

$$\vec{v}_P = r\dot{\varphi}\vec{e}_\tau \tag{4.10}$$

Vậy vận tốc của điểm P là một véctơ nằm trên đường tiếp tuyến với quỹ đạo ở điểm P và có trị số $v_P = r\dot{\varphi}$

Từ công thức (4.10) suy ra: Vận tốc các điểm của vật rắn quay quanh một trục cố định phân bố theo quy luật tam giác vuông đồng dạng (hình 2.10).

c) Gia tốc điểm P bất kỳ thuộc vật rắn

Đạo hàm biểu thức vận tốc (4.9) ở trong hệ quy chiếu R_O theo t ta được

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = r\ddot{\varphi}\vec{e}_2 + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_2}{dt}$$

Do $\frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_1$ nên

$$\vec{a}_P = r\ddot{\varphi}\vec{e}_2 - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_1 \tag{4.11}$$

Chú ý rằng $\vec{e}_1 = -\vec{e}_n$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_\tau$. Thế các hệ thức này vào (4.11) ta được

$$\vec{a}_P = r\ddot{\varphi}\vec{e}_\tau + r\dot{\varphi}^2\vec{e}_n \tag{4.12}$$

Quy ước gọi

$\vec{a}_P^\tau = r\ddot{\varphi}\vec{e}_\tau$ là thành phần gia tốc tiếp

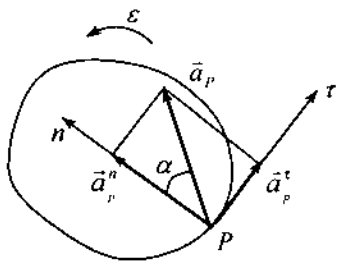
$\vec{a}_P^n = r\dot{\varphi}^2\vec{e}_n$ là thành phần gia tốc pháp

Với các quy ước đó biểu thức gia tốc điểm P có dạng (hình 2.11)

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^\tau + \vec{a}_P^n = r\ddot{\varphi}\vec{e}_\tau + r\dot{\varphi}^2\vec{e}_n$$

Từ hình 2.11 ta có

$$tg\alpha = \frac{|a_P^\tau|}{|a_P^n|} = \frac{|\ddot{\varphi}|}{|\dot{\varphi}^2|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{4.13}$$



Hình 2.11

$$a_P = \sqrt{\left(a_P^\tau\right)^2 + \left(a_P^n\right)^2} = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{4.14}$$

Chú ý. Các véc tơ gia tốc pháp và véc tơ gia tốc tiếp được xác định như sau:

$\vec{a}_P^n$: hướng từ P về O, độ lớn là $a_P^n = r\omega^2$.

$\vec{a}_P^\tau$: có phương vuông góc với trục Pn, có chiều phụ thuộc vào chiều của ε, có trị số là $a_P^\tau = r\varepsilon$.

4.4. Chuyển động quay đều và chuyển động quay biến đổi đều

a) Chuyển động quay đều. Chuyển động quay của vật rắn quay một trục cố định được gọi là chuyển động quay đều, nếu vận tốc góc của vật rắn có trị số không đổi ($\omega_z = \omega_0 = \text{const}$)

Từ điều kiện $\omega_z = \omega_0 = const$, suy ra:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \bar{\omega}_0 \int_{t_0}^{t} dt \;\Rightarrow\; \varphi = \varphi_0 + \bar{\omega}_0 (t - t_0) \tag{4.15}$$

Đa số các trục máy quay đều khi máy làm việc ở chế độ bình ổn. Trong kỹ thuật, hay sử dụng đơn vị vòng/phút để chỉ vận tốc góc. Thí dụ, rôto quay với vận tốc góc 3000 vòng/phút hoặc 10000 vòng/phút. Khi đó, nếu trục máy quay với vận tốc góc n vòng/phút, ta có công thức tính quy đổi như sau

$$\omega = \frac{n \cdot \pi}{30} \text{ hay } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{60} Hz \tag{4.16}$$

b) Chuyển động quay biến đổi đều. Chuyển động quay của vật rắn quay quanh trục cố định được gọi là chuyển động quay biến đổi đều, nếu gia tốc góc của vật rắn có trị số không đổi ($\varepsilon_z = \bar{\varepsilon}_0 = const$).

Từ điều kiện $\varepsilon_z = \varepsilon_0 = \text{const}$, suy ra

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\varepsilon}_0 (t - t_0) \tag{4.17}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \bar{\omega}_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_0 (t - t_0)^2 \tag{4.18}$$

Chú ý rằng khi tích $\omega_z \varepsilon_z > 0$, vật rắn quay nhanh dần, khi tích $\omega_z \varepsilon_z < 0$, vật rắn quay chậm dần.

Thí dụ 2.1. Một trục máy đang quay với vận tốc góc n = 1200 vòng/phút thì bị hãm lại. Trong giai đoạn hãm, trục máy quay chậm dần đều và quay được 80 vòng thì dừng hẳn. Tìm thời gian hãm máy.

Lời giải. Chọn $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, theo các công thức (4.17), (4.18) ta có

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_0 t$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2$$

Theo giả thiết ta có $\omega_0 = \frac{n \cdot \pi}{30} = 40\pi$, 80 vòng = 160π (rad). Từ đó nếu gọi T là thời gian hãm máy, ta có hệ phương trình sau

$$0 = 40\pi + \varepsilon_0 T \qquad (1)$$

$$160\pi = 40\pi T + \frac{1}{2}\varepsilon_0 T^2 \qquad (2)$$

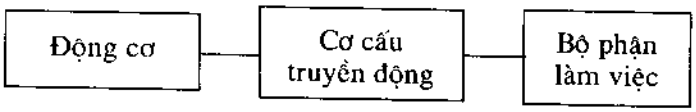
Từ (1) suy ra $\varepsilon_0 = -40\pi / T$. Thế kết quả này vào (2) suy ra

$$160\pi = 40\pi T - 20\pi T = 20\pi T \quad \Rightarrow \quad T = 8s$$

5. TRUYỀN ĐỘNG CƠ KHÍ ĐƠN GIẢN

5.1. Vị trí khâu truyền động trong máy

Trong một máy hoặc tổ hợp máy thường gồm 3 thành phần: động cơ, cơ cấu truyền động, bộ phận làm việc (hình 2.12)



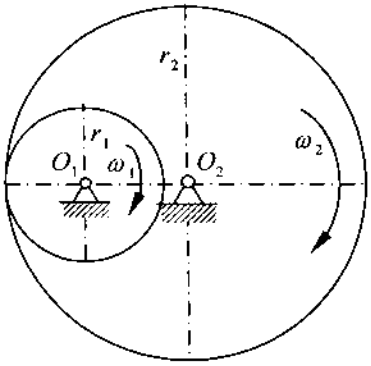
Hình 2.12

Ở đây, bước đầu hãy làm quen với một vài cơ cấu truyền động đơn giản nhằm biến chuyển động quay quanh một trục cố định thành chuyển động quay quanh một trục khác cố định, biến chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến, biến chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến và biến chuyển động tịnh tiến thành chuyển động quay.

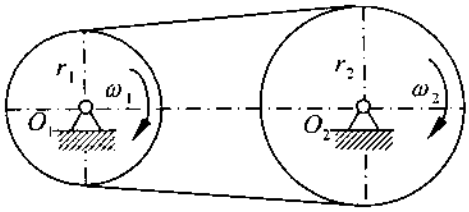
5.2. Vài loại truyền động đơn giản

a) Truyền động bằng cơ cấu bánh răng, đai truyền và dây xích. Truyền các chuyển động quay giữa hai trục cố định song song nhau người ta dùng cơ cấu bánh răng, đai truyền, xích như hình 2.13 và 2.14. Trong trường hợp biểu diễn trên hình 2.13, ta có

$$\frac{\omega_{1z}}{\omega_{2z}} = \frac{r_2}{r_1}$$

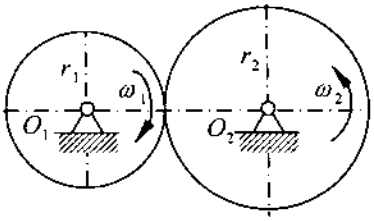


Hình 2.13a

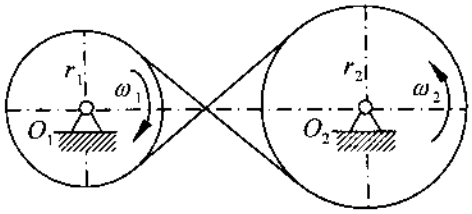


Hình 2.13b

Truyền động như hình 2.14, ta có $\dfrac{\omega_{1z}}{\omega_{2z}} = -\dfrac{r_2}{r_1}$.



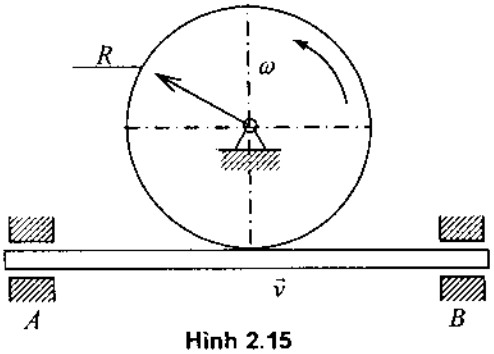
Hình 2.14a



Hình 2.14b

b) Truyền động bằng bánh răng–thanh răng

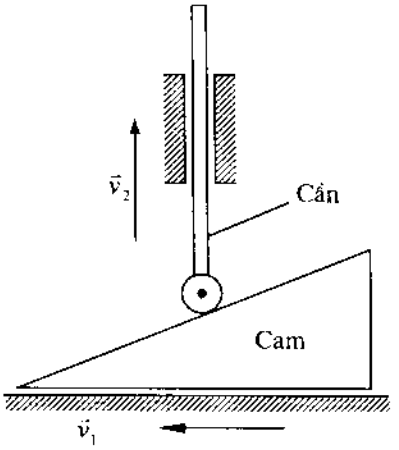
Để truyền chuyển động giữa một vật quay và một vật tịnh tiến người ta sử dụng cơ cấu bánh răng–thanh răng hoặc cơ cấu bánh–thanh ma sát (hình 2.15).



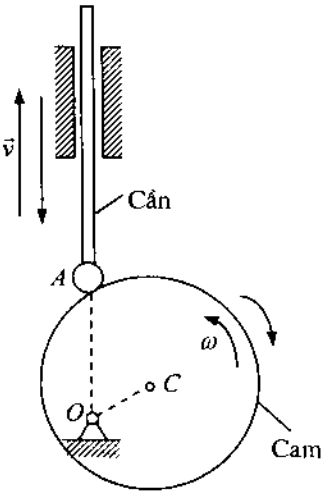
Hình 2.15

c) Truyền động bằng cơ cấu cam

Để truyền chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến hoặc chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến người ta có thể sử dụng các cơ cấu cam như hình 2.16.



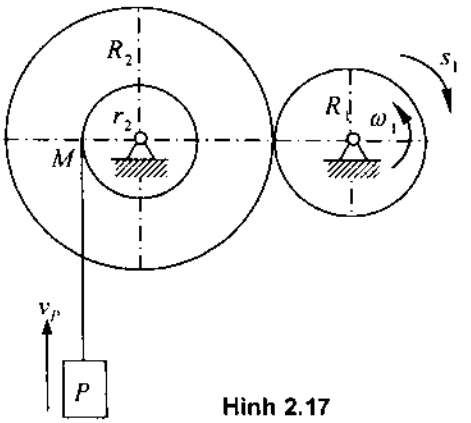
Hình 2.16a



Hình 2.16b

5.3. Thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.2. Cho cơ cấu truyền động như hình 2.17. Trục I có bán kính R_1 chuyển động quay với vận tốc góc ω_1 và gia tốc góc ε_1. Trục II gồm hai tầng có bán kính tương ứng R_2 và r_2. Tìm vận tốc và gia tốc của vật P.



Hình 2.17

Bài giải. Hệ gồm có trục I và trục II chuyển động quay, còn vật P chuyển động tịnh tiến. Suy ra:

$$\frac{\omega_{1z}}{\omega_{2z}} = \frac{\varepsilon_{1z}}{\varepsilon_{2z}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Do đó $$\omega_{2z} = -\frac{R_1}{R_2}\omega_1;\ \varepsilon_2 = -\frac{R_1}{R_2}\varepsilon_1$$

Vận tốc điểm P:

$$v_P = v_M = r_2\omega_2 = \frac{r_2 R_1}{R_2}\omega_1$$

Gia tốc điểm P:

$$a_P = a_M = r_2\varepsilon_2 = \frac{r_2 R_1}{R_2}\varepsilon_1$$

Do ω_1 và ε_1 ngược chiều nhau (hình 2.17) nên vật P chuyển động lên chậm dần do $\vec{v}_P$ và $\vec{a}_P$ ngược chiều nhau.

Thí dụ 2.3. Hộp biến tốc (hình 2.18) có các bánh răng với số răng tương ứng là $z_1 = 10$; $z_2 = 60$; $z_3 = 12$; $z_4 = 70$. Tìm tỷ số truyền động của hai trục A và B và chiều quay của trục B.

Lời giải. Tỷ số truyền động giữa bánh răng 1 và 2 là:

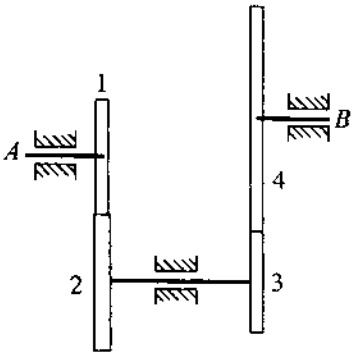
$$\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} = -\frac{z_2}{z_1} \qquad (1)$$

Tỷ số truyền động giữa bánh răng 3 và 4:

$$\frac{\bar{\omega}_3}{\bar{\omega}_4} = -\frac{z_4}{z_3} \qquad (2)$$

Từ hình vẽ 2.18 ta có

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3,\ \bar{\omega}_A = \bar{\omega}_1,\ \bar{\omega}_B = \bar{\omega}_4$$



Hình 2.18

Do đó từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2}\cdot\frac{\bar{\omega}_3}{\bar{\omega}_4} = \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_4} = \frac{\bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \qquad (3)$$

Thay số vào công thức (3) nhận được tỷ số truyền động:

$$\frac{\bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B} = \frac{60}{10}\frac{70}{12} = 35$$ (bánh răng A quay cùng chiều bánh răng B).

Chương 3

CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM VÀ VẬT RẮN

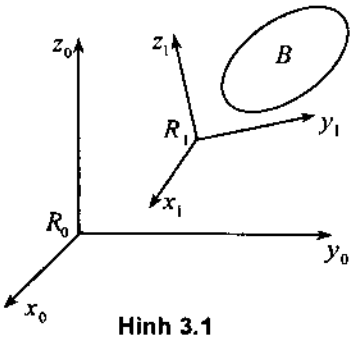
Trong hai chương trước chúng ta đã khảo sát chuyển động của mô hình điểm và mô hình vật rắn đối với hệ quy chiếu cố định. Trong thực tế tính toán và nghiên cứu lý thuyết nhiều khi người ta phải khảo sát chuyển động của điểm hoặc vật rắn đối với một hệ quy chiếu R_1 nào đó mà hệ quy chiếu R_1 này lại chuyển động đối với hệ quy chiếu R_0. Trong chương này, trên cơ sở đưa ra các khái niệm chuyển động tuyệt đối, chuyển động tương đối, chuyển động theo, chúng ta sẽ thiết lập các công thức cộng vận tốc, cộng gia tốc của điểm, công thức cộng vận tốc góc và công thức cộng gia tốc góc của vật rắn.

1. KHÁI NIỆM CHUYỂN ĐỘNG TUYỆT ĐỐI, CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI VÀ CHUYỂN ĐỘNG THEO

1.1. Chuyển động tuyệt đối, chuyển động tương đối và chuyển động theo của vật rắn

a) Mô hình. Vật rắn B chuyển động đối với hệ quy chiếu động R_1, hệ quy chiếu động R_1 lại chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định R_0 (hình 3.1).

b) Các định nghĩa. Chuyển động của vật rắn B đối với hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn B xác định trong hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là vận tốc góc tuyệt đối, gia tốc góc tuyệt đối. Ký hiệu là $\vec{\omega}_a, \vec{\varepsilon}_a$. Chuyển động của vật rắn B đối với hệ quy chiếu động R_1 được gọi là chuyển động tương đối. Vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn B xác định trong hệ quy chiếu động R_1 được gọi là vận tốc góc tương đối, gia tốc góc tương đối. Ký hiệu là $\vec{\omega}_r, \vec{\varepsilon}_r$. Chuyển động của hệ quy chiếu động R_1 đối với hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động theo. Vận tốc góc, gia tốc góc của hệ quy chiếu động R_1 xác định trong hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là vận tốc góc theo, gia tốc góc theo. Ký hiệu là $\vec{\omega}_e, \vec{\varepsilon}_e$.



Hình 3.1

So sánh các định nghĩa trên với định nghĩa vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn trong chương 2 phần động học, ta có các hệ thức

$$\vec{\omega}_a = {}^{R_0}\vec{\omega}^B \ , \ \vec{\omega}_r = {}^{R_1}\vec{\omega}^B \ , \ \vec{\omega}_e = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1},$$

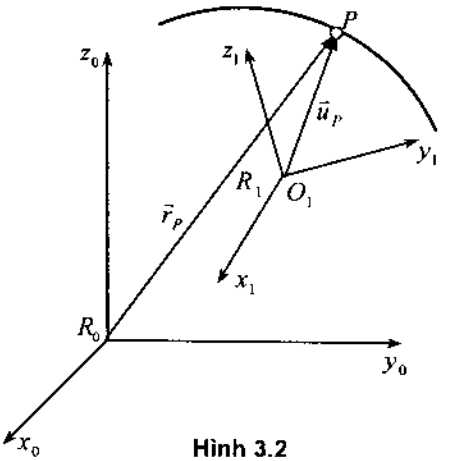
$$\vec{\varepsilon}_a = {}^{R_0}\vec{\varepsilon}^B \ , \ \vec{\varepsilon}_r = {}^{R_1}\vec{\varepsilon}^B \ , \ \vec{\varepsilon}_e = {}^{R_0}\vec{\varepsilon}^{R_1}.$$

1.2. Chuyển động tuyệt đối, chuyển động tương đối và chuyển động theo của điểm

a) Mô hình. Điểm P chuyển động đối với hệ quy chiếu động R_1. Hệ quy chiếu động R_1 lại chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định R_0 (hình 3.2).

b) Các định nghĩa. Chuyển động của điểm P đối với hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc, gia tốc của điểm P xác định trong hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối. Ký hiệu là $\vec{v}_a, \vec{a}_a$.

$$\vec{v}_a(P) = \frac{{}^{R_0}d\vec{r}_P}{dt} \ , \ \vec{a}_a(P) = \frac{{}^{R_0}d^2\vec{r}_P}{dt^2}.$$



Hình 3.2

Chuyển động của điểm P đối với hệ quy chiếu động R_1 được gọi là chuyển động tương đối. Vận tốc, gia tốc của điểm P xác định trong hệ quy chiếu động R_1 được gọi là vận tốc tương đối, gia tốc tương đối. Ký hiệu là $\vec{v}_r, \vec{a}_r$

$$\vec{v}_r(P) = \frac{{}^{R_1}d\vec{u}_P}{dt} \ , \ \vec{a}_r(P) = \frac{{}^{R_1}d^2\vec{u}_P}{dt^2}.$$

Chuyển động của hệ quy chiếu động R_1 đối với hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là chuyển động theo. Vận tốc góc, gia tốc góc của hệ quy chiếu động R_1 xác định trong hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là vận tốc góc theo, gia tốc góc theo. Ký hiệu là $\vec{\omega}_e, \vec{\varepsilon}_e$. Một điểm P* thuộc hệ quy chiếu động R_1 mà ở thời điểm khảo sát trùng với điểm P được gọi là trùng điểm của P tại thời điểm đó. Chú ý rằng trong quá trình chuyển động có nhiều điểm $P^*(t_i)$ của hệ quy chiếu động R_1 là trùng điểm của điểm P ở những thời điểm khác nhau. Vận tốc, gia tốc của trùng điểm P*, một điểm thuộc hệ quy chiếu R_1, xác định trong hệ quy chiếu cố định R_0 được gọi là vận tốc theo, gia tốc theo của điểm P. Ký hiệu là $\vec{v}_e$, $\vec{a}_e$

$$\vec{v}_e(P) = \vec{v}_a(P^*) \ , \ \vec{a}_e(P) = \vec{a}_a(P^*).$$

2. ĐỊNH LÝ CỘNG VẬN TỐC VÀ ĐỊNH LÝ CỘNG GIA TỐC CỦA ĐIỂM

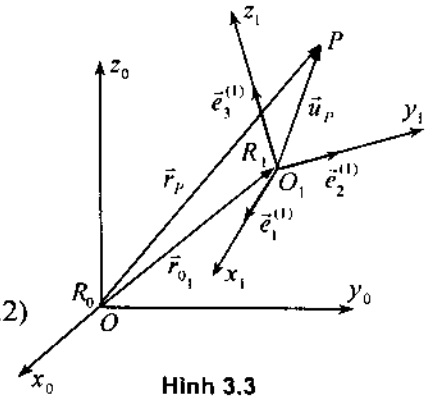
2.1. Định lý cộng vận tốc điểm

Xét mô hình chuyển động tương đối của điểm P như hình 3.3. Từ hình vẽ ta có

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{0_1} + \overrightarrow{O_1P} = \vec{r}_{0_1} + x_P^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + y_P^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + z_P^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.1)$$

Đạo hàm biểu thức (2.1) theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R_0 ta được

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{r}_P}{dt} = \frac{{}^{R_0}d\vec{r}_{0_1}}{dt} + x_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + y_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + z_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} + \frac{dx_P^{(1)}}{dt}\vec{e}_1^{(1)} + \frac{dy_P^{(1)}}{dt}\vec{e}_2^{(1)} + \frac{dz_P^{(1)}}{dt}\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.2)$$



Hình 3.3

Theo định nghĩa ta có

$$\vec{v}_r = \frac{dx_P^{(1)}}{dt}\vec{e}_1^{(1)} + \frac{dy_P^{(1)}}{dt}\vec{e}_2^{(1)} + \frac{dz_P^{(1)}}{dt}\vec{e}_3^{(1)}$$

$$\vec{v}_e = \frac{{}^{R_0}d\vec{r}_{0_1}}{dt} + x_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + y_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + z_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt}$$

Vậy từ (2.2) thu được công thức cộng vận tốc

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad (2.3)$$

Định lý 3.1. Ở mỗi thời điểm, vận tốc tuyệt đối của điểm P bằng tổng hình học vận tốc tương đối và vận tốc theo của nó.

2.2. Định lý cộng gia tốc điểm

Đạo hàm hai lần biểu thức (2.1) theo thời gian t ta được

$$\frac{{}^{R_0}d^2\vec{r}_P}{dt^2} = \frac{{}^{R_0}d^2\vec{r}_{0_1}}{dt^2} + x_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d^2\vec{e}_1^{(1)}}{dt^2} + y_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d^2\vec{e}_2^{(1)}}{dt^2} + z_P^{(1)}\frac{{}^{R_0}d^2\vec{e}_3^{(1)}}{dt^2}$$
$$+2\left(\frac{dx_P^{(1)}}{dt}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + \frac{dy_P^{(1)}}{dt}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + \frac{dz_P^{(1)}}{dt}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt}\right)$$
$$+\frac{d^2x_P^{(1)}}{dt^2}\vec{e}_1^{(1)} + \frac{d^2y_P^{(1)}}{dt^2}\vec{e}_2^{(1)} + \frac{d^2z_P^{(1)}}{dt^2}\vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.4)$$

Chú ý rằng

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_1^{(1)},\ \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_2^{(1)},\ \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_3^{(1)} \qquad (2.5)$$

Thế (2.5) vào (2.4) ta được

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C \qquad (2.6)$$

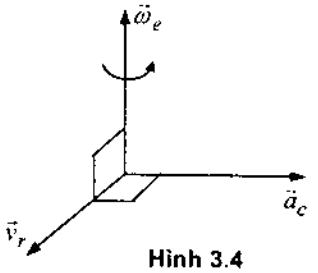
Trong đó $\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$. Gia tốc $\vec{a}_C$ được gọi là gia tốc Coriolis, mang tên nhà vật lý và kỹ sư người Pháp Gaspard Gustave de Coriolis (1792–1843).

Định lý 3.2. Ở mỗi thời điểm, gia tốc tuyệt đối của điểm P bằng tổng hình học gia tốc tương đối, gia tốc theo, và gia tốc Coriolis của nó

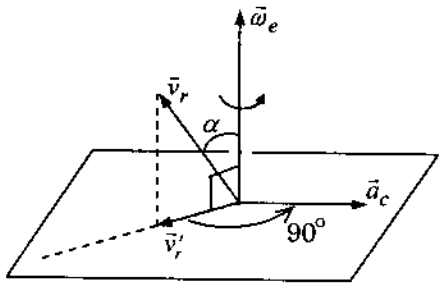
Chú ý. Khi làm bài tập nên sử dụng quy tắc thực hành sau đây để xác định gia tốc Côriôlis.

Khi véctơ $\vec{v}_r$ vuông góc với véctơ $\vec{\omega}_e$ (ví dụ điểm P chuyển động trên một mặt phẳng), ta quay véctơ $\vec{v}_r$ theo chiều quay của $\vec{\omega}_e$ một góc 90^0 ta được phương và chiều của véctơ $\vec{a}_c$. Độ lớn của nó được xác định bởi công thức $|a_c| = 2\omega_e v_r$ (hình 3.4)

Khi véctơ $\vec{v}_r$ không vuông góc với véctơ $\vec{\omega}_e$, dựng mặt phẳng ($\vec{v}_r, \vec{\omega}_e$). Trên mặt phẳng đó, chiếu $\vec{v}_r$ lên đường thẳng vuông góc với $\vec{\omega}_e$ ta được $\vec{v}_r'$. Sau đó quay véctơ $\vec{v}_r'$ theo chiều quay của $\vec{\omega}_e$ đi một góc 90^0 xác định được phương và chiều của véctơ $\vec{a}_c$. Độ lớn của nó được tính bởi công thức $|\vec{a}_c| = 2\omega_e v_r' = 2\omega_e v_r \sin\alpha$ (hình 3.5).



Hình 3.4



Hình 3.5

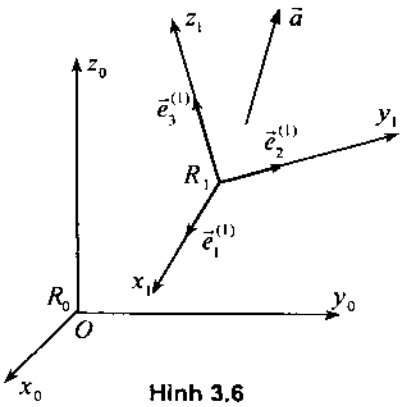
3. ĐỊNH LÝ CỘNG VẬN TỐC GÓC VÀ ĐỊNH LÝ CỘNG GIA TỐC GÓC CỦA VẬT RẮN

3.1. Đạo hàm của vectơ trong các hệ quy chiếu khác nhau

Cho véctơ $\vec{a}$ thay đổi theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R_1 (hình 3.6). Trong hệ quy chiếu này véctơ $\vec{a}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\vec{a} = a_1^{(1)}\vec{e}_1^{(1)} + a_2^{(1)}\vec{e}_2^{(1)} + a_3^{(1)}\vec{e}_3^{(1)} \quad (3.1)$$

Trong đó $\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}$ là các véctơ đơn vị của hệ toạ độ vuông góc R_1 còn $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$, $a_3^{(1)}$ là hình chiếu của véctơ $\vec{a}$ lên các trục toạ độ đó. Đạo hàm (3.1) theo thời gian t ta được



Hình 3.6

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt} = \frac{da_1^{(1)}}{dt}\vec{e}_1^{(1)} + \frac{da_2^{(1)}}{dt}\vec{e}_2^{(1)} + \frac{da_3^{(1)}}{dt}\vec{e}_3^{(1)}$$

$$+ a_1^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} + a_2^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} + a_3^{(1)}\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} \quad (3.2)$$

Chú ý rằng

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_1^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_1^{(1)}, \quad \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_2^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_2^{(1)}, \quad \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_3^{(1)}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{e}_3^{(1)} \quad (3.3)$$

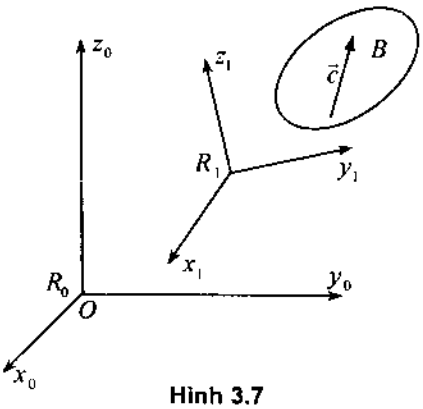
Thế (3.1) vào (3.2) suy ra

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{a}}{dt} = \frac{{}^{R_1}d\vec{a}}{dt} + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{a} \quad (3.4)$$

Hệ thức (3.4) cho ta mối quan hệ giữa đạo hàm của véctơ $\vec{a}$ trong hai hệ quy chiếu khác nhau.

3.2. Định lý cộng vận tốc góc của vật rắn

Xét véctơ $\vec{c}$ tuỳ ý của vật rắn và $\vec{c} \neq 0$. Vật rắn B chuyển động đối với hệ quy chiếu R_1, hệ quy chiếu R_1 lại chuyển động đối với hệ quy chiếu R_0. Theo định nghĩa vận tốc góc ta có công thức



Hình 3.7

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{c}}{dt} = {}^{R_0}\vec{\omega}^{B} \times \vec{c} \quad (3.5)$$

$$\frac{{}^{R_1}d\vec{c}}{dt} = {}^{R_1}\vec{\omega}^{B} \times \vec{c} \quad (3.6)$$

Mặt khác theo công thức (3.4) ta có

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{c}}{dt} = \frac{{}^{R_1}d\vec{c}}{dt} + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{c} \quad (3.7)$$

Thế vào các biểu thức (3.5) (3.6) vào (3.7) xác định được

$$^{R_0}\vec{\omega}^B \times \vec{c} = {}^{R_1}\vec{\omega}^B \times \vec{c} + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times \vec{c} = \left({}^{R_1}\vec{\omega}^B + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1}\right) \times \vec{c}$$

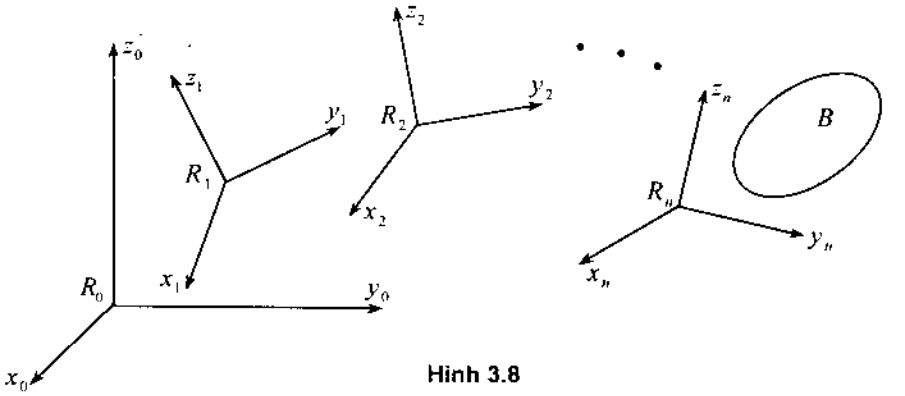
Do $\vec{c} \neq 0$ nên từ công thức trên suy ra

$$^{R_0}\vec{\omega}^B = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} + {}^{R_1}\vec{\omega}^B, \quad hay \quad \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \tag{3.8}$$

Định lý 3.3. Ở mỗi thời điểm, vận tốc góc tuyệt đối của vật rắn B bằng tổng hình học vận tốc góc tương đối và vận tốc góc theo của nó.

Nếu áp dụng công thức (3.8) đối với n+1 hệ quy chiếu như hình 3.8 ta được

$$^{R_0}\vec{\omega}^B = {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} + {}^{R_1}\vec{\omega}^{R_2} + \cdots + {}^{R_{n-1}}\vec{\omega}^{R_n} + {}^{R_n}\vec{\omega}^B \tag{3.9}$$



Hình 3.8

3.3. Định lý cộng gia tốc góc của vật rắn

Đạo hàm theo thời gian ở trong hệ quy chiếu R_0 hệ thức (3.8) ta được

$$\frac{^{R_0}d}{dt}\left({}^{R_0}\vec{\omega}^B\right) = \frac{^{R_0}d}{dt}\left({}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1}\right) + \frac{^{R_0}d}{dt}\left({}^{R_1}\vec{\omega}^B\right)$$

Chú ý đến công thức (3.4) suy ra

$$^{R_0}\vec{\varepsilon}^B = {}^{R_0}\vec{\varepsilon}^{R_1} + \frac{^{R_1}d}{dt}\left({}^{R_1}\vec{\omega}^B\right) + {}^{R_0}\vec{\omega}^{R_1} \times {}^{R_1}\vec{\omega}^B \tag{3.10}$$

Theo định nghĩa $^{R_0}\vec{\varepsilon}^B = \vec{\varepsilon}_a$, $^{R_0}\vec{\varepsilon}^{R_1} = \vec{\varepsilon}_e$, $^{R_1}\vec{\varepsilon}^B = \vec{\varepsilon}_r$. Thế vào công thức (3.10) suy ra

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_e + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \tag{3.11}$$

Định lý 3.4. Ở mỗi thời điểm gia tốc góc tuyệt đối của vật rắn B bằng tổng hình học gia tốc góc tương đối, gia tốc góc theo và gia tốc góc phụ (hoặc gia tốc góc Resal) $\vec{\varepsilon}_p = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$.

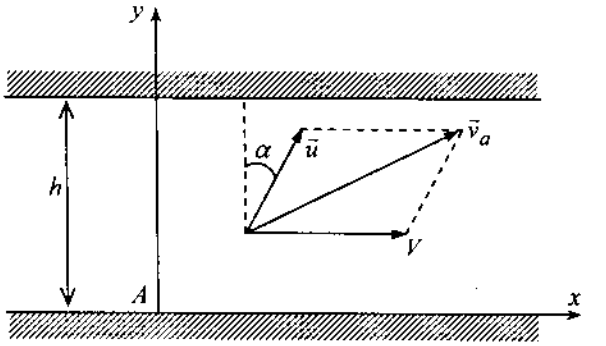
Chú ý. Khi $\vec{\omega}_e$ và $\vec{\omega}_r$ song song với nhau từ (3.11) suy ra

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r \tag{3.12}$$

4. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

Thí dụ 3.1. Hai bờ của một con sông song song với nhau. Chiều rộng của dòng sông là h. Dòng nước chảy với vận tốc $\vec{v}$ có trị số không đổi. Một người lái thuyền sang ngang với vận tốc tương đối là $\vec{u}$. Xác định hướng của vận tốc $\vec{u}$ để cho thời gian sang sông là ngắn nhất. Với điều kiện đó xác định vị trí cập bến của thuyền.

Lời giải. Vật khảo sát là con thuyền. Hệ quy chiếu động là dòng nước, hệ quy chiếu cố định là một mốc ở bờ sông. Khi đó con thuyền sẽ tham gia hai chuyển động: chuyển động tương đối với vận tốc $\vec{u}$ và chuyển động theo với vận tốc $\vec{v}$.



Hình 3.9

Theo định lý hợp vận tốc:

$$\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v}$$

Chiếu đẳng thức này lên các trục toạ độ suy ra

$$v_{ax} = u\sin\alpha + v$$

$$v_{ay} = u\cos\alpha$$

Từ đó tích phân lên, với điều kiện đầu $x(0) = 0$; $y(0) = 0$, ta được

$$x = (u\sin\alpha + v)t$$

$$y = (u\cos\alpha)t$$

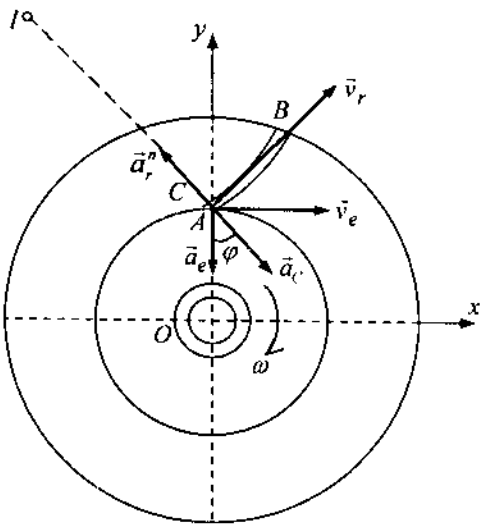
Khi thuyền cập bến: $y = (u\cos\alpha)t = h$. Vậy thời gian sang sông là: $t = \dfrac{h}{u\cos\alpha}$.

Khi $\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow t_{\min} = \dfrac{h}{u}$. Vị trí cập bến của con thuyền sẽ cách một đoạn so với điểm xuất phát $x = \dfrac{v}{u}h$

Thí dụ 3.2. Một máy nén khí có các ống khí cong quay đều quanh trục O vuông góc với mặt phẳng hình vẽ với vận tốc góc ω. Không khí chạy dọc theo các ống với vận tốc có trị số không đổi v_r. Tìm hình chiếu vận tốc và gia tốc

của một phân tử khí nằm ở điểm C của ống AB trên các trục Ox, Oy. Cho biết bán kính cong của ống ở điểm C là ρ, góc giữa pháp tuyến của đường cong AB ở điểm C và bán kính CO là φ. Bán kính CO bằng r.

Lời giải. Ta khảo sát chuyển động của phần tử khí ở vị trí C của ống dẫn khí AB. Chọn rôto máy nén khí làm hệ quy chiếu động và giá máy làm hệ quy chiếu cố định. Với cách chọn trên, chuyển động tương đối của phần tử khí là chuyển động cong đều trong rãnh AB, chuyển động theo là chuyển động của rôto quay đều quanh trục O. Chuyển động tuyệt đối của phần tử khí chưa biết và cần xác định.



Hình 3.10

Bài toán vận tốc. Sử dụng định lý hợp vận tốc.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad (1)$$

Trong bài toán này $\vec{v}_r$ đã biết, vuông góc với pháp tuyến tại C. Do rôto quay quanh O nên $\vec{v}_e$ của phần tử lỏng vuông góc với bán kính OC hướng theo chiều quay của rôto và độ lớn là $v_e = OC\omega = r\omega$. Hai véctơ $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ tạo với nhau một góc φ (hình 3.10). Chiếu đẳng thức (1) lên các trục Ox, Oy ta được:

$$v_{ax} = v_r \cos\varphi + r\omega$$
$$v_{ay} = v_r \sin\varphi$$

Bài toán gia tốc. Sử dụng định lý hợp gia tốc ta có:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C \qquad (2)$$

Theo giả thiết, hạt khí chuyển động đều trong rãnh cong AB, nên $a_r^\tau = 0, a_r^n = v_r^2/\rho$. Véctơ $\vec{a}_r^n$ hướng từ C về I. Do rôto quay đều nên $a_e^\tau = 0, a_e^n = r\omega^2$. Véctơ $\vec{a}_e^n$ hướng từ C vào O. Do $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}_e$ nên véctơ gia tốc Coriolis $\vec{a}_C$ được xác định theo quy tắc đã nêu trong hình 3.4. Véctơ $\vec{a}_C$ hướng vuông góc với $\vec{v}_r$ và ngược chiều với $\vec{a}_r^n$, $a_C = 2\omega v_r$. Căn cứ vào hình vẽ 3.10 và biểu thức (2) ta dễ dàng tìm được các thành phần của véctơ gia tốc tuyệt đối của điểm C.

$$a_{ax} = \left(2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\cdot\sin\varphi$$

$$a_{ay} = -\left[r\omega^2 + \left(2v_r\omega - \frac{v_r^2}{\rho}\right)\cdot\cos\varphi\right]$$

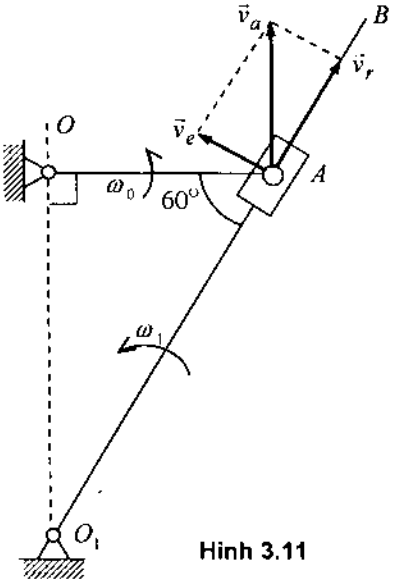
Thí dụ 3.3. Khảo sát chuyển động của cơ cấu culít như hình 3.11. Giả thiết rằng tay quay $OA = 0,2\,m$ quay đều quanh O với vận tốc $\omega_0 = 4\pi$ (1/s). Nhờ con chạy A có thể trượt dọc cần lắc O_1B mà chuyển động được truyền sang cần lắc O_1B. Ở thời điểm khảo sát $\widehat{O_1AO} = 60^0$, $\widehat{AOO_1} = 90^0$. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của cần lắc ở vị trí đó.

Bài giải. Chọn con trượt A làm vật điểm khảo sát. Lấy cần lắc O_1B làm hệ quy chiếu động, giá máy làm hệ quy chiếu cố định.

– Chuyển động tuyệt đối: chuyển động của điểm A đối với giá cố định. Đó là chuyển động tròn đều, tâm O, bán kính OA.

– Chuyển động tương đối: chuyển động của điểm A đối với thanh O_1B. Đó là chuyển động thẳng.

– Chuyển động theo: chuyển động của thanh O_1B đối với giá cố định. Đó là chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.



Hình 3.11

Bài toán vận tốc. Áp dụng định lý hợp vận tốc

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad (1)$$

Vì chuyển động của điểm A đã biết, nên véctơ $\vec{v}_a$ đã biết hoàn toàn, $\vec{v}_a \perp$ OA, có chiều phù hợp với chiều quay của ω_0, $v_a = a\omega_0$. Véctơ $\vec{v}_r$ hướng dọc theo O_1B, chiều và trị số của nó chưa biết. Cần lắc O_1B chuyển động quanh O_1, nên trùng điểm A* của A chuyển động tròn. Do đó $\vec{v}_e \perp O_1A$. Ta cũng chưa biết được chiều và trị số của nó.

Từ hình vẽ 3.11 ta dễ dàng tìm được

$$v_e = v_a \sin 30^0; \quad v_r = v_a \cos 30^0$$

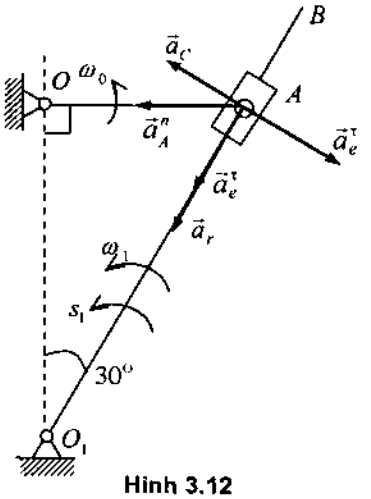
Do $v_a = OA\omega_0 = 0,8\,\pi$ (m/s). Nên ta có:

$$v_r = 0,4\sqrt{3}\pi, \quad v_e = 0,4\pi$$

Biết giá trị và hướng của $\vec{v}_e$ ta tìm được chiều quay và trị số của cần lắc ω_1

$$\omega_1 = \frac{v_e}{O_1A} = \frac{0,4\pi}{2.OA} = \pi \quad (s^{-1})$$

Vận tốc góc ω_1 có chiều ngược chiều kim đồng hồ như hình vẽ.



Hình 3.12

Bài toán gia tốc. Áp dụng công thức

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C$$

Do chuyển động tuyệt đối là chuyển động tròn đều nên

$$\vec{a}_a = \vec{a}_a^n.$$

Chuyển động theo là chuyển động quay quanh một trục cố định nên $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t$.

Công thức gia tốc trên có dạng:

$$\vec{a}_a^n = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_C \qquad (2)$$

trong đó:

$\vec{a}_a^n$ hướng từ A vào O; $a_a^n = OA.\omega_0^2 = 0,2.16\pi^2 = 3,2\pi^2$;

$\vec{a}_e^n$ hướng từ A vào O_1; $a_e^n = O_1A.\omega_1^2 = 0,4\pi^2$;

$\vec{a}_C$ được xác định theo quy tắc nêu trên. Véctơ $\vec{a}_C$ vuông góc với O_1B như hình vẽ. Độ lớn $a_C = 2\omega_1 v_r = 2(0,4\pi)4\sqrt{3}\pi = 0,8\pi\sqrt{3}\pi^2$. Véctơ $\vec{a}_e^\tau$ hướng vuông góc O_1B nhưng chưa biết chiều và trị số. Véctơ $\vec{a}_r$ hướng dọc theo cần lắc O_1B nhưng chưa biết chiều và trị số. Chiếu đẳng thức (2) lên trục O_1B và trục vuông góc với O_1B

$$-a_a^n \cos 60^0 = -a_r - a_e^n$$
$$a_a^n \sin 60^0 = a_C - a_e^\tau$$

Từ đó suy ra

$$a_r = a_a^n \cos 60^0 - a_e^n = 1,6\pi^2 - 0,4\pi^2 = 1,2\pi^2$$
$$a_e^\tau = a_C - a_a^n \sin 60^0 = 0,8\sqrt{3}\pi^2 - 1,6\sqrt{3}\pi^2 = -0,8\sqrt{3}\pi^2$$

Như vậy véctơ $\vec{a}_e^\tau$ ngược chiều với chiều đã vẽ trên hình 3.12.

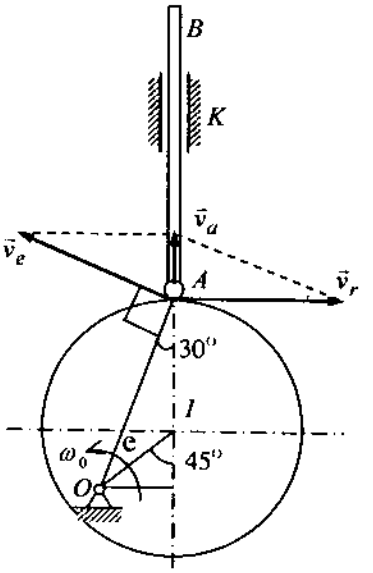
Trị số của gia tốc góc của cần lắc O_1B là

$$\varepsilon_1 = \frac{a_e^\tau}{O_1A} = \frac{0,8\sqrt{3}\pi^2}{0,4} = 2\sqrt{3}\pi^2 \ 1/s^2$$

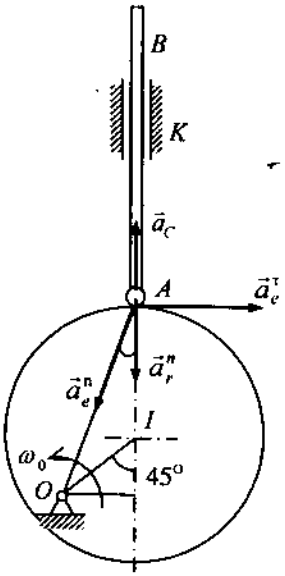
Căn cứ vào chiều đúng của $\vec{a}_e^\tau$, ta biết được chiều của $\vec{\varepsilon}_1$. Trên hình vẽ $\vec{\varepsilon}_1$ có chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Thí dụ 3.4. Khảo sát chuyển động của cơ cấu cam. Cho biết cam là đĩa tròn quay đều quanh trục cố định O với vận tốc góc ω_0. Khoảng cách giữa tâm I của đĩa và O là *e*. Cần AB chuyển động tịnh tiến dọc theo rãnh định hướng K. Xác định vận tốc và gia tốc của cần ở vị trí như hình 3.13.

Bài giải. Ta khảo sát chuyển động của điểm A trên cần. Chọn hệ động là cam, hệ cố định là giá máy. Như thế chuyển động tương đối của A là chuyển động tròn quanh tâm I. Chuyển động theo là chuyển động quay của cam quanh O. Chuyển động tuyệt đối là chuyển động thẳng đứng lên xuống theo trục AB.



Hình 3.13



Hình 3.14

Bài toán vận tốc. Sử dụng định lý hợp vận tốc

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \qquad (1)$$

Trong thí dụ này $\vec{v}_e$ đã biết, vuông góc với OA và có độ lớn là $v_e = l\omega_0$. Trong đó

$$l = OA = \sqrt{\left(r + e\cos 45^0\right)^2 + \left(e\sin 45^0\right)^2} = \sqrt{r^2 + e^2 + er\sqrt{2}}$$

Véc tơ $\vec{v}_r$ vuông góc với IA, chưa biết chiều và trị số. Véc tơ $\vec{v}_a$ hướng

theo trục AB chưa biết về chiều và trị số. Dựa trên hình vẽ 3.13 và công thức (1) ta dễ dàng xác định được

$$v_a = v_e \cos 60^0 = \frac{1}{2} l\omega_0,\ v_r = v_e \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega_0$$

Bài toán gia tốc. Sử dụng định lý hợp gia tốc

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C \qquad (2)$$

Do cam quay đều, nên $a_e^\tau = 0; a_e^n = l\omega_0^2$. Điểm A chuyển động tương đối trên vành cam nên $\vec{a}_r = \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n$. Trong đó $\vec{a}_r^n$ hướng từ A vào I và có giá trị

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{r} = \frac{3}{4r} l^2\omega_0^2$$

Thành phần $\vec{a}_r^\tau$ hướng vuông góc với IA, nên chưa biết về chiều và trị số. Do $\vec{v}_r \perp \vec{\omega}_e$ nên véctơ gia tốc $\vec{a}_C$ được xác định theo quy tắc đã nêu trên hình 3.4. Véctơ $\vec{a}_C$ vuông góc với $\vec{v}_r$ và ngược chiều với $\vec{a}_r^n$; $a_C = 2\omega_0 v_r = l\omega_0^2\sqrt{3}$. Do cần chuyển động tịnh tiến, nên $\vec{a}_a$ hướng dọc thanh AB. Ta chưa biết về chiều và trị số của nó. Như thế hệ thức (2) bây giờ có dạng

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_C \qquad (3)$$

Trong đó hai véctơ $\vec{a}_a$ và $\vec{a}_r^\tau$ chưa biết chiều về chiều và trị số (hình 3.14). Chiếu hệ thức (3) lên phương IA ta được

$$a_a = a_e^n \cos 30^0 - a_r^n + a_C = -l\omega_0^2 \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4r} l^2\omega_0^2 + l\omega_0^2\sqrt{3}$$

hay $$a_a = -l\omega_0^2\left(\frac{3l}{4r} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Do đó vị trí như hình 3.14 thì $l > r$; vậy $a_a < 0$; $\vec{a}_a$ phải hướng từ A tới I. Muốn tìm $\vec{a}_r^\tau$ ta phải chiếu hệ thức (3) lên phương vuông góc với AI.

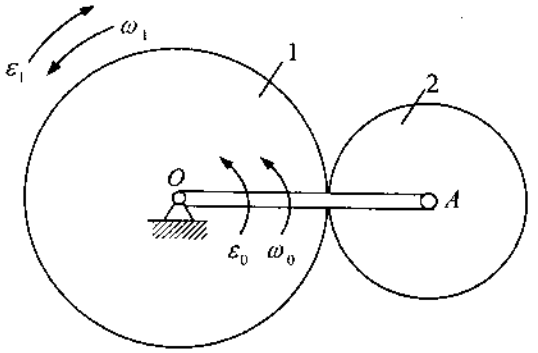
Nhận xét chung: Khi tính toán vận tốc và gia tốc trong chương này, ta thường dẫn đến việc giải phương trình véctơ.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \sum_{j=1}^{m} \vec{b}_j$$

Nếu $\vec{a}_i, \vec{b}_j$ là các véctơ trong không gian, thì phương trình trên tương đương với ba phương trình vô hướng. Bài toán giải được khi có ba ẩn. Nếu $\vec{a}_i, \vec{b}_j$ là các

véctơ nằm cùng trong một mặt phẳng thì phương trình véctơ trên tương đương với hai phương trình vô hướng. Bài toán giải được khi có hai ẩn. Ẩn ở đây là trị số và dấu của nó. Nếu trong phương trình trên, có một véctơ hoàn toàn chưa biết, bài toán thuộc loại bài toán tổng hợp. Nếu có hai (hoặc ba trong bài toán không gian) véctơ chưa biết về trị số, còn phương đã biết, bài toán thuộc loại bài toán phân tích. Như thế các thí dụ 3–1 và 3–2 ở trên thuộc bài toán tổng hợp, còn các thí dụ 3.3 và 3.4 là bài toán phân tích.

Thí dụ 3.5. Khảo sát động học cơ cấu vi sai trên hình 3.15. Bánh răng 1 quay quanh O với vận tốc góc ω_1, gia tốc góc ε_1 . Tay quay OA quay quanh O độc lập với bánh răng 1 với vận tốc góc ω_0, gia tốc góc ε_0 .Hai bánh răng 1 và 2 lăn không trượt trên nhau và có các bán kính tương ứng là r_1 và r_2. Bánh răng 2 có thể quay được quanh chốt A ở trên tay quay. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của bánh răng 2.



Hình 3.15

Lời giải. Cơ cấu vi sai trên hình 3.15 là cơ cấu phẳng có ba khâu động. Tay quay OA chuyển động quanh O. Bánh răng 1 chuyển động quay quanh trục cố định đi qua O. Bánh răng 2 chuyển động quay tương đối quanh A. Sự truyền động từ bánh răng 1 và tay quay OA sang bánh răng 2 thực hiện nhờ sự ăn khớp giữa các bánh răng 1 và 2. Cơ cấu vi sai trên hình 3.15 là cơ cấu hai bậc tự do. Để xác định chuyển động của cơ câu vi sai, cần phải biết trước vận tốc góc của hai khâu.

Tính toán. Ta chọn tay quay OA là hệ quy chiếu động. Đứng trong hệ quy chiếu này, cặp bánh răng 1 và 2 là cặp bánh răng ăn khớp ngoài. Do đó

$$\frac{\overline{\omega}_{1r}}{\overline{\omega}_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1} \qquad (1)$$

Theo công thức cộng vận tốc góc ta có

$$\overline{\omega}_{1r} = \overline{\omega}_{1a} - \overline{\omega}_{1e} = \omega_{1z} - \omega_{0z}, \quad \overline{\omega}_{2r} = \overline{\omega}_{2a} - \overline{\omega}_{2e} = \omega_{2z} - \omega_{0z} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{\omega_{1z} - \omega_{0z}}{\omega_{2z} - \omega_{0z}} = -\frac{r_2}{r_1}$$

Từ đó suy ra

$$\omega_{2z} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_{0z} - \frac{r_1}{r_2}\omega_{1z} \qquad (3)$$

Do công thức (3) đúng với mọi thời điểm. Đạo hàm công thức này xác định được

$$\varepsilon_{2z} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\varepsilon_{0z} - \frac{r_1}{r_2}\varepsilon_{1z}.$$

Chú ý. Việc áp dụng định lý cộng vận tốc góc và định lý cộng gia tốc góc sẽ được trình bày kỹ hơn trong các chương 4 và 5.

Chương 4

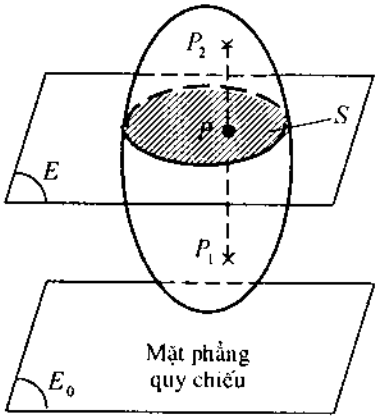
ĐỘNG HỌC VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG

Chuyển động song phẳng của vật rắn là một dạng chuyển động phức hợp hay gặp trong kỹ thuật. Khi nghiên cứu chuyển động song phẳng của vật rắn người ta thường đưa về bài toán trực quan hơn là nghiên cứu chuyển động của một vật rắn phẳng ở trong mặt phẳng của nó. Trong chương này chúng ta sẽ xét hai bài toán quan trọng của động học vật rắn chuyển động phẳng là bài toán xác định phương trình chuyển động, vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn và bài toán xác định phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc của các điểm thuộc vật rắn. Các phương pháp tính toán được trình bày trong chương này là phương pháp giải tích và phương pháp hình học.

1. ĐỊNH NGHĨA CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG VÀ MÔ HÌNH CHUYỂN ĐỘNG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

1.1. Định nghĩa chuyển động song phẳng

Định nghĩa. Chuyển động của vật rắn đối với một hệ quy chiếu cố định được gọi là chuyển động song phẳng nếu như mỗi điểm thuộc vật rắn luôn dịch chuyển trong một mặt phẳng xác định song song với một mặt phẳng quy chiếu đã được chọn trước (hình 4.1).



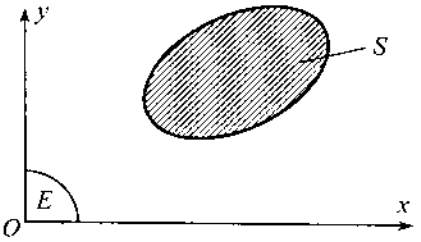
Hình 4.1

1.2. Mô hình chuyển động phẳng

Xét một đoạn thẳng P_1P_2 tùy ý thuộc vật rắn B mà P_1P_2 vuông góc với mặt phẳng quy chiếu E_0. Vì P_1 và P_2 là hai điểm của vật rắn B nên P_1P_2 = const. Mặt khác do vật rắn B chuyển động song phẳng nên các điểm P_1 và P_2 luôn dịch chuyển trong hai mặt phẳng song song nhau và song song với mặt phẳng quy chiếu E_0. Vậy P_1P_2 luôn song song với vị trí ban đầu của nó. Theo định nghĩa P_1P_2 thực hiện chuyển động tịnh tiến. Vậy chuyển

động của đoạn P_1P_2 được đặc trưng bởi chuyển động của điểm P của nó (hình 4.1). Vật rắn B là tập hợp vô số các thanh P_1P_2. Do đó chuyển động song phẳng của vật rắn B được đặc trưng bởi chuyển động của thiết diện phẳng S (tập các điểm P) trong mặt phẳng E chứa nó.

Như vậy việc khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn B trong không gian được đưa về bài toán khảo sát chuyển động của thiết diện phẳng S trong mặt phẳng E (hình 4.2). Ta quy ước gọi chuyển động của thiết diện phẳng S trong mặt phẳng E là chuyển động của vật rắn phẳng.



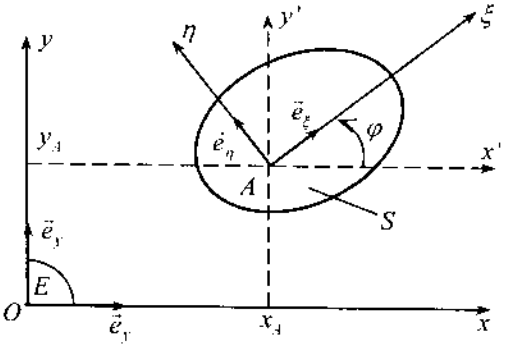
Hình 4.2

2. XÁC ĐỊNH PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG, VẬN TỐC GÓC, GIA TỐC GÓC CỦA VẬT RẮN PHẲNG

2.1. Phương trình chuyển động của vật rắn phẳng

Theo hình 4.3 vị trí của hình phẳng S trong mặt phẳng Oxy được xác định bởi ba tham số x_A, y_A và φ. Khi hình phẳng S chuyển động ba tham số trên thay đổi theo thời gian. Vì vậy phương trình chuyển động của vật rắn phẳng có dạng

$$x_A = x_A(t),$$
$$y_A = y_A(t), \qquad (2.1)$$
$$\varphi = \varphi(t).$$



Hình 4.3

Do đó vật rắn chuyển động phẳng có ba bậc tự do.

Chú ý. Xét trên góc độ phân tích chuyển động thì $x_A(t)$, $y_A(t)$ mô tả thành phần chuyển động tịnh tiến, còn $\varphi(t)$ mô tả thành phần chuyển động quay tương đối của hình phẳng S.

2.2. Vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn phẳng

Theo công thức xác định vận tốc góc của vật rắn, công thức (1.4) chương 2, ta có

$$\vec{\omega} = \dot{e}_\xi\left(\frac{{}^R d\vec{e}_\eta}{dt}\cdot\dot{e}_\zeta\right) + \vec{e}_\eta\left(\frac{{}^R d\dot{e}_\zeta}{dt}\cdot\vec{e}_\xi\right) + \dot{e}_\zeta\left(\frac{{}^R d\vec{e}_\xi}{dt}\cdot\vec{e}_\eta\right). \qquad (2.2)$$

Trong đó $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ là các véc tơ đơn vị trên các trục $A\xi$ và $A\eta$, còn $\vec{e}_\zeta$ là véc tơ đơn vị trên trục $A\zeta$ vuông góc với mặt phẳng S.

Trong bài toán phẳng như hình 4.3, theo các công thức (3.2) của chương 1, ta có

$$\frac{{}^R d\vec{e}_\xi}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\eta, \quad \frac{{}^R d\vec{e}_\eta}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\xi, \quad \frac{{}^R d\vec{e}_\zeta}{dt} = 0. \tag{2.3}$$

Thế các biểu thức (2.3) vào biểu thức (2.2) ta được:

$$\vec{\omega} = -(\dot{\varphi}\vec{e}_\xi.\vec{e}_\zeta)\vec{e}_\xi + (0.\vec{e}_\xi)\vec{e}_\eta + (\dot{\varphi}\vec{e}_\eta.\vec{e}_\eta)\vec{e}_\zeta \tag{2.4}$$

Do $\vec{e}_\xi.\vec{e}_\zeta = 0$, $\vec{e}_\eta.\vec{e}_\eta = 1$ ta có công thức vận tốc góc:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta \tag{2.5}$$

Đạo hàm hệ thức (2.5) theo thời gian *t* ở trong hệ quy chiếu R ta được biểu thức xác định gia tốc góc của hình phẳng S.

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{e}_\zeta \tag{2.6}$$

Vậy vận tốc góc của hình phẳng S chuyển động phẳng là một véc tơ nằm trên trục Oz vuông góc với mặt phẳng E và có biểu thức $\omega_z = \dot{\varphi}$, còn gia tốc góc của hình phẳng S là một véc tơ nằm trên trục Oz vuông góc với mặt phẳng E và được xác định bởi hệ thức $\varepsilon_z = \ddot{\varphi}$.

3. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ, VẬN TỐC, GIA TỐC CÁC ĐIỂM CỦA VẬT RẮN PHẲNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Đối với hệ các vật rắn phẳng đơn giản ta có thể sử dụng phương pháp giải tích để xác định vị trí, vận tốc, gia tốc các điểm của các vật rắn. Khi tính toán các bài toán động học hệ các vật rắn phẳng có cấu trúc phức tạp, người ta thường sử dụng các phép tính ma trận với sự áp dụng các phần mềm MAPLE, MATLAB, MATCAD.

3.1. Ma trận côsin chỉ hướng

a) Định nghĩa ma trận côsin chỉ hướng

Cho hình phẳng S và một hệ quy chiếu cố định R = Oxy (hình 4.3). Lấy một điểm A tùy ý trên hình phẳng S làm cực và gắn chặt vào hình phẳng S hệ quy chiếu $A\xi\eta$. Đồng thời ta gắn vào điểm A một hệ toạ độ Ax_1y_1 sao cho trong quá trình hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng Oxy luôn luôn thoả mãn điều kiện $Ax_1//Ox$, $Ay_1//Oy$. Ký hiệu các véc tơ đơn vị trên các trục Ox và Oy là $\vec{e}_x$ và $\vec{e}_y$, trên các trục $A\xi$ và $A\eta$ là $\vec{e}_\xi$ và $\vec{e}_\eta$.

Định nghĩa. Ma trận

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\vec{e}_x.\vec{e}_\xi & \vec{e}_x.\vec{e}_\eta\\ \vec{e}_y.\vec{e}_\xi & \vec{e}_y.\vec{e}_\eta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

được gọi là ma trận côsin chỉ hướng của hình phẳng S đối với hệ quy chiếu Oxy. Sau đây ta gọi tắt **A** là ma trận côsin chỉ hướng.

Chú ý. Ma trận côsin chỉ hướng **A** còn được gọi là ma trận quay hệ toạ độ Ax_1y_1 sang hệ toạ độ $A\xi\eta$, hay gọi tắt là ma trận quay.

b) Đạo hàm theo thời gian của ma trận côsin chỉ hướng

Biểu thức tính đạo hàm ma trận côsin chỉ hướng có dạng

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\dot{\varphi}\mathbf{I}^*\mathbf{A} \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}=(\ddot{\varphi}\mathbf{I}^*-\dot{\varphi}^2\mathbf{E})\mathbf{A} \tag{3.3}$$

Trong đó **E** là ma trận đơn vị cấp hai, còn $\mathbf{I}^*$ là ma trận có dạng

$$\mathbf{I}^*=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Chứng minh. Đạo hàm hệ thức (3.1) theo t ta được

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\dot{\varphi}\begin{bmatrix}-\sin\varphi & -\cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{bmatrix}=\dot{\varphi}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\dot{\varphi}\mathbf{I}^*\mathbf{A}$$

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\mathbf{I}^*\mathbf{A})=\ddot{\varphi}\mathbf{I}^*\mathbf{A}+\dot{\varphi}\mathbf{I}^*\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\ddot{\varphi}\mathbf{I}^*\mathbf{A}+\dot{\varphi}^2\mathbf{I}^{*2}\mathbf{A}$$

Do $$\mathbf{I}^{*2}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-\mathbf{E}$$

nên ta được $\dfrac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}=(\ddot{\varphi}\mathbf{I}^*-\dot{\varphi}^2\mathbf{E})\mathbf{A}$

c) Các tính chất cơ bản của ma trận côsin chỉ hướng

Tính chất 1. Ma trận côsin chỉ hướng là ma trận trực giao.

Thật vậy

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{E}$$

Hệ quả. Trong bốn phần tử của ma trận côsin chỉ hướng chỉ có một phần tử độc lập.

Điều này là hiển nhiên vì $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

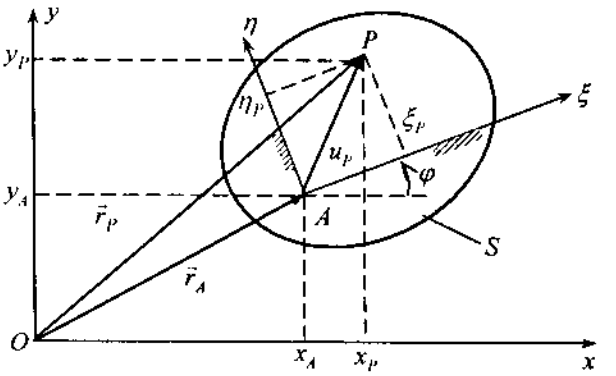
Tính chất 2. Định thức của ma trận côsin chỉ hướng bằng 1, detA = 1

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

3.2. Phương trình xác định vị trí một điểm bất kỳ của vật rắn phẳng

Khi biết được vị trí của hình phẳng S trong mặt phẳng Oxy, tức là biết $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$ và $\varphi = \varphi(t)$ ta dễ dàng xác định vị trí của điểm P bất kỳ thuộc hình phẳng S. Từ hình 4.4 ta có

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{u}_P \tag{3.5}$$



Hình 4.4

Chiếu phương trình véc tơ (3.5) lên hai trục toạ độ Ox và Oy ta được

$$\begin{aligned} x_P &= x_A + \xi_P\cos\varphi - \eta_P\sin\varphi \\ y_P &= y_A + \xi_P\sin\varphi + \eta_P\cos\varphi \end{aligned} \tag{3.6}$$

Các phương trình (3.6) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \mathbf{A}\begin{bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Các phương trình (3.6) hoặc (3.7) là các phương trình xác định vị trí của một điểm P bất kỳ thuộc hình phẳng S.

3.3. Phương trình xác định vận tốc, gia tốc một điểm bất kỳ của vật rắn phẳng

Đạo hàm hai vế của phương trình (3.7) theo thời gian ở trong hệ quy chiếu Oxy ta nhận được phương trình xác định vận tốc của một điểm P tuỳ ý thuộc vật rắn phẳng S

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} + \dot{\varphi}\mathbf{I}^*\mathbf{A}\begin{bmatrix} \xi_P \\ \eta_P \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Đạo hàm hai vế của phương trình (3.8) theo thời gian ở trong hệ quy chiếu Oxy ta nhận được phương trình xác định gia tốc của một điểm P tuỳ ý thuộc vật rắn phẳng S

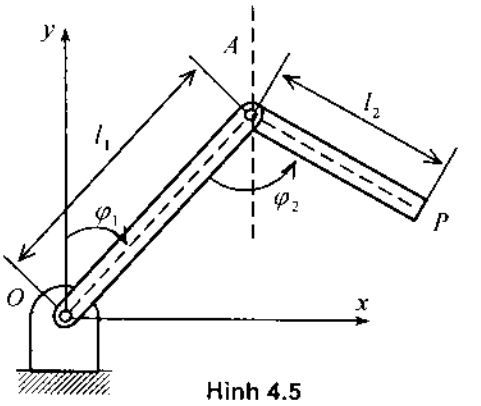
$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{bmatrix} + (\ddot{\varphi}\mathbf{I}^* - \dot{\varphi}^2\mathbf{E})\mathbf{A}\begin{bmatrix} \xi_P \\ y_P \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

3.4. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 4.1. Trên hình 4.5 là sơ đồ tay máy hai khâu động. Cho biết các quy luật chuyển động của hai góc $\varphi_1(t)$ và $\varphi_2(t)$.

a) Xác định phương trình chuyển động, vận tốc của điểm đầu P.

b) Giả sử $l_1 = l_2 = l$ và $\varphi_1(t) = \omega_1 t$, $\varphi_2(t) = \omega_2 t$, trong đó ω_1 và ω_2 là các hằng số. Hãy xác định tỷ số ω_1/ω_2 sao cho điểm P có thể chuyển động trên một đường thẳng.



Hình 4.5

Lời giải. Phương trình chuyển động của điểm P là

$$\begin{aligned} x_P &= l_1 \sin\varphi_1(t) + l_2 \sin\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right] \\ y_P &= l_1 \cos\varphi_1(t) - l_2 \cos\left[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right] \end{aligned} \tag{1}$$

Vận tốc của điểm P

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \dot{y}_P &= -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 + l_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \tag{2}$$

Khi $l_1 = l_2 = l$, $\varphi_1(t) = \omega_1 t$, $\varphi_2(t) = \omega_2 t$ Từ (2) ta có

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= l\omega_1 \cos(\omega_1 t) + l(\omega_2 - \omega_1)\cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t\right] \\ \dot{y}_P &= -l\omega_1 \sin(\omega_1 t) + l(\omega_2 - \omega_1)\sin\left[(\omega_2 - \omega_1)t\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\dot{y}_P}{\dot{x}_P} = \frac{-\omega_1 \sin(\omega_1 t) + (\omega_2 - \omega_1)\sin\left[(\omega_2 - \omega_1)t\right]}{\omega_1 \cos(\omega_1 t) + (\omega_2 - \omega_1)\cos\left[(\omega_2 - \omega_1)t\right]} \tag{4}$$

Nếu tỷ số $\frac{\dot{y}_P}{\dot{x}_P}$ là hằng số thì hướng của véc tơ vận tốc không đổi. Điều đó có thể xảy ra khi tử số của (4) bằng không. Từ điều kiện $\dot{y}_P = 0$ suy ra

$$\omega_2 = 2\omega_1 \qquad (5)$$

Như thế khi $\omega_2 = 2\omega_1$ thì quỹ đạo điểm P là một đường thẳng. Khi $\omega_2 = 2\omega_1$, nếu $x_P(0) = 0$, $y_P(0) = 0$ thì điểm P sẽ chuyển động trên trục x. Bởi vì khi đó từ phương trình (1) ta có

$$x_P = l\left[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_1 t)\right] = 2l\sin(\omega_1 t)$$
$$y_P = l\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_1 t)\right] = 0$$

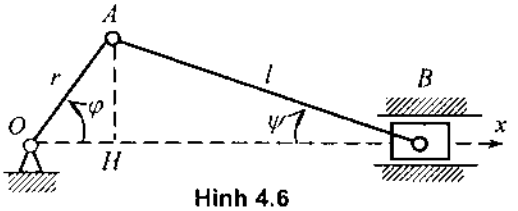
Chú ý rằng khi $\omega_2 = 0$, ω_1 tuỳ ý thì $\dot{y}_P = 0$ và điểm P chuyển động trên một đường thẳng. Nếu như $x_P(0) = 0$, $y_P(0) = 0$ thì từ hệ (1) ta có

$$x_P(t) = l\left[\sin(\omega_1 t) + \sin(-\omega_1 t)\right] = 0$$
$$y_P(t) = l\left[\cos(\omega_1 t) - \cos(-\omega_1 t)\right] = 0$$

Khi đó điểm P luôn ở gốc toạ độ.

Thí dụ 4.2. Cho cơ cấu tay quay con trượt OAB (hình 4.6). Tay quay OA có chiều dài là r quay quanh O theo quy luật của $\varphi(t)$. Thanh truyền AB dài là l.

Giả sử chiều dài AB khá lớn so với chiều dài OA sao cho tỉ số $\lambda = r/l$ đủ nhỏ. Hãy thiết lập phương trình chuyển động, biểu thức vận tốc, gia tốc của con trượt B.



Hình 4.6

Lời giải. Ta chọn cơ cấu tay quay con trượt OAB làm hệ khảo sát. Có hệ gồm ba vật rắn: tay quay OA chuyển động quay quanh O, thanh truyền AB chuyển động phẳng, con trượt B chuyển động tịnh tiến. Theo yêu cầu của bài, ta phải khảo sát chuyển động con trượt B. Vị trí của con trượt B được xác định bởi toạ độ x_B. Theo hình 4.6 ta có:

$$x_H = r\cos\varphi + l\cos\psi,\ AH = r\sin\varphi = l\sin\psi$$

Từ đó suy ra

$$\sin\psi = \lambda\sin\varphi,\ \cos\psi = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}$$

Do giả thiết λ đủ bé nên ta có công thức gần đúng

$$\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi} \approx 1 - \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\varphi = 1 - \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4}\cos 2\varphi$$

Vậy hoành độ điểm B được xác định bởi công thức gần đúng

$$x_B \approx r\cos\varphi + l\left[\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)+\frac{\lambda^2}{4}\cos 2\varphi\right] = l\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)+r\cos\varphi+\frac{r^2}{4l}\cos 2\varphi. \quad (1)$$

Từ công thức trên ta dễ dàng xác định được biểu thức vận tốc và biểu thức gia tốc của con trượt B một cách gần đúng

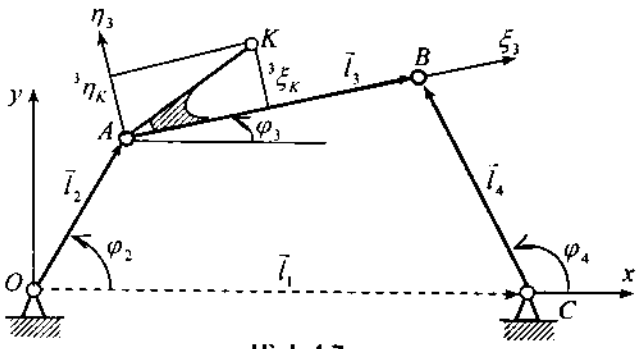
$$\dot{x}_B = -r\dot{\varphi}\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right) \quad (2)$$

$$\ddot{x}_B = -r\ddot{\varphi}\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right) - r\dot{\varphi}^2\left(\cos\varphi + \frac{r}{l}\cos 2\varphi\right). \quad (3)$$

Thí dụ 4.3. Cho cơ cấu bốn khâu OABC (ba khâu động, một khâu cố định) với các kích thước và các ký hiệu như hình 4.7. Cho biết chiều dài của các khâu là l_1 , l_2, l_3, l_4. Cho K là một điểm của khâu AB. Tay quay OA quay quanh O theo quy luật $\varphi_2(t)$. Hãy xác định:

– Các góc φ_3, φ_4 và các vận tốc góc, gia tốc góc của các khâu AB và CB,

– Toạ độ điểm K và vận tốc, gia tốc của điểm đó.



Hình 4.7

Lời giải. Khảo sát động học cơ cấu bốn khâu OABC. Cơ hệ gồm ba vật rắn là khâu OA, khâu CB chuyển động quay quanh một trục cố định và khâu AB chuyển động phẳng. Trước hết, xác định các phương trình liên kết của cơ hệ. Từ hình 4.7 ta có hệ thức véc tơ

$$\vec{l}_2 + \vec{l}_3 - \vec{l}_1 - \vec{l}_4 = \vec{0}. \quad (1)$$

Chiếu phương trình véc tơ (1) lên trục Ox và Oy xác định được các phương trình liên kết

$$\begin{aligned} f_1 &= l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 - l_4\cos\varphi_4 - l_1 = 0 \\ f_2 &= l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 - l_4\sin\varphi_4 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Đạo hàm các phương trình (2) theo biến φ_2, ta được

$$\begin{aligned} -l_3 \sin\varphi_3.\varphi_3' + l_4 \sin\varphi_4.\varphi_4' &= l_2 \sin\varphi_2 \\ l_3 \cos\varphi_3.\varphi_3' - l_4 \cos\varphi_4.\varphi_4' &= -l_2 \cos\varphi_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Hệ phương trình (3) là hệ hai phương trình đại số tuyến tính của φ_3' và φ_4'

$$\begin{bmatrix} -l_3 \sin\varphi_3 & l_4 \sin\varphi_4 \\ l_3 \cos\varphi_3 & -l_4 \cos\varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3' \\ \varphi_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \sin\varphi_2 \\ -l_2 \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Từ (4) ta dễ dàng tính được φ_3', φ_4'. Sau đó ta tính $\dot{\varphi}_3, \dot{\varphi}_4$ theo công thức

$$\dot{\varphi}_3 = \varphi_3' \dot{\varphi}_2, \quad \dot{\varphi}_4 = \varphi_4' \dot{\varphi}_2, \quad (5)$$

Ta lại đạo hàm hệ phương trình (3) theo biến φ_2, sau đó sắp xếp lại xác định được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{bmatrix} -l_3 \sin\varphi_3 & l_4 \sin\varphi_4 \\ l_3 \cos\varphi_3 & -l_4 \cos\varphi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3'' \\ \varphi_4'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Trong đó: $d_1 = l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \cos\varphi_3.\varphi_3'^2 - l_4 \cos\varphi_4.\varphi_4'^2$

$$d_2 = l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \sin\varphi_3.\varphi_3'^2 - l_4 \sin\varphi_4.\varphi_4'^2$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (6) ta được φ_3'', φ_4''. Sau đó, tính $\ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4$ theo công thức

$$\ddot{\varphi}_i = \varphi_i'.\ddot{\varphi}_2 + \varphi_i''.\dot{\varphi}_2^2, \quad (i=3, 4) \quad (7)$$

Các góc φ_3, φ_4 có thể xác định gần đúng theo công thức khai triển Taylor

$$\varphi_i\left[(\varphi_2)_0 + \Delta\varphi_2\right] = (\varphi_i)_0 + (\varphi_i')_0 \Delta\varphi_2 + \frac{1}{2}(\varphi_i'')_0 \Delta\varphi_2^2 + \ldots (i=3,4) \quad (8)$$

Nếu cần tính toán chính xác hơn, có thể lấy các giá trị của các hàm φ_3, φ_4 xác định bởi công thức (8) làm các giá trị đầu để giải các phương trình đại số phi tuyến (2) bằng phương pháp lặp Newton–Raphson. Việc xác định $\dot{\varphi}_3, \dot{\varphi}_4, \ddot{\varphi}_3, \ddot{\varphi}_4, \varphi_3, \varphi_4$ tương đối đơn giản nếu sử dụng các phần mềm MATLAB hoặc MAPLE.

Bây giờ, chuyển sang bài toán xác định toạ độ, vận tốc, gia tốc điểm K. Từ hình (4.7) ta có

$$\begin{bmatrix} x_K \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos\varphi_2 \\ l_2 \sin\varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\xi_K \\ {}^3\eta_K \end{bmatrix} \quad (9)$$

Nếu sử dụng ký hiệu ma trận côsin chỉ hướng

$$\mathbf{A_3} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix}$$

thì phương trình (9) có dạng

$$\begin{bmatrix} x_K \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos\varphi_2 \\ l_2 \sin\varphi_2 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} {}^3\xi_K \\ {}^3\eta_K \end{bmatrix} \tag{10}$$

Đạo hàm phương trình (10) theo thời gian xác định được

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ \dot{y}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin\varphi_2 \\ l_2 \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 \mathbf{I}^* \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} {}^3\xi_K \\ {}^3\eta_K \end{bmatrix} \tag{11}$$

Đạo hàm phương trình (11) theo thời gian ta có

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_K \\ \ddot{y}_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin\varphi_2 \\ l_2 \cos\varphi_2 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} -l_2 \cos\varphi_2 \\ -l_2 \sin\varphi_2 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2^2 + \left(\ddot{\varphi}_3 \mathbf{I}^* - \dot{\varphi}_3^2 \mathbf{E}\right) \mathbf{A}_3 \begin{bmatrix} {}^3\xi_K \\ {}^3\eta_K \end{bmatrix} \tag{12}$$

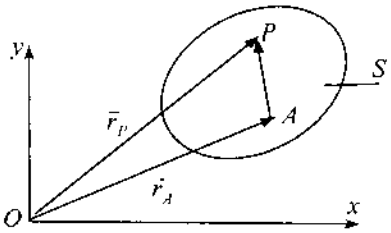
4. XÁC ĐỊNH VẬN TỐC, GIA TỐC CÁC ĐIỂM CỦA VẬT RẮN PHẲNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

4.1. Quan hệ vận tốc hai điểm của vật rắn phẳng

a) Định lý quan hệ vận tốc hai điểm

Từ hình vẽ 4.8 ta có công thức

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \overrightarrow{AP} \tag{4.1}$$



Hình 4.8

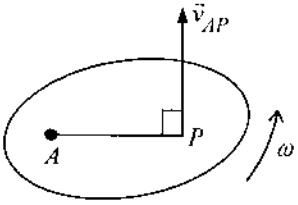
Đạo hàm theo thời gian hệ thức (4.1) ở trong hệ quy chiếu Oxy ta được

$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AP}\right)}{dt}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP} \tag{4.2}$$

Biểu thức (4.2) là định lý quan hệ vận tốc hai điểm của vật rắn phẳng.

Chú ý. Véc tơ $\vec{v}_{PA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}$ có thể xác định theo quy tắc khình học như sau: $\vec{v}_{PA}$ có phương vuông góc AP, có chiều hướng theo chiều quay của $\vec{\omega}$ (hình 4.9), có trị số $v_{PA} = \omega.AP$.



Hình 4.9

b) Định lý hình chiếu vận tốc

Do $\vec{v}_{PA}$ là véc tơ vuông góc với AP nên từ công thức (4.2) ta suy ra định lý hình chiếu vận tốc hai điểm

$$hc_{AP}(\vec{v}_P) = hc_{AP}(\vec{v}_A) \tag{4.3}$$

4.2. Tâm vận tốc tức thời trong chuyển động phẳng

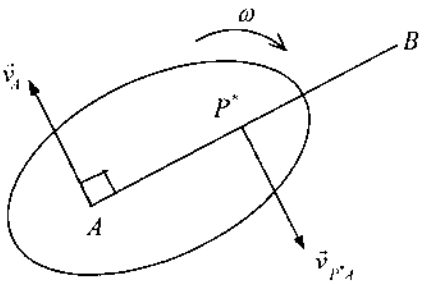
a) Định nghĩa và sự tồn tại của tâm vận tốc tức thời

Định nghĩa. Điểm P^* của hình phẳng S mà tại thời điểm khảo sát có vận tốc bằng không được gọi là tâm vận tốc tức thời tại thời điểm khảo sát của hình phẳng S.

Chú ý. Điểm P^* có thể nằm trên hình phẳng vật lý S mà cũng có thể không nằm trên hình phẳng vật lý S. Trong trường hợp sau ta tưởng tượng mở rộng hình phẳng vật lý S ra, miễn là khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của hình phẳng S mở rộng luôn luôn không đổi.

Định lý. Ở mỗi thời điểm nếu $\omega \neq 0$, có một điểm duy nhất thuộc hình phẳng S có vận tốc bằng không.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại của tâm vận tốc tức thời. Giả sử biết vận tốc $\vec{v}_A$ của điểm A thuộc hình phẳng S ($v_A \neq 0$) và vận tốc góc $\vec{\omega}$ của hình phẳng S. Quay véc tơ $\vec{v}_A$ quanh A theo chiều của $\vec{\omega}$ đó một góc 90^0 ta được nửa đường thẳng AB (hình 4.10).



Hình 4.10

Trên AB ta lấy một điểm P^* sao cho

$$AP^* = v_A/\omega$$

Khi đó $\quad \vec{v}_{P^*A} = -\vec{v}_A$

Mặt khác theo công thức (4.2) về quan hệ vận tốc hai điểm P^* và A ta có

$$\vec{v}_{P^*} = \vec{v}_A + \vec{v}_{P^*A} = \vec{v}_A - \vec{v}_A = 0$$

Bây giờ ta chứng minh sự duy nhất của tâm vận tốc tức thời P^* bằng phương pháp phản chứng. Giả sử có hai điểm P^*_1 và P^*_2 khác nhau của hình phẳng S mà tại thời điểm khảo sát có tính chất $\vec{v}_{P_1^*} = \vec{v}_{P_2^*} = 0$. Khi đó theo (4.2) ta có

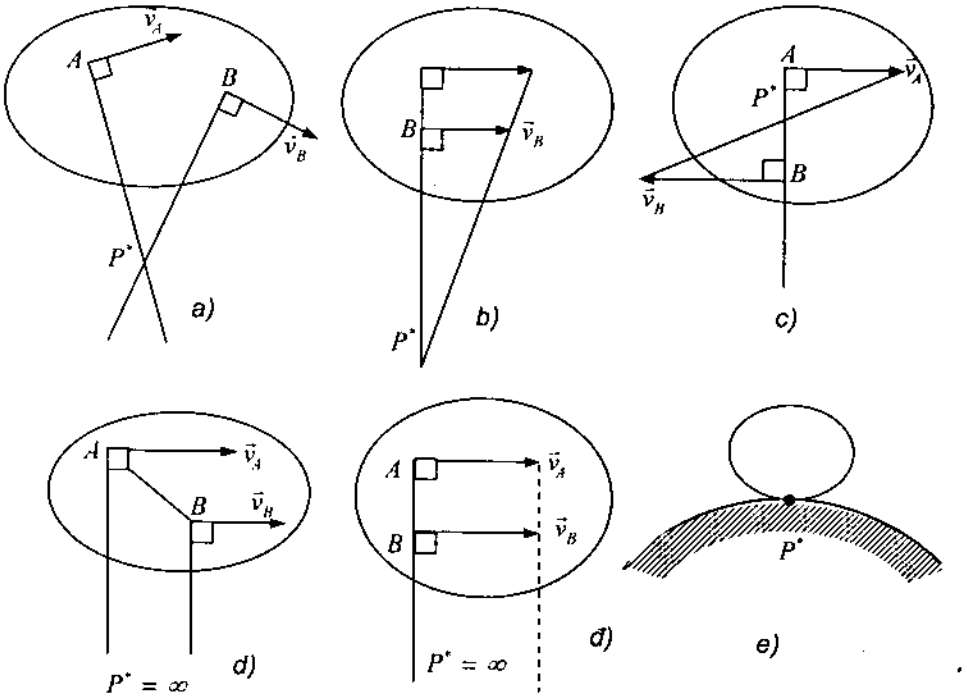
$$\vec{v}_{P_2^*} = \vec{v}_{P_1^*} + \vec{v}_{P_2^*P_1^*}$$

Đó là điều vô lý vì $\vec{v}_{P_2^*P_1^*} = \omega.P_1^*P_2^* \neq 0$. Vậy $P^*_1 \equiv P^*_2$.

b) Quy tắc thực hành tìm tâm vận tốc tức thời

Dựa vào các kết quả ở trên ta đưa ra ở đây một số quy tắc thực hành tìm tâm vận tốc tức thời.

Trường hợp 1. Biết phương vận tốc điểm A và phương vận tốc điểm B. Hai phương này không song song với nhau. Dựa vào tính chất $\vec{v}_A \perp P^*A$, $\vec{v}_B \perp P^*B$, từ A và B ta kẻ tương ứng các đường vuông góc với $\vec{v}_A$ và $\vec{v}_B$. Giao điểm của chúng là tâm vận tốc P* (hình 4.11a).



Hình 4.11

Trường hợp 2. Biết vận tốc hai điểm A và B, chúng có phương song song với nhau. Dựa vào tính chất $\frac{v_A}{v_B} = \frac{P^*A}{P^*B}$ ta thấy tâm vận tốc tức thời P* chính là giao điểm của đường AB với đường nối các đầu mút của véc tơ $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ (hình 4.11b và 4.11c). Trường hợp giao điểm ở vô cùng, hình phẳng thực hiện chuyển động tịnh tiến tức thời (hình 4.11d và 4.11đ).

Trường hợp 3. Biết một điểm của hình phẳng có vận tốc bằng không. Khi chuyển động phẳng là chuyển động lăn không trượt của hình phẳng S trên một đường cố định thì điểm tiếp xúc có vận tốc tức thời bằng không. (Vì các tiếp điểm của hai vật khi không trượt trên nhau phải có cùng vận tốc, mà vật thứ hai cố định). Vì vậy điểm tiếp xúc của vật rắn phẳng với mặt tựa chính là tâm vận tốc tức thời P* (hình 4.11e).

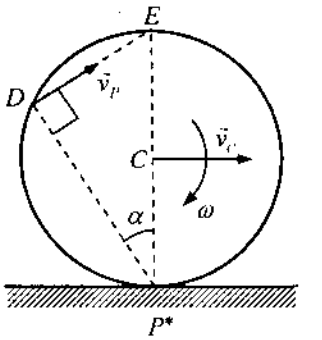
Thí dụ 4.4. Tìm vận tốc của điểm D trên vành của xe bán kính R lăn không trượt trên đường thẳng. Cho biết vận tốc tâm C của bánh xe là $\vec{v}_C$.

Lời giải. Vì bánh xe lăn không trượt trên đường thẳng, nên điểm tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường là tâm vận tốc tức thời P^* (hình 4.12). Vận tốc góc của bánh xe là

$$\omega = \frac{v_C}{P^*C} = \frac{v_C}{R}$$

Vận tốc của điểm D

$$v_D = \omega.P^*D = \frac{v_C.2R\cos\alpha}{R} = 2v_C.\cos\alpha$$



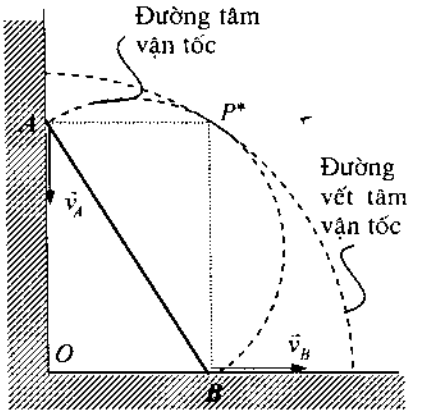
Hình 4.12

c) Đường tâm vận tốc và đường vết tâm vận tốc

Khi hình phẳng S chuyển động trên mặt phẳng E = Oxy, tại mỗi thời điểm có một điểm P^* thuộc S là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng S, đồng thời tại mỗi thời điểm có một điểm P^{**} của mặt phẳng E = Oxy trùng với điểm P^* của hình phẳng S.

Định nghĩa. Quỹ đạo các tâm vận tốc tức thời hình phẳng P^* trên hình phẳng S được gọi là đường tâm vận tốc (hay đường tâm tích động), còn tập hợp các trùng điểm P^{**} trên mặt phẳng E được gọi là đường vết tâm vận tốc (hay đường tâm tích cố định).

Thí dụ 4.5. Trên hình 4.13 là mô hình một thanh AB dài L, có hai đầu chuyển động trên hai bờ tường vuông góc với nhau. Đường vết tâm vận tốc là một phần tư đường tròn tâm O, bán kính L, còn đường tâm vận tốc là nửa đường tròn có đường kính AB.



Hình 4.13

4.3. Quan hệ gia tốc hai điểm của vật rắn phẳng

Đạo hàm theo thời gian công thức vận tốc (4.2) ở trong hệ quy chiếu R = Oxy ta được

$$\frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AP} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{PA} \qquad (4.4)$$

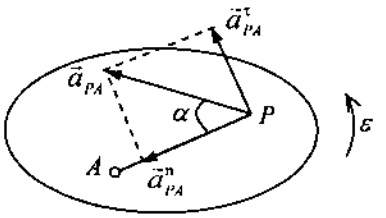
Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\vec{a}^{\,\tau}_{PA} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AP},\ \vec{a}^{\,n}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{PA} \qquad (4.5)$$

thì hệ thức (4.4) có dạng

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{PA} = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{PA} + \vec{a}^{n}_{PA} \qquad (4.6)$$

Chú ý đến định nghĩa tích hữu hướng của hai véc tơ, ta dễ dàng xác định các véc tơ gia tốc tiếp $\vec{a}^{\tau}_{PA}$ và gia tốc hướng tâm $\vec{a}^{n}_{PA}$ bằng hình học như sau: $\vec{a}^{\tau}_{PA}$ có phương ⊥ PA, có chiều phụ thuộc chiều của $\vec{\varepsilon}$, có trị số $a^{\tau}_{PA} = \varepsilon AP$, $\vec{a}^{n}_{PA}$ hướng từ P về A, có trị số $a^{n}_{PA} = \omega^2 AP$ (hình 4.14). Từ đó suy ra



Hình 4.14

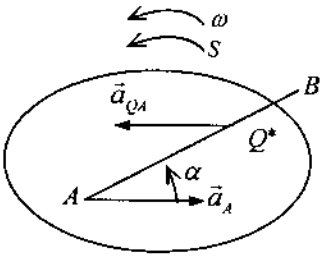
$$a_{PA} = AP\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2},\ tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad (4.7)$$

4.4. Tâm gia tốc tức thời

Định nghĩa. Điểm Q* của hình phẳng S mà tại thời điểm khảo sát có gia tốc bằng không, được gọi là tâm gia tốc tức thời.

Định lý. Ở mỗi thời điểm nếu ω và ε không đồng thời triệt tiêu, có một điểm duy nhất thuộc hình phẳng S có gia tốc bằng không.

Chứng minh. Sự tồn tại của tâm gia tốc tức thời Q*. Giả sử biết $\vec{a}_A, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$. Quay véc tơ $\vec{a}_A$ quanh A theo chiều $\vec{\varepsilon}$ đi một góc α



Hình 4.15

$$\text{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2$$

ta được nửa đường thẳng AB (hình 4.15). Trên AB lấy một điểm Q* sao cho

$$AQ^* = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}.$$

Như thế $\vec{a}_{Q^*A} = -\vec{a}_A$. Vậy theo công thức (5.6) ta có

$$\vec{a}_{Q^*} = \vec{a}_A + \vec{a}_{Q^*A} = \vec{a}_A - \vec{a}_A = \vec{0}.$$

Sự duy nhất của tâm gia tốc tức thời Q* được chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử có hai điểm Q_1^* và Q_2^* mà tại thời điểm khảo sát $\vec{a}_{Q_1^*} = \vec{a}_{Q_2^*} = \vec{0}$.

Khi đó hệ thức $\vec{a}_{Q_1^*} = \vec{a}_{Q_2^*} + \vec{a}_{Q_1^*Q_2^*}$ là điều vô lý, vì $a_{Q_1^*Q_2^*} \neq 0$. Vậy $Q_1^* \equiv Q_2^*$.

Chú ý: – Khi ω và ε không đồng thời triệt tiêu thì Q* là một điểm giới nội,

– Khi ω và ε đồng thời triệt tiêu thì $Q^* \to \infty$,

– Nói chung, tâm vận tốc tức thời P^* và tâm gia tốc tức thời Q^* của hình phẳng S không trùng nhau.

Thí dụ 4.6. Tại một thời điểm nào đó, tâm O của bánh xe lăn không trượt trên đường thẳng có vận tốc v_0= 1m/s và gia tốc a_0 = 1,5 m/s^2, (hình 4.16). Bán kính bánh xe R=0,5 m. Hãy xác định tâm gia tốc tức thời Q^* tại thời điểm đó.

Lời giải. Do P^* là tâm vận tốc tức thời, ta có

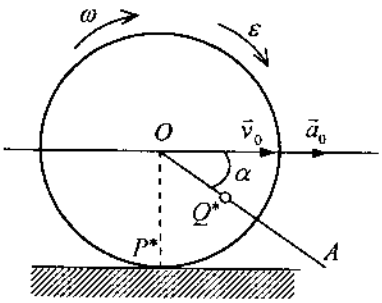
$$\omega = \frac{v_0}{R} = 2 \text{ rad/s}$$

Gia tốc góc của bánh xe

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R} = 3 \text{ rad/s}^2$$

Chiều của ω và ε cho trên hình 4.16. Quay vectơ $\vec{a}_0$ theo chiều của $\vec{\varepsilon}$ đi một góc α

$$\text{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{3}{4} = 0,75 \ (\alpha \approx 37^0)$$



Hình 4.16

ta được nửa đường thẳng OA. Trên đó lấy một điểm Q^* mà

$$OQ^* = \frac{a_0}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = 0,3 \text{ m}$$

Điểm Q^* đó là tâm gia tốc tức thời.

4.5. Các thí dụ áp dụng

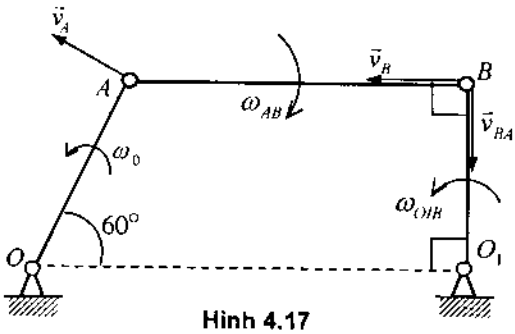
Trong đoạn này áp dụng phương pháp véc tơ hình học phân tích động học một số cơ cấu hay gặp trong kỹ thuật.

Thí dụ 4.7. Tay quay OA = 0,2 m quay đều với vận tốc góc ω_0 = 20π s^{-1}. Thanh truyền AB = 0,4 m. Tại thời điểm cơ cấu có vị trí như hình 4.17, tìm:

– Vận tốc điểm B, vận tốc góc thanh AB và cần lắc O_1B.

– Gia tốc điểm B, gia tốc góc thanh AB và cần lắc O_1B.

Lời giải. Chọn hệ khảo sát là cơ cấu bốn khâu $OABO_1$ ở vị trí như hình 4.17. Hệ gồm ba vật rắn: tay quay OA chuyển động quay quanh O, cần lắc O_1B



Hình 4.17

chuyển động quay quanh O_1, thanh truyền AB chuyển động phẳng. Sử dụng phương pháp véc tơ hình học giải bài toán này.

Bài toán vận tốc. Sử dụng công thức

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \qquad (1)$$

trong đó : $\vec{v}_A$ vuông góc với OA và có trị số v_A = OA. $\omega_0 = 4\pi$ m/s, $\vec{v}_{BA}$ vuông góc với AB, chưa biết trị số và hướng, $\vec{v}_B$ vuông góc với O_1B, chưa biết trị số và hướng. Chiếu phương trình (1) lên phương BA xác định được

$$v_B = v_A \cos 30^0 = 4\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\pi \text{ m/s}$$

Từ đó: $$\omega_{O_1B} = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{v_B}{OA \sin 60^0} = 20\pi \text{ 1/s}$$

Chiếu đẳng thức (1) lên phương O_1B

$$v_A \sin 30^0 - v_{BA} = 0 \Rightarrow v_{BA} = 4\pi \frac{1}{2} = 2\pi \text{ m/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi \text{ 1/s}$$

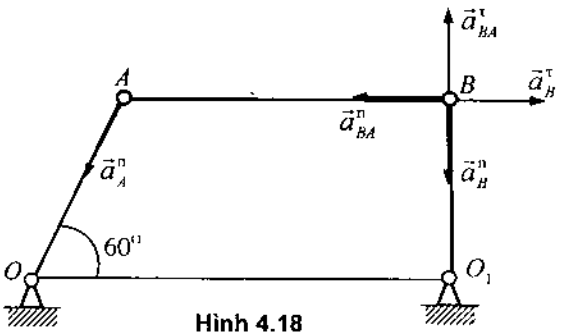
Bài toán gia tốc. Sử dụng công thức (hình 4.18)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n \qquad (2)$$

Do tay quay OA quay đều nên $\vec{a}_A^\tau = 0$, $\vec{a}_A^n$ hướng từ A về O và có trị số $a_A^n = OA\omega_0^2 = 80\pi^2$ m/s², $\vec{a}_B^n$ hướng từ B đến O_1 và có trị số

$$a_B^n = O_1B\omega_{O_1B}^2 = 0,1\sqrt{3} \times 400\pi^2 = 40\sqrt{3}\pi^2 \text{ m/s}^2$$

$\vec{a}_B^\tau$ vuông góc với O_1B, chưa biết trị số và hướng. $\vec{a}_{BA}^n$ hướng từ B về A và có trị số $a_{BA}^n = AB\omega_{AB}^2 = 10\pi^2 m/s^2$, $\vec{a}_{BA}^\tau$ vuông góc với O_1B, chưa biết trị số và hướng. Chiếu đẳng thức (2) lên phương AB ta được:



Hình 4.18

$$a_B^\tau = -a_A^n \cos 60^0 - a_{BA}^n = -40\pi^2 - 10\pi^2 = -50\pi^2$$

Dấu trừ chứng tỏ $\vec{a}_B^\tau$ phải có hướng ngược lại như trên hình vẽ. Do $a_B^\tau = \varepsilon_{O_1B}.O_1B$, suy ra

$$\varepsilon_{O_1B} = \frac{a_B^\tau}{O_1B} = \frac{50\pi^2}{0,1\sqrt{3}} = \frac{500\sqrt{3}}{3}\pi^2 \ 1/s^2$$

Chiếu đẳng thức (2) lên phương O_1B xác định được

$$-a_B^n = -a_A^n \sin 60^0 + a_{BA}^\tau$$

$$\Rightarrow a_{BA}^\tau = a_A^n \sin 60^0 - a_B^n = 40\sqrt{3}\pi^2 - 40\sqrt{3}\pi^2 = 0$$

vậy $\varepsilon_{AB} = 0$. Cuối cùng ta có

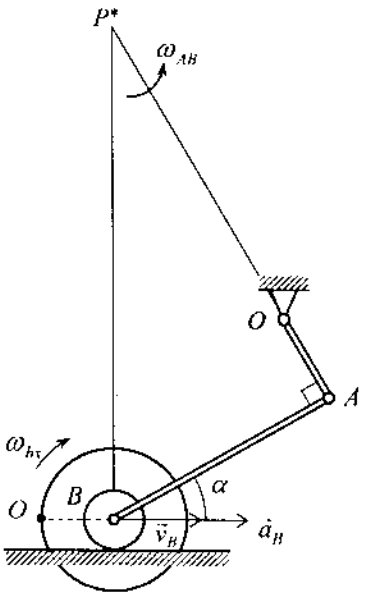
$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} = 10\pi^2\sqrt{73}.$$

Thí dụ 4.8. Cho cơ cấu truyền động như hình 4.19. Bánh xe hai tầng có bán kính trong r = 10 cm, bán kính ngoài R = 15 cm, lăn không trượt trên nền ngang cố định. Thanh truyền AB = 40 cm, tay quay OA = 15 cm. Tại thời điểm khảo sát, tâm B của bánh xe có vận tốc v_B = 30 cm/s, gia tốc a_B = 2 cm/s^2, $\alpha = 30^0$, OA vuông góc với AB. Hãy tính:

1) Vận tốc góc của các thanh AB và OA,

2) Gia tốc của M trên vành bánh xe (BM nằm ngang).

Lời giải. Chọn hệ khảo sát là cơ cấu 4 khâu ở vị trí như hình 4.19. Hệ gồm 3 vật rắn: tay quay *OA* chuyển động quay quanh *O*, thanh truyền *AB* chuyển động phẳng, bánh xe hai tầng *B* chuyển động lăn không trượt trên đường thẳng. Sử dụng phương pháp véctơ hình học để tính thí dụ này.



Hình 4.19

Bài toán vận tốc. Sử dụng phương pháp tâm vận tốc tức thời. Từ hình vẽ 4.19 ta có P^* là tâm vận tốc tức thời của khâu AB. Các khoảng cách trên hình này là

$$P^*B = 2AB = 80cm, P^*A = \sqrt{3}AB = 40\sqrt{3}\,cm.$$

Do P^* là tâm vận tốc tức thời của khâu AB nên

$$\omega_{AB} = v_B / P^*B = 3/8\,rad/s.$$

Vậy vận tốc điểm A là

$$v_A = \omega_{AB}P^*A = 15\sqrt{3}\,cm.$$

Từ đó suy ra

$$\omega_{OA} = v_A / OA = \sqrt{3}\,rad/s$$

Bài toán gia tốc. Sử dụng công thức cộng gia tốc (hình 4.20), suy ra

$$\vec{a}_M = \vec{a}_B + \vec{a}^{\tau}_{MB} + \vec{a}^{n}_{MB} \qquad (1)$$

Theo đầu bài ta có

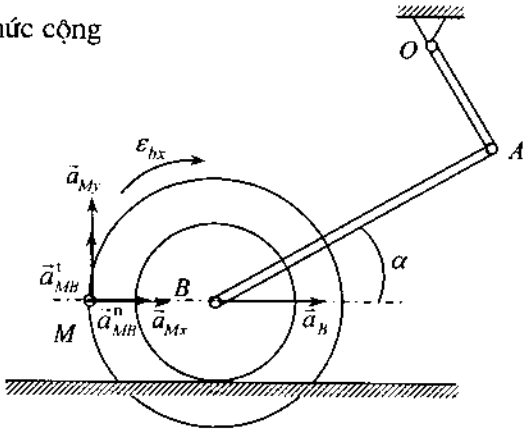
$$\omega_{bx} = \frac{v_B}{r} = 3rad/s,$$

$$\varepsilon_{bx} = \frac{a_B}{r} = 0,2rad/s^2.$$

Do đó ta dễ dàng tính được

$$a^n_{MB} = R\omega^2_{bx} = 15\times 9 = 135cm/s^2$$

$$a^{\tau}_{MB} = R\varepsilon_{bx} = 15\times 0,2 = 3cm/s^2.$$



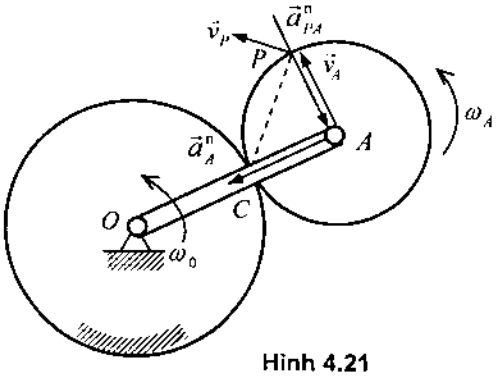
Hình 4.20

Chiếu phương trình (1) lên phương nằm ngang (x) và phương thẳng đứng (y) xác định được

$$a_{Mx} = a_B + a^n_{MB} = 2 + 135 = 137\,cm/s^2$$

$$a_{My} = a^{\tau}_{MB} = 3\ cm/s^2.$$

Thí dụ 4.9. Khảo sát động học cơ cấu hành tinh như hình 4.21. Bánh răng O cố định, bán kính R = 20 cm. Tay quay OA = 30 cm quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω_0 = 10 rad/s. Bánh răng A bán kính r = 10 cm, có trục lắp vào đầu A của tay quay và ăn khớp răng với bánh răng cố định O. Tìm:



Hình 4.21

– Vận tốc góc bánh răng A, vận tốc điểm P ở đầu bán kính thẳng góc với tay quay,

– Gia tốc góc bánh răng A, gia tốc điểm P.

Lời giải. Chọn hệ khảo sát là cơ cấu hành tinh như hình 4.21. Do bánh răng O cố định, nên hệ chỉ có hai vật rắn chuyển động. Tay quay OA chuyển động quay quanh O. Bánh răng A chuyển động phẳng, lăn không trượt trên bánh răng O.

Bài toán vận tốc. Vì A là một điểm của tay quay OA nên vận tốc $\vec{v}_A$ vuông góc với OA và hướng thuận theo chiều quay của OA, trị số của nó $v_A = OA\omega_O$ =300 cm/s. Do bánh răng A lăn không trượt trên bánh răng O, nên điểm ăn khớp C là tâm vận tốc tức thời. Do $v_A = CA\omega_A$ nên

$$\omega_A = \frac{v_A}{CA} = \frac{300}{10} = 30 \text{ rad/s}$$

Chiều quay của ω_A được chỉ trên hình 4.19.

Vận tốc v_P của điểm P vuông góc với CP và hướng theo chiều quay của ω_A. Trị số của nó $v_P = CP\omega_A = CA\sqrt{2}\omega_A = 300\sqrt{2}$ cm/s.

Bài toán gia tốc. Chú ý rằng ở các cơ cấu hành tinh quan hệ $\omega_A = \frac{v_A}{CA}$ luôn đúng ở mọi vị trí, mọi thời điểm. Vì v_A luôn là hằng số khi ω_0 = const, nên ta có

$$\varepsilon_A = \frac{d\omega_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_A}{CA}\right) = 0$$

Chọn A làm cực, gia tốc điểm P được xác định bởi hệ thức

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{PA} + \vec{a}^{n}_{PA} \qquad (1)$$

Do tay quay OA quay đều quanh O nên $\vec{a}^{\tau}_A = 0$, $\vec{a}^{n}_A$ hướng từ A về O và có trị số $a^n_A = OA\omega_0^2 = 3000$ cm/s^2. Thành phần gia tốc $\vec{a}^{n}_{PA}$ hướng từ P về A có trị số $a^n_{PA} = PA\omega_A^2 = 9000$ cm/s^2.

Thành phần $\vec{a}^{\tau}_{PA} = 0$ do $\varepsilon_A = 0$. Vậy

$$\vec{a}_P = \vec{a}^{n}_A + \vec{a}^{n}_{PA} \qquad (2)$$

Chiếu đẳng thức (2) lên hai trục toạ độ vuông góc nhau, ta được

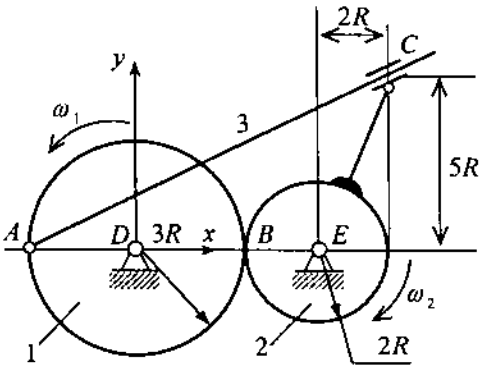
$$a_P^2 = \left(a^n_A\right)^2 + \left(a^n_{PA}\right)^2 = 3000^2 + 9000^2$$

Vậy $\qquad a_P = 3000\sqrt{10}$ cm/s^2.

Thí dụ 4.10. Cho cơ cấu như hình vẽ 4.22a. Bánh răng 1 quay quanh D với vận tốc ω_1 = const. Tại thời điểm cơ cấu có vị trí như hình vẽ, hãy tìm:

– Vận tốc góc ω_2 của bánh răng 2 và vận tốc góc ω_3 của thanh 3.

– Vị trí tâm vận tốc tức thời (x_{P*}, y_{P*}) của thanh 3.

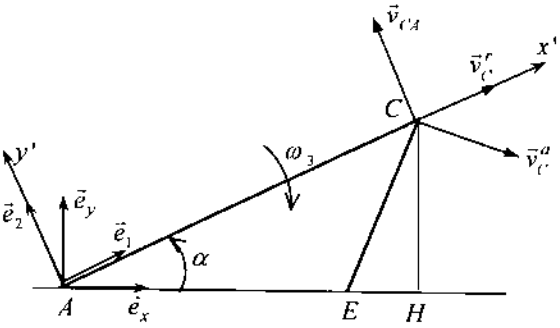


Hình 4.22a

Lời giải. Chọn hệ khảo sát là cơ cấu DACE ở vị trí như hình 4.22a. Cơ cấu này gồm bánh răng 1, bánh răng 2 và thanh truyền 3. Bánh răng 1 quay quanh

D, bánh răng 2 quay quanh E và lăn không trượt trên bánh răng 1. Thanh AC nối bản lề với bánh răng 1 tại A, còn đầu kia nằm tại điểm C trên một khớp trượt quay được do phần cố định của nó gắn liền với bánh răng 2.

Xác định vận tốc góc thanh 3 và bánh răng 2. Ta chọn hệ toạ độ Dxyz (Dxy như hình vẽ, trục Dz vuông góc với mặt phẳng hình vẽ) và trục Ax'y'z' (trục Ax' là thanh AC, trục Ay' vuông góc với AC ở trong mặt phẳng hình vẽ, trục Az' vuông góc với mặt phẳng hình vẽ). Gọi các véc tơ đơn vị trên trục Dxyz là $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, các véc tơ đơn vị trên hệ trục Ax'y'z' là $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.



Hình 4.22b

Từ hình 4.22a ta có

$$\vec{\omega}_1 = \bar{\omega}_1 \vec{e}_z, \ \vec{\omega}_2 = \bar{\omega}_2 \vec{e}_z$$

Tại điểm tiếp xúc B ta có các hệ thức

$$\vec{v}_B = 3R\bar{\omega}_1 \vec{e}_y = -2R\bar{\omega}_2 \vec{e}_y$$

Trong đó để đơn giản cách viết ta ký hiệu $\bar{\omega}_i$ là giá trị đại số. Từ đó suy ra

$$\bar{\omega}_2 = -\frac{3}{2}\bar{\omega}_1 \qquad (1)$$

Để xác định $\bar{\omega}_3$ ta cần thiết lập mối quan hệ giữa vận tốc của điểm C^* trên thanh 3 và vận tốc của điểm C thuộc bánh xe 2. Chọn thanh AC làm hệ quy chiếu động, theo định lý vận tốc

$$\vec{v}_C^a = \vec{v}_C^e + \vec{v}_C^r \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_{C^*} + \vec{v}_C^r \qquad (2)$$

Trong đó $\vec{v}_C^r$ nằm trên trục AC (hình 4.20b). Từ hình 4.20b ta có

$$\vec{e}_x = \cos\alpha \vec{e}_1 - \sin\alpha \vec{e}_2, \vec{e}_y = \sin\alpha \vec{e}_1 + \cos\alpha \vec{e}_2 \qquad (3)$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\vec{v}_C^a = \vec{v}_C = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EC} = R\left(2\vec{e}_x + 5\vec{e}_y\right) \qquad (4)$$

$$\vec{v}_C^e = \vec{v}_{C^*} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} = 5\sqrt{5}\,R\vec{e}_1 \qquad (5)$$

Thế các biểu thức (3) vào hệ thức (4) xác định được

$$\vec{EC} = R(2\cos\alpha + 5\sin\alpha)\vec{e}_1 + R(5\cos\alpha - 2\sin\alpha)\vec{e}_2 \qquad (6)$$

Thế (4), (5) và (6) vào hệ thức (2) ta được

$$\begin{aligned}&\vec{\omega}_2\vec{e}_3 \times \left[R(2\cos\alpha + 5\sin\alpha)\vec{e}_1 + R(5\cos\alpha - 2\sin\alpha)\vec{e}_2\right]\\ &= -3R\omega_1(\sin\alpha\vec{e}_1 + \cos\alpha.\vec{e}_2) + \omega_3\vec{e}_3 \times 5\sqrt{5}R\vec{e}_1 + v_C^r.\vec{e}_1\end{aligned} \qquad (7)$$

Chú ý tới $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

từ (7) suy ra

$$\begin{aligned}&R\vec{\omega}_2(2\cos\alpha + 5\sin\alpha)\vec{e}_2 - \vec{\omega}_2 R(5\cos\alpha - 2\sin\alpha)\vec{e}_1\\ &= \left(-3R\vec{\omega}_1\sin\alpha + v_C^r\right)\vec{e}_1 + \left(-3R\vec{\omega}_1\cos\alpha + 5\sqrt{5}R\vec{\omega}_3\right)\vec{e}_2\end{aligned} \qquad (8)$$

Từ (8) suy ra

$$R\vec{\omega}_2(2\cos\alpha + 5\sin\alpha) = -3R\vec{\omega}_1\cos\alpha + 5\sqrt{5}R\vec{\omega}_3 \qquad (9)$$

Từ (9) ta có

$$\vec{\omega}_3 = \frac{9\vec{\omega}_2 + 6\vec{\omega}_1}{25} = -0,3\vec{\omega}_1 \qquad (10)$$

Bây giờ ta chuyển sang xác định tâm vận tốc tức thời P^* của thanh 3.

$$\vec{v}_{P^*} = \vec{v}_A + \vec{v}_{P^*A} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{AP^*} = \vec{0} \qquad (11)$$

Chú ý rằng

$$\overrightarrow{AP^*} = (x_{P^*} - x_A)\cdot\vec{e}_x + (y_{P^*} - y_A)\cdot\vec{e}_y = (x_{P^*} + 3R)\cdot\vec{e}_x + y_{P^*}.\vec{e}_y \qquad (12)$$

Thế (12) vào (11) xác định được

$$-3R\vec{\omega}_1\cdot\vec{e}_y + \vec{\omega}_3\vec{e}_z \times \left[(x_{P^*} + 3R)\vec{e}_x + y_{P^*}.\vec{e}_y\right] = \vec{0}$$

Từ đó ta có

$$3R\vec{\omega}_1\vec{e}_y = \vec{\omega}_3(x_{P^*} + 3R)\vec{e}_y - \vec{\omega}_3 y_{P^*}.\vec{e}_x = \vec{0} \qquad (13)$$

Từ (13) suy ra toạ độ của tâm vận tốc tức thời

$$y_{P^*} = 0$$

$$x_{P^*} = 3R\left(-1 + \frac{\vec{\omega}_1}{\vec{\omega}_3}\right) = -13R \qquad (14)$$

5. XÁC ĐỊNH VẬN TỐC GÓC, GIA TỐC GÓC CỦA VẬT RẮN PHẲNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP WILLIS

Trong chương ba ta đã chứng minh công thức cộng vận tốc góc của vật rắn

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \qquad (5.1)$$

Trong trường hợp vật rắn phẳng do các trục quay song song nhau, từ công thức (5.1) suy ra

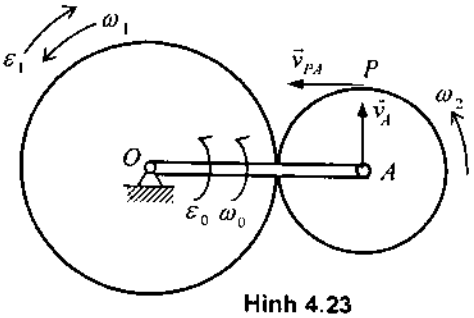
$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r \tag{5.2}$$

Do Willis* (Vilit) là người đầu tiên áp dụng các công thức trên để tính vận tốc góc vật rắn, cho nên phương pháp này được gọi là phương pháp Willis.

Thí dụ 4.11. Khảo sát động học cơ cấu vi sai cho trên hình 4.23. Bánh răng 1 quay quanh O với vận tốc góc ω_1, gia tốc góc ε_1. Tay quay OA quay quanh O độc lập với bánh răng 1 với vận tốc góc ω_0, gia tốc góc ε_0. Hai bánh răng 1 và 2 lăn không trượt trên nhau và có bán kính tương ứng là r_1 và r_2. Bánh răng 2 quay được quanh chốt A ở trên tay quay. Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của bánh xe 2. Tìm vận tốc, gia tốc của điểm P ở trên vành bánh xe 2 mà PA ⊥ OA (hình 4.23).

Lời giải. Cơ cấu vi sai trên hình 4.23 là cơ cấu phẳng có ba khâu chuyển động. Bánh răng 1 chuyển động quay quanh một trục cố định. Tay quay OA chuyển động quay quanh O. Bánh răng 2 chuyển động phẳng. Sự truyền động từ bánh răng 1 và tay quay OA sang bánh răng 2 thực hiện nhờ sự ăn khớp giữa các bánh răng 1 và 2. Chú ý rằng cơ cấu vi sai trên hình 4.23 là cơ cấu hai bậc tự do. Để xác định chuyển động của nó phải cho biết trước vận tốc góc của hai khâu.

Bài toán vận tốc. Giải bài toán trên bằng phương pháp Vilit. Chọn tay quay OA làm hệ quy chiếu động. Đứng trong hệ quy chiếu này, cặp bánh răng 1 và 2 là một cặp bánh răng ăn khớp ngoài, quay quanh các trục O và A với các vận tốc góc tương đối $\bar{\omega}_{1r}$ và $\bar{\omega}_{2r}$.



Hình 4.23

Theo định lý về tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục song song, ta có

$$\bar{\omega}_{1r} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0; \quad \bar{\omega}_{2r} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_0$$

Tỉ số truyền động tương đối giữa hai bánh răng là

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_0} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1} \tag{1}$$

Trong đó z_1, z_2 là số răng của bánh răng 1 và 2.

---

* Robert Willis (1800–1875), giáo sư cơ học Trường Đại học Cambridge và là thành viên Hội khoa học Hoàng gia Anh (từ 1834). Ông có nhiều công trình trong lĩnh vực Cơ học máy.

Công thức (1) gọi là công thức Willis. Phương pháp xác định vận tốc góc của vật rắn chuyển động phẳng nhờ công thức (1) gọi là phương pháp Willise. Từ (1) suy ra:

$$\bar{\omega}_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\bar{\omega}_0 - \frac{r_1}{r_2}\bar{\omega}_1 \qquad (2)$$

Vận tốc điểm P được tính theo công thức $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}$. Trong đó $\vec{v}_A$ vuông góc với OA, hướng theo chiều của $\bar{\omega}_0$ (hình 4.23) và có trị số $v_A = OA.\omega_0 = (r_1 + r_2)\omega_0$, $\vec{v}_{PA}$ vuông góc với AP, hướng theo chiều của $\bar{\omega}_2$. Trị số của nó $v_{PA} = AP\omega_2 = r_2\omega_2$. Giá trị của $\vec{v}_P$ là

$$v_P = \sqrt{v_A^2 + v_{PA}^2} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2\omega_0^2 + r_2^2\omega_2^2}$$

Bài toán gia tốc. Do tính đối xứng của cơ cấu, hệ thức (2) luôn luôn đúng tại mọi vị trí của cơ cấu. Đạo hàm hệ thức đó ta được

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\bar{\varepsilon}_0 - \frac{r_1}{r_2}\bar{\varepsilon}_1 \qquad (3)$$

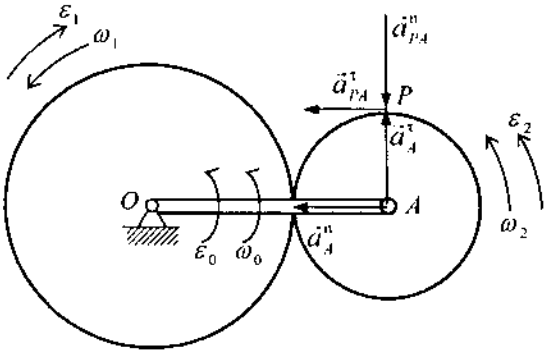
Lấy A làm cực, gia tốc điểm P được xác định theo công thức

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{PA}^{\tau} + \vec{a}_{PA}^{n} \qquad (4)$$

Trong đó

$$a_A^{\tau} = OA.\varepsilon_0 = (r_1 + r_2)\varepsilon_0,\ a_A^{n} = OA.\omega_0^2 = (r_1 + r_2)\omega_0^2,$$

$$a_{PA}^{\tau} = AP.\varepsilon_2 = r_2\varepsilon_2,\ a_{PA}^{n} = AP.\omega_2^2 = r_2\omega_2^2$$



Hình 4.24

Phương và chiều của bốn véc tơ này được vẽ trên hình 4.24. Chiếu phương trình véctơ (4) lên các trục của hệ toạ độ vuông góc ta được

$$a_{Px} = -a_A^{n} - a_{PA}^{\tau}, a_{Py} = a_A^{\tau} - a_{PA}^{n}$$

Cuối cùng ta tính được

$$a_P = \sqrt{a_{Px}^2 + a_{Py}^2}\ .$$

Chương 5

ĐỘNG HỌC VẬT RẮN KHÔNG GIAN

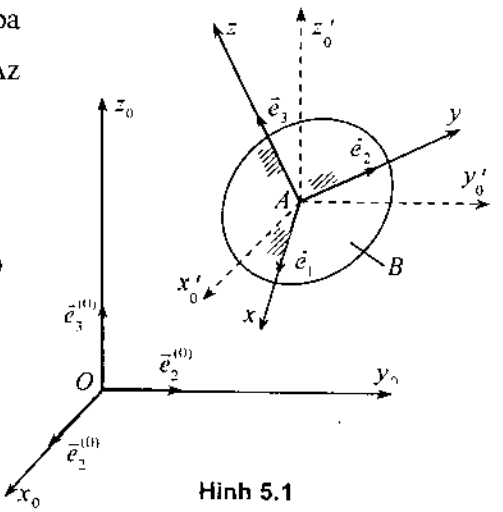
Trong chương này chúng ta khảo sát chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định và chuyển động tổng quát của vật rắn trong không gian. Trước hết giới thiệu khái niệm ma trận côsin chỉ hướng (còn gọi là ma trận quay của vật rắn). Sau đó trình bày các công thức xác định vận tốc góc, gia tốc góc, vận tốc các điểm, gia tốc các điểm của vật rắn quay quanh một điểm cố định. Trên cơ sở chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định, trình bày bài toán xác định chuyển động tổng quát của vật rắn.

Các bài toán áp dụng như tổng hợp chuyển động quay quanh hai trục giao nhau, động học cơ cấu hành tinh, vi sai nón, động học rôbốt công nghiệp là các bài toán thường gặp của người kỹ sư cơ khí và kỹ sư cơ tin điện tử. Do vậy, các bài toán này sẽ được trình bày tương đối kỹ ở đây.

1. MA TRẬN CÔSIN CHỈ HƯỚNG

1.1. Định nghĩa ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn

Cho vật rắn B và hệ quy chiếu $R_O = \left\{\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}, \vec{e}_3^{(0)}\right\}$. Trong đó $\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}, \vec{e}_3^{(0)}$ là ba véc tơ đơn vị trên các trục Ox_0, Oy_0, Oz_0. Gắn chặt vào vật rắn B một hệ quy chiếu $R = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ với $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là ba véctơ đơn vị trên các trục Ax, Ay, Az (hình 5.1).



Hình 5.1

a) Định nghĩa. Ma trận vuông cấp ba

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_1 & \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_2 & \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_1 & \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_2 & \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_1 & \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_2 & \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

được gọi là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B đối với hệ quy chiếu R_O. Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$a_{ij} = \vec{e}_i^{(0)}.\vec{e}_j = \cos\left(\vec{e}_i^{(0)}, \vec{e}_j\right), \ (i, j = 1,2,3) \tag{1.2}$$

thì ma trận côsin chỉ hướng (1.1) có dạng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Từ định nghĩa trên trong hệ quy chiếu R_O ta có các hệ thức liên hệ

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= a_{11}\vec{e}_1^{(0)} + a_{21}\vec{e}_2^{(0)} + a_{31}\vec{e}_3^{(0)} \\ \vec{e}_2 &= a_{12}\vec{e}_1^{(0)} + a_{22}\vec{e}_2^{(0)} + a_{32}\vec{e}_3^{(0)} \\ \vec{e}_3 &= a_{13}\vec{e}_1^{(0)} + a_{23}\vec{e}_2^{(0)} + a_{33}\vec{e}_3^{(0)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nếu ký hiệu $\mathbf{e}_i$ là ma trận cột gồm các phần tử của véc tơ $\vec{e}_i$ trong hệ quy chiếu R_O

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

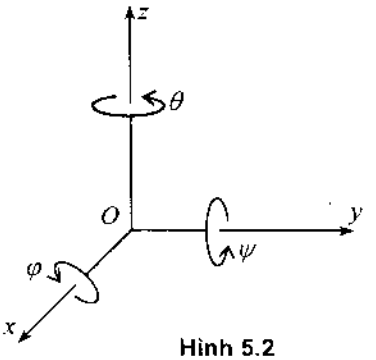
thì ma trận côsin chỉ hướng (1.3) có dạng

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right] \tag{1.6}$$

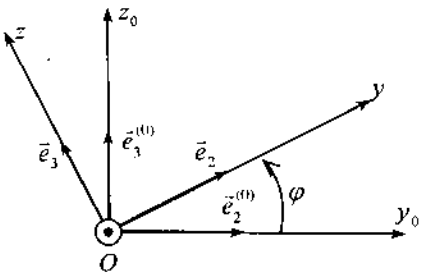
Ma trận côsin chỉ hướng **A** còn được gọi là ma trận quay của vật rắn.

b) Các ma trận quay cơ bản

Quy ước hướng quay dương là hướng quay ngược chiều kim đồng hồ như hình vẽ 5.2. Các phép quay quanh trục x, y, z của hệ toạ độ vuông góc Oxyz được gọi là các phép quay cơ bản.



Hình 5.2



Hình 5.3

Hãy tìm ma trận quay của phép quay quanh trục x_O một góc φ (hình 5.3). Theo công thức định nghĩa (1.1) ta có

$$\mathbf{A}_{x0}(\varphi)=\begin{bmatrix}\vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_1 & \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_2 & \vec{e}_1^{(0)}.\vec{e}_3\\ \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_1 & \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_2 & \vec{e}_2^{(0)}.\vec{e}_3\\ \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_1 & \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_2 & \vec{e}_3^{(0)}.\vec{e}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Ma trận (1.7) được gọi là ma trận quay của phép quay cơ bản quanh trục x_O.

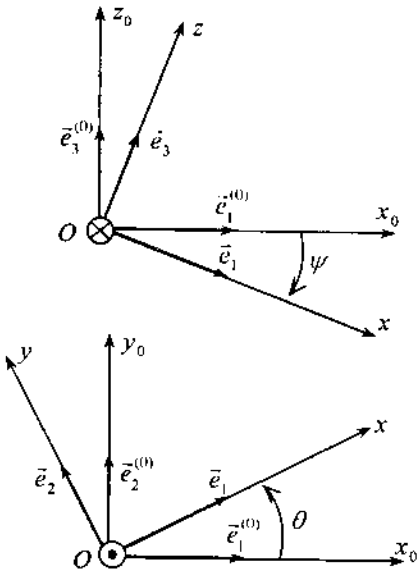
Bằng cách tương tự, xác định được các ma trận quay cơ bản quanh các trục y_O và z_O (hình 5.4)

$$\mathbf{A}_{y0}(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & \sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi\end{bmatrix} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{A}_{z0}(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Từ các công thức (1.7), (1.8) và (1.9) dễ dàng tính được

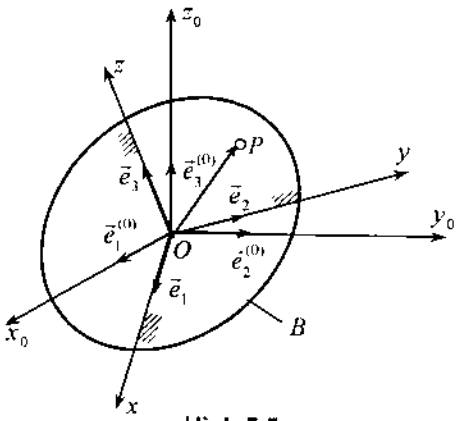
$$\det\mathbf{A}_{x0}(\varphi)=\det\mathbf{A}_{y0}(\psi)=\det\mathbf{A}_{z0}(\theta)=1$$



Hình 5.4

1.2. Ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn

Để thấy rõ ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn (ma trận quay), xét hai hệ quy chiếu R_0 và R có cùng gốc O. Trong đó hệ quy chiếu $R_O \equiv Ox_Oy_Oz_O$ là hệ quy chiếu cố định, hệ quy chiếu $R \equiv Oxyz$ gắn liền với vật rắn B. Lấy một điểm P bất kỳ thuộc vật rắn B. Vị trí của điểm P được xác định bởi véc tơ định vị $\vec{OP}=\vec{r}_P$. Ký hiệu các tọa độ của điểm P trong hệ quy chiếu động Oxyz là x_P, y_P, z_P, các tọa độ của điểm P trong hệ quy chiếu cố định $Ox_Oy_Oz_O$ là $x_P^{(0)}$, $y_P^{(0)}$, $z_P^{(0)}$. Ta có các hệ thức sau



Hình 5.5

$$\vec{r}_P = x_P^{(0)}\vec{e}_1^{(0)} + y_P^{(0)}\vec{e}_2^{(0)} + z_P^{(0)}\vec{e}_3^{(0)}, \tag{1.10}$$

$$\vec{r}_P = x_P\vec{e}_1 + y_P\vec{e}_2 + z_P\vec{e}_3. \tag{1.11}$$

Thế các biểu thức (1.4) vào hệ thức (1.11) xác định được

$$\vec{r}_P = x_P\left(a_{11}\vec{e}_1^{(0)} + a_{21}\vec{e}_2^{(0)} + a_{31}\vec{e}_3^{(0)}\right) + y_P\left(a_{12}\vec{e}_1^{(0)} + a_{22}\vec{e}_2^{(0)} + a_{32}\vec{e}_3^{(0)}\right)$$
$$+ z_P\left(a_{13}\vec{e}_1^{(0)} + a_{23}\vec{e}_2^{(0)} + a_{33}\vec{e}_3^{(0)}\right)$$

hay
$$\vec{r}_P = \left(a_{11}x_P + a_{12}y_P + a_{13}z_P\right)\vec{e}_1^{(0)} + \left(a_{21}x_P + a_{22}y_P + a_{23}z_P\right)\vec{e}_2^{(0)}$$
$$+ \left(a_{31}x_P + a_{32}y_P + a_{33}z_P\right)\vec{e}_3^{(0)} \qquad (1.12)$$

So sánh các biểu thức (1.10) và (1.12) suy ra hệ phương trình

$$x_P^{(0)} = a_{11}x_P + a_{12}y_P + a_{13}z_P$$
$$y_P^{(0)} = a_{21}x_P + a_{22}y_P + a_{23}z_P$$
$$z_P^{(0)} = a_{31}x_P + a_{32}y_P + a_{33}z_P$$

Hệ phương trình trên có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

Phương trình (1.13) có thể viết gọn lại dưới dạng

$$\mathbf{r}_p^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{r}_p \qquad (1.14)$$

Từ hệ phương trình (1.14) ta rút ra kết luận như sau: Ma trận côsin chỉ hướng **A** biến đổi các tọa độ của điểm P bất kỳ thuộc vật rắn trong hệ quy chiếu động $R \equiv \{Oxyz\}$ sang các tọa độ của điểm P đó trong hệ quy chiếu cố định $R_0 \equiv \{Ox_0y_0z_0\}$.

1.3. Một vài tính chất cơ bản của ma trận côsin chỉ hướng

a) Tính chất 1: Ma trận côsin chỉ hướng là ma trận trực giao.

Theo công thức (1.6) suy ra

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$$

Như thế ma trận côsin chỉ hướng **A** là ma trận có ba cột là ba véc tơ trực chuẩn. Do đó **A** là ma trận trực giao. Từ đó suy ra $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

Hệ quả: Trong chín thành phần của ma trận côsin chỉ hướng chỉ có ba thành phần độc lập.

Do ma trận côsin chỉ hướng là ma trận trực giao nên $\mathbf{A}.\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$. Từ đó ta nhận được sáu phương trình liên hệ giữa các thành phần của ma trận côsin chỉ phương như sau

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0 \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} &= 0 \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Do vậy chỉ có ba thành phần của ma trận côsin chỉ hướng là độc lập.

b) Tính chất 2: Định thức của ma trận côsin chỉ hướng det(**A**) =1.

Chứng minh. Theo biểu thức tích hỗn hợp của ba véc tơ

$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$$

và công thức (1.6) suy ra

$$\det(A) = |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = \vec{e}_1.(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \qquad (1)$$

Do R là hệ quy chiếu thuận nên

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được

$$\det(\mathbf{A}) = \vec{e}_1.\vec{e}_1 = 1.$$

c) Tính chất 3: Ma trận côsin chỉ hướng **A** có ít nhất một trị riêng $\lambda_1 = 1$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh các trị riêng của ma trận côsin chỉ hướng **A** đều có trị tuyệt đối là 1. Giả sử λ là trị riêng của ma trận côsin chỉ hướng **A**, $\vec{u}$ là véc tơ riêng tương ứng. Theo bài toán trị riêng ta có

$$\mathbf{A}\vec{u} = \lambda\vec{u} \qquad (1)$$

Từ đó suy ra

$$(\mathbf{A}\vec{u}).(\mathbf{A}\vec{u}) = (\mathbf{Au})^T(\mathbf{Au}) = \mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Au} = \mathbf{u}^T\mathbf{u} = |\vec{u}|^2 \qquad (2)$$

Trong đó **u** là ma trận cột gồm ba thành phần là hình chiếu của véc tơ $\vec{u}$ trên các trục của hệ toạ độ vuông góc. Người ta cũng hay gọi ma trận cột **u** là véc tơ đại số.

Vậy $\qquad |\mathbf{A}\vec{u}| = |\vec{u}| = |\lambda||\vec{u}| \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 1 \qquad (3)$

Bây giờ ta chứng minh trong ba trị riêng λ_1, λ_2, λ_3 của ma trận **A** có một trị riêng là 1. Theo trên ta có $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$. Do **A** là ma trận vuông cấp ba với các phần tử là các số thực, nên phương trình đặc trưng của nó là phương trình đại số bậc ba với hệ số thực

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \qquad (4)$$

Do đó các trị riêng của ma trận **A** có thể có hai khả năng:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ là các số thực

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ có một trị riêng thực và một cặp trị riêng phức liên hợp.

Giả sử λ_1 là trị riêng thực của **A**. Theo (3) ta thấy có hai khả năng xảy ra hoặc $\lambda_1 = 1$ hoặc $\lambda_1 = -1$. Nếu $\lambda_1 = 1$, định lý được chứng minh. Nếu $\lambda_1 = -1$, ta có

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2\lambda_3 = -1 \qquad (5)$$

Ta thấy có hai khả năng xảy ra: hoặc λ_2, λ_3 là hai số thực hoặc λ_2, λ_3 là hai số phức liên hợp. Nếu λ_2 và λ_3 là hai số phức liên hợp ($\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$) ta có hệ thức

$$\lambda_2\lambda_3 = \lambda_2\overline{\lambda_2} = |\lambda_2|^2 = 1 \qquad (6)$$

Hệ thức (6) mâu thuẫn với (5). Vậy λ_2, λ_3 phải là hai số thực. Do $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, $\lambda_2\lambda_3 = -1$ nên ta suy ra:

hoặc $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ hoặc $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$

Như thế ma trận côsin chỉ hướng **A** luôn có một trị riêng bằng 1.

2. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

2.1. Định nghĩa

Vật rắn chuyển động mà có một điểm thuộc vật cố định được gọi là vật rắn quay quanh điểm cố định đó.

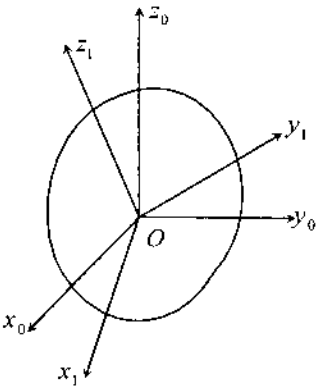
Khi vật rắn quay quanh một điểm cố định, khoảng cách giữa một điểm P thuộc vật rắn đến điểm O cố định luôn luôn không đổi. Do đó quỹ đạo của điểm P là một đường cong nằm trên mặt cầu tâm O bán kính OP. Vì vậy người ta còn gọi chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định là chuyển động cầu.

Chú ý. Điểm cố định có thể là một điểm thuộc vật rắn mà cũng có thể là một điểm ở ngoài vật rắn. Trong trường hợp thứ hai này, khoảng cách từ điểm cố định đến hai điểm nào đó của vật rắn luôn luôn không đổi.

Các tọa độ suy rộng xác định vị trí của vật rắn quay quanh một điểm cố định thường được sử dụng là các góc Euler, các góc Cardan, các tham số Euler, các tham số Rodrigues. Trong giáo trình này ta giới hạn chỉ giới thiệu các góc Euler.

2.2. Định lý Euler về chuyển động quay hữu hạn của vật rắn có một điểm cố định

Xét chuyển động của vật rắn B có một điểm O cố định. Chọn $R_0 \equiv \{Ox_0y_0z_0\}$ là hệ quy chiếu cố định, hệ quy chiếu $R_1 \equiv Ox_1y_1z_1$ là hệ quy chiếu động gắn liền vào vật rắn B (hình 5.6). Vị trí của vật rắn B đối với hệ quy chiếu cố định được xác định bởi ma trận côsin chỉ hướng A xác định vị trí của hệ quy chiếu động R_1 đối với hệ quy chiếu cố định R_0.



Hình 5.6

Định lý Euler. Cho R_0 và R_1 là hai hệ quy chiếu có chung điểm gốc tại O. Hệ quy chiếu R_1 gắn chặt vào vật rắn B. Ta có thể quay hệ quy chiếu R_0 sang hệ quy chiếu R_1 bằng một phép quay hữu hạn quanh trục Δ đi qua O. Hướng của trục Δ là hướng của véctơ riêng $\vec{u}$ ứng với trị riêng $\lambda = 1$ của ma trận côsin chỉ hướng A.

Chứng minh. Gọi λ là trị riêng của ma trận côsin chỉ hướng A mà $\lambda = 1$. Theo bài toán trị riêng ta có

$$\mathbf{A}\vec{u} = \lambda\vec{u} = \vec{u} \qquad (1)$$

Gọi $\mathbf{u}^{(0)}$ là véctơ đại số của $\vec{u}$ trong hệ quy chiếu R_0, $\mathbf{u}^{(1)}$ là véctơ đại số của $\vec{u}$ trong hệ quy chiếu R_1. Từ (1) suy ra

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} \qquad (2)$$

Mặt khác từ ý nghĩa của ma trận côsin chỉ hướng ta có

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(1)} \qquad (3)$$

Thế (2) vào (3) ta được

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} \qquad (4)$$

Như thế hình chiếu của véctơ $\vec{u}$ lên các trục toạ độ của hệ quy chiếu R_0 và R_1 là như nhau. Vậy véctơ $\vec{u}$ là bất biến trong phép quay hệ quy chiếu R_0 sang hệ quy chiếu R_1. Vậy $\vec{u}$ là trục quay tức thời của vật rắn trong phép quay R_0 sang R_1.

Hệ quả. Chuyển động quay tức thời của vật rắn quanh một điểm cố định O là chuyển động quay quanh một trục quay tức thời đi qua điểm O cố định đó.

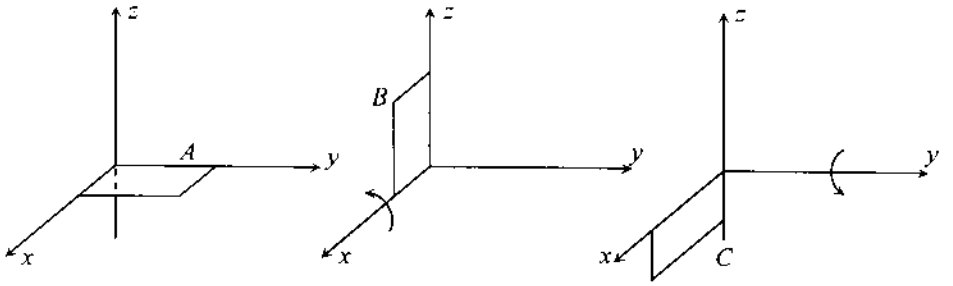
Chú ý:

1) Do định lý Euler, nên ma trận côsin chỉ hướng A của hệ quy chiếu R_1 đối với hệ quy chiếu R_0 còn được gọi là ma trận quay hệ quy chiếu R_0 sang hệ quy chiếu R_1.

2) Tính không giao hoán của các phép quay hữu hạn.

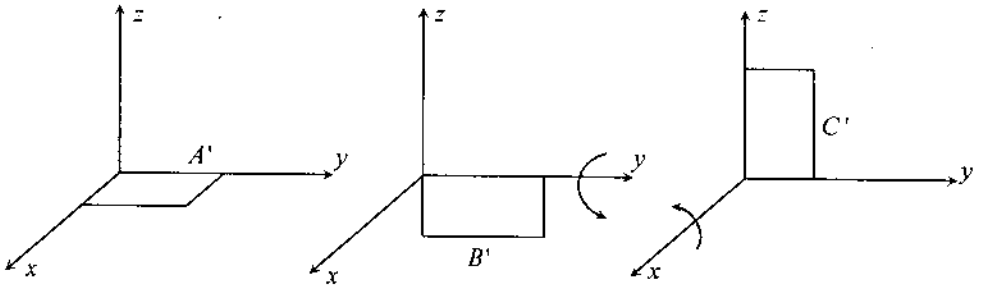
Các chuyển động quay hữu hạn không có tính chất giao hoán: Xuất phát từ một vị trí cho trước thực hiện hai chuyển động quay theo thứ tự khác nhau, ta được vị trí cuối cùng khác nhau.

Thí dụ 5.1. Thực hiện phép quay quanh trục x một góc $\beta_1 = 90^0$, sau đó quay quanh trục y một góc $\beta_2 = 90^0$ (hình 5.7).



Hình 5.7

Nếu ta thay đổi thứ tự quay, quay quanh trục y một góc $\beta_2 = 90^0$, sau đó quay quanh trục x một góc $\beta_1 = 90^0$ (hình 5.8).



Hình 5.8

Như thế thực hiện hai phép quay quanh các trục x và y những góc như nhau, nhưng thứ tự quay khác nhau, vị trí trong không gian của vật rắn sẽ khác nhau.

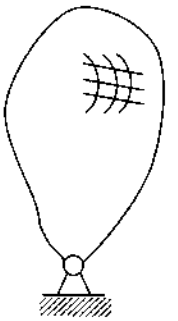
2.3. Các góc Euler và ma trận quay Euler

Vị trí của vật rắn B quay quanh điểm O cố định được xác định bởi vị trí của hệ quy chiếu động Oxyz (gắn chặt vào vật rắn B) đối với hệ quy chiếu cố định $Ox_Oy_Oz_O$ (hình 5.9). Giả sử giao của mặt phẳng Ox_Oy_O và mặt phẳng Oxy là trục OK. Trục OK này được gọi là đường nút (the line of nodes). Ta đưa vào các ký hiệu sau:

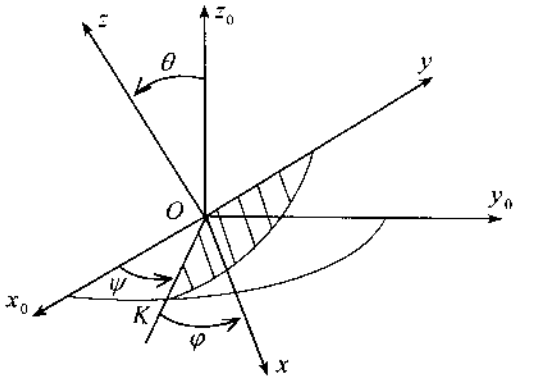
– Góc giữa trục Ox_O và OK là ψ (góc tiến động: precesion angular),

– Góc giữa trục Oz_O và Oz là θ (góc trương động: nutation angular),

– Góc giữa trục OK và Ox là φ (góc quay riêng: spin angular).



Hình 5.9a



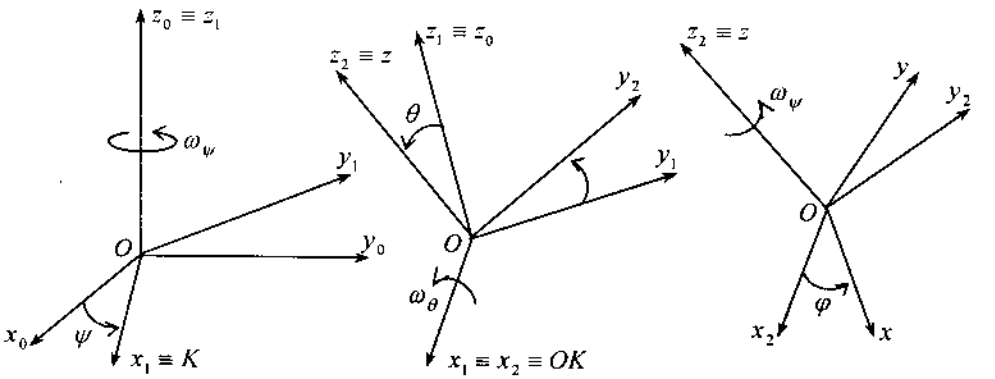
Hình 5.9b

Ba góc ψ, θ, φ được gọi là các góc Euler. Như thế, vị trí của vật rắn B đối với hệ quy chiếu cố định được xác định bởi ba tọa độ suy rộng ψ, θ, φ. Phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định có dạng

$$\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t) \tag{2.1}$$

Từ đó suy ra, vật rắn quay quanh một điểm cố định có ba bậc tự do.

Khi xác định vị trí của vật rắn bằng các góc Euler, ta có thể quay hệ quy chiếu cố định $Ox_Oy_Oz_O$ sang hệ quy chiếu động Oxyz bằng ba phép quay Euler như sau (hình 5.10):



Hình 5.10

– Quay hệ quy chiếu $R_0 \equiv Ox_Oy_Oz_O$ quanh trục Oz_O một góc ψ để trục Ox_O chuyển tới đường nút OK. Với phép quay này, hệ $Ox_Oy_Oz_O$ chuyển sang hệ $Ox_1y_1z_1$ với $Oz_O \equiv Oz_1$.

– Quay hệ quy chiếu $R_1 \equiv Ox_1y_1z_1$ quanh trục $Ox_1 \equiv OK$ một góc θ để trục $Oz_O \equiv Oz_1$ chuyển tới trục $Oz_2 \equiv Oz$. Như thế hệ quy chiếu $Ox_1y_1z_1$ chuyển sang hệ quy chiếu $Ox_2y_2z_2$ với $Ox_1 \equiv Ox_2 \equiv OK$.

– Quay hệ quy chiếu $R_2 \equiv Ox_2y_2z_2$ quanh trục $Oz_2 \equiv Oz$ một góc φ để trục $Ox_2 \equiv OK$ chuyển tới trục Ox. Với phép quay này hệ quy chiếu $Ox_2y_2z_2$ chuyển sang hệ quy chiếu Oxyz với $Oz_2 \equiv Oz$.

Như thế, bằng ba phép quay Euler quanh trục Oz_O một góc ψ, quanh trục OK một góc θ, quanh trục Oz một góc φ, hệ quy chiếu $Ox_Oy_Oz_O$ chuyển sang hệ quy chiếu Oxyz.

Các ma trận quay ứng với các phép quay Euler có dạng

$$\mathbf{A}_{z_O}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{A}_K(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$\mathbf{A}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Bây giờ ta xác định ma trận quay hệ quy chiếu $Ox_Oy_Oz_O$ sang hệ quy chiếu Oxyz (cũng là ma trận côsin chỉ hướng của hệ quy chiếu Oxyz đối với hệ quy chiếu $Ox_Oy_Oz_O$). Ta lấy P là một điểm bất kỳ của vật rắn B và ký hiệu A_E là ma trận quay nêu trên. Theo công thức (1.14) ta có

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_E \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Ta ký hiệu $x_P^{(i)}, y_P^{(i)}, z_P^{(i)}$ là tọa độ của điểm P trong hệ quy chiếu $R_i \equiv Ox_iy_iz_i$ (i =1,2). Theo công thức (1.14) ta có các hệ thức sau

$$\begin{bmatrix} x_P^{(2)} \\ y_P^{(2)} \\ z_P^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_z(\varphi) \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_P^{(1)} \\ y_P^{(1)} \\ z_P^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_K(\theta) \begin{bmatrix} x_P^{(2)} \\ y_P^{(2)} \\ z_P^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{z_O}(\psi) \begin{bmatrix} x_P^{(1)} \\ y_P^{(1)} \\ z_P^{(1)} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Thế (2.6) vào phương trình (2.7) ta được

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{z_O}(\psi)\mathbf{A}_K(\theta)\mathbf{A}_z(\varphi) \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

So sánh các biểu thức (2.8) và (2.5) ta suy ra biểu thức ma trận côsin chỉ hướng

$$\mathbf{A}_E = \mathbf{A}_{z_O}(\psi)\mathbf{A}_K(\theta)\mathbf{A}_z(\varphi) \tag{2.9}$$

Tính toán chi tiết ta được

$$\mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} c\psi c\varphi - s\psi c\theta s\varphi & -c\psi s\varphi - s\psi c\theta c\varphi & s\psi s\theta \\ s\psi c\varphi + c\psi c\theta s\varphi & -s\psi s\varphi + c\psi c\theta c\varphi & -c\psi s\theta \\ s\theta s\varphi & s\theta c\varphi & c\theta \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Ma trận côsin chỉ hướng (2.10) được gọi là ma trận quay Euler. Trong đó, ký hiệu $\cos\varphi = c\varphi$, $\sin\varphi = s\varphi$.

2.4. Vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn quay quanh một điểm cố định

a) Vận tốc góc và phương trình động học Euler

Theo trên ta có thể quay hệ quy chiếu $Ox_Oy_Oz_O$ sang hệ quy chiếu Oxyz bằng ba phép quay Euler: quay quanh trục Oz_O một góc ψ, quay quanh trục OK một góc θ và quay quanh trục Oz một góc φ. Áp dụng định lý cộng vận tốc góc trong chương 3 ta có vận tốc góc của vật rắn B (gắn liền vào hệ quy chiếu Oxyz) bằng tổng các vận tốc góc thành phần

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi = \dot{\psi}\vec{e}_z^{(0)} + \dot{\theta}\vec{e}_K + \dot{\varphi}\vec{e}_z \tag{2.11}$$

Dưới dạng ma trận cột, các véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}_\psi$, $\vec{\omega}_\theta$, $\vec{\omega}_\varphi$ có dạng

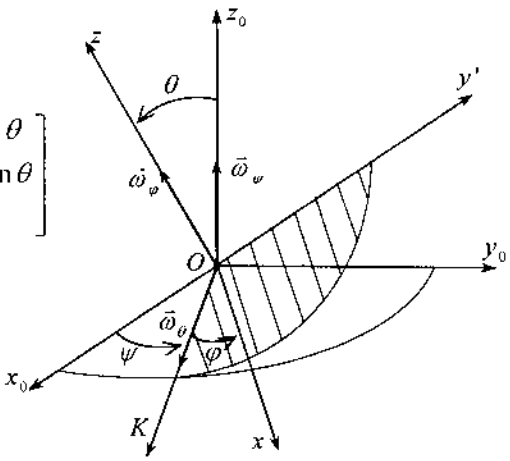
$$\boldsymbol{\omega}_{\psi}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{\psi} = \mathbf{A}_E^T \boldsymbol{\omega}_{\psi}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\varphi}^{(0)} = \mathbf{A}_E \boldsymbol{\omega}_{\varphi} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta \\ -\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ -\dot{\theta}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\theta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi \\ 0 \end{bmatrix}$$



Hình 5.11

Chiếu đẳng thức véc tơ (2.11) lên các trục x_0,y_0 và z_0 ta được:

$$\begin{aligned} \omega_x^{(0)} &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_y^{(0)} &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_z^{(0)} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Chiếu hệ thức (2.11) lên các hệ quy chiếu động xác định được

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Các phương trình (2.12) hoặc (2.13) được gọi là các phương trình động học Euler.

b) Phương trình vi phân động học

Từ các phương trình (2.13) ta suy ra

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} 0 & \sin\psi & cos\psi \\ 0 & \cos\theta cos\psi & -\cos\theta\sin\psi \\ 1 & \sin\theta\sin\psi & \sin\theta cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Tương tự, từ các phương trình (2.12) ta có

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} cos\varphi \sin\theta & \sin\varphi \sin\theta & cos\theta \\ -\sin\varphi \cos\theta & \cos\varphi cos\theta & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^{(0)} \\ \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Các phương trình (2.14) hoặc (2.15) được gọi là các phương trình vi phân động học.

c) Gia tốc góc của vật rắn

Khi biết vận tốc góc của vật rắn quay quanh một điểm cố định, xác định được gia tốc góc của vật rắn theo công thức

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{2.16}$$

2.5. Xác định vận tốc, gia tốc các điểm thuộc vật rắn quay quanh một điểm cố định

Theo các công thức trong chương 2 về quan hệ vận tốc, gia tốc hai điểm thuộc vật rắn ta có

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{PO} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \times \vec{r}_P \tag{2.17}$$

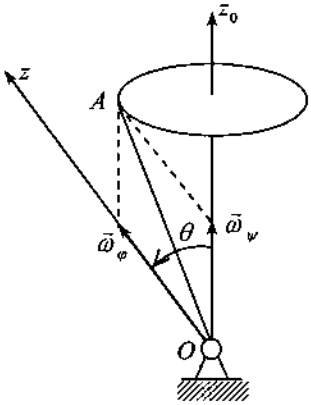
$$\vec{a}_P = \vec{a}_{PO} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P) \tag{2.18}$$

2.6. Chuyển động quay tiến động đều

Trong kỹ thuật thường gặp bài toán vật rắn quay quanh một điểm cố định hình thành từ hai chuyển quay quanh hai trục giao nhau. Nếu độ lớn các vận tốc của hai chuyển động quay thành phần đều là các hằng số và góc giữa hai trục quay không đổi thì chuyển động của vật rắn khi đó được gọi là chuyển động quay tiến động đều (steady precesion).

a) Định nghĩa. Chuyển động quay tiến động đều là chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định có các đặc điểm sau (hình 5.12)

$$\dot{\psi} = const, \quad \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi} = const.$$



Hình 5.12

b) Vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn quay tiến động đều

Từ định lý cộng vận tốc góc và định lý cộng gia tốc góc suy ra ($\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_\psi$, $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_\varphi$):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \dot{\psi}\vec{e}_z^{(0)} + \dot{\varphi}\vec{e}_z\,, \tag{2.19}$$

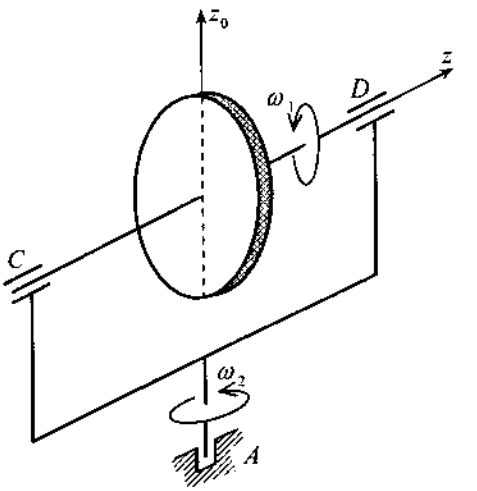
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_e \times \vec{\omega}_r \tag{2.20}$$

3. MỘT SỐ BÀI TOÁN ÁP DỤNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Có nhiều phương pháp giải bài toán động học vật rắn quay quanh một điểm cố định. Trong giáo trình này chúng ta chủ yếu sử dụng các định lý cộng vận tốc góc, cộng gia tốc góc và các định lý cộng vận tốc điểm, cộng gia tốc điểm, được trình bày trong các chương hai và ba để giải các bài tập.

3.1. Tổng hợp chuyển động quay quanh hai trục giao nhau

Thí dụ 5.2. Cho một đĩa tròn quay quanh trục nằm ngang CD ω_2 với vận tốc góc ω_1 không đổi. Trục CD lại quay quanh trục thẳng đứng Az_0 với vận tốc góc ω_2 không đổi (hình 5.13). Tính vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa khi $\omega_1 = 5$ 1/s, $\omega_2 = 3$ 1/s.



Hình 5.13

Lời giải. Ta chọn đĩa tròn làm vật rắn khảo sát. Đĩa tròn quay đều quanh trục CD. Khung CD lại quay đều quanh trục Az_O. Vậy chuyển động của đĩa là chuyển động quay tiến động đều. Áp dụng công thức

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$$

xác định được vận tốc góc của đĩa

$$\omega_a = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}831 \ (1/\text{s})$$

Gia tốc góc của đĩa

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}_e \times \vec{\omega}_r \Rightarrow \varepsilon_a = \omega_2\omega_1 \sin 90^0 = 15\,(1/\text{s}^2)$$

Thí dụ 5.3. Xét chuyển động của một bánh xe ô tô khi xe chạy trên đoạn đường cong. Ta xem gần đúng một đoạn nhỏ của đường cong là một cung tròn bán kính R = 50 m, bánh xe xem như đĩa tròn bán kính r = 0,4 m. Tìm vận tốc

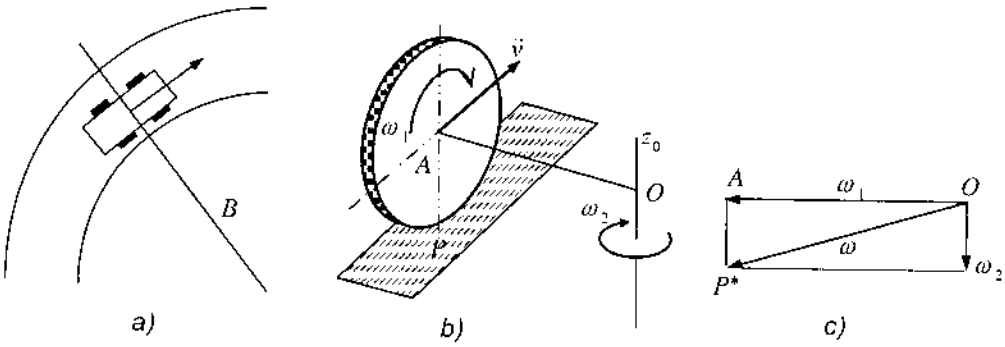
góc, gia tốc góc tuyệt đối của bánh xe ô tô (hình 5.14). Cho biết ô tô chuyển động với vận tốc v= 36 (km/giờ).

Lời giải. Chọn hệ khảo sát là bánh xe ô tô. Trong điều kiện của bài toán bánh xe chuyển động tiến động đều (bánh xe quay tương đối quanh trục AO nằm ngang với,trục AO lại quay quanh trục Oz_O thẳng đứng). Trong thí dụ này ta có

$$\omega_1 = \dot{\varphi} = const,\ \omega_2 = \dot{\psi} = const,\ \theta = 90^0$$

$$\omega_2 = \frac{v}{OA} = \frac{10}{50} = 0,2\ (1/s),\quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{0,4}{50} \Rightarrow \omega_1 = \frac{50}{0,4}\omega_2 = 25\quad (1/s)$$

Suy ra: $\omega_a = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \approx 25\,(1/s)$, $\varepsilon_a = \omega_2\omega_1 \sin 90^0 = 0,2.25 = 5\,(1/s^2)$



Hình 5.14

Thí dụ 5.4. Một con quay quay quanh điểm O cố định trên mặt sàn nằm ngang. Góc θ gữa trục thẳng đứng L và trục đối xứng Oz của con quay là hằng số (hình 5.15). Trục x của hệ động luôn song song với mặt sàn và quay quanh trục L với vận tốc góc $\dot{\psi} = const$. Con quay quay quay tương đối quanh trục z với vận tốc góc $\dot{\varphi} = const$. Cho biết OG = l_1. Hãy xác định:

a) Véc tơ vận tốc góc và véc tơ gia tốc góc của con quay.

b) Vận tốc khối tâm G của con quay.

Lời giải. Hệ động Oxyz quay quanh trục $Oz_0 = L$ với vận tốc góc $\omega_e = \dot{\psi}$. Theo hình vẽ ta có

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_2 = \dot{\psi}\sin\theta\vec{e}_y + \dot{\psi}\cos\theta\vec{e}_z \qquad (1)$$

Theo đầu bài ta có vận tốc góc tương đối của con quay là

$$\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_1 = \dot{\varphi}\vec{e}_z \qquad (2)$$

Vậy vận tốc góc tuyệt đối của con quay là

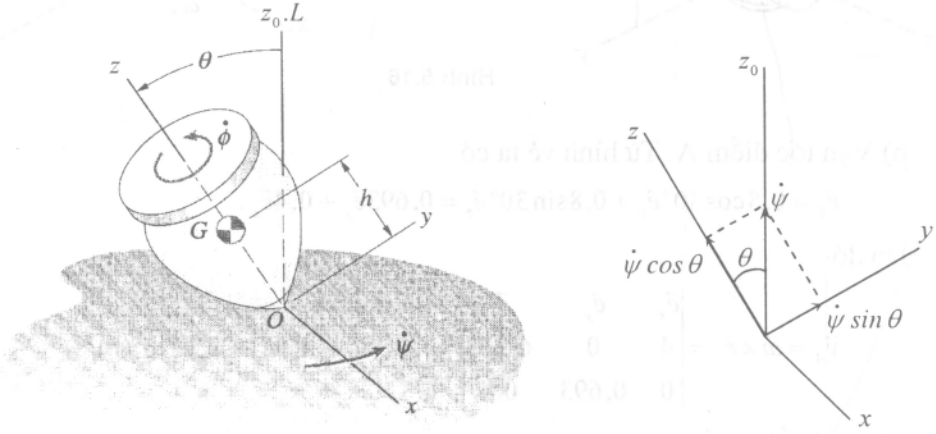
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \dot{\psi}\sin\theta\vec{e}_y + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\vec{e}_z \qquad (3)$$

Do ω_e = const, ω_r = const, gia tốc góc của con quay có dạng

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \dot{\psi}\sin\theta & \dot{\psi}\cos\theta \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \end{vmatrix} = \dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta\vec{e}_x \qquad (4)$$

Từ hình vẽ ta có $\vec{r}_G = l_1\vec{e}_z$. Do đó vận tốc của khối tâm G của con quay có dạng

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \times \vec{r}_G = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \dot{\psi}\sin\theta & \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi} \\ 0 & 0 & l_1 \end{vmatrix} = l_1\dot{\psi}\sin\theta\vec{e}_x \qquad (5)$$



Hình 5.15

Thí dụ 5.5. Cánh tay OA của cơ cấu điều khiển gắn cứng vào ổ trục và quay quanh trục x của bàn kẹp hình chữ U với vận tốc góc không đổi $\dot{\beta} = 4\,rad/s$. Bàn kẹp quay quay quanh trục z thẳng đứng với vận tốc góc không đổi n = 60vòng/phút. Tại thời điểm khảo sát góc $\beta = 30^0$. Cho biết OA dài 0,8 m. Hãy xác định:

a) Vận tốc góc của OA, gia tốc góc của OA,

b) Vận tốc điểm A, gia tốc điểm A.

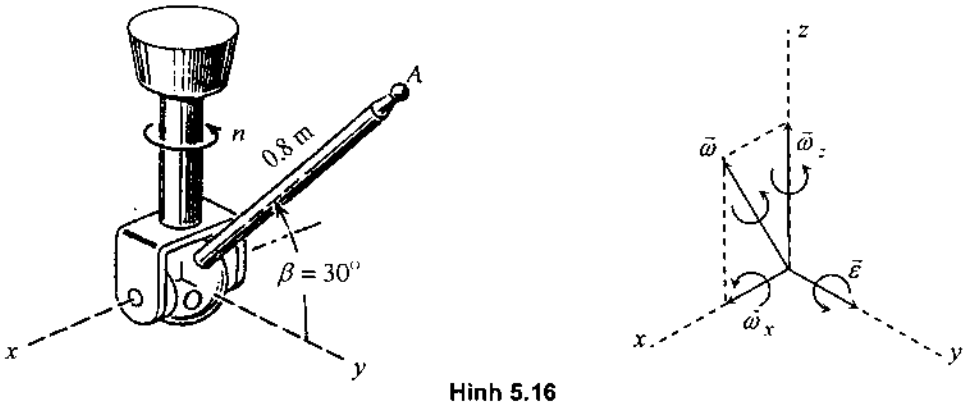
Lời giải. Chuyển động của OA là tổng hợp hai chuyển động quay quanh hai trục giao nhau tại O. Trong đó $\omega_r = \dot{\beta} = 4$ rad/s,, $\omega_e = 2\pi n/60 = 6{,}383$ rad/s.

a) Vận tốc góc của thanh OA

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = 4\vec{e}_x + 6{,}283\vec{e}_z \text{ (rad/s).}$$

Gia tốc góc của OA

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}_e \times \vec{\omega}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & 6,283 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times 6,283\vec{e}_y = 25,13\vec{e}_y \text{ (rad/s}^2\text{)}.$$



Hình 5.16

b) Vận tốc điểm A: Từ hình vẽ ta có

$$\vec{r}_A = 0,8\cos 30^o \vec{e}_y + 0,8\sin 30^o \vec{e}_z = 0,693\vec{e}_y + 0,4\vec{e}_z .$$

Do đó

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 0 & 6,283 \\ 0 & 0,693 & 0,4 \end{vmatrix} = -4,35\vec{e}_x - 1,6\vec{e}_y + 2,77\vec{e}_z \text{ (m/s)}$$

Gia tốc của điểm A

$$\vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_A) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v}_A$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 25,13 & 0 \\ 0 & 0,693 & 0,4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4 & 0 & 6,283 \\ -4,35 & -1,6 & 2,77 \end{vmatrix}$$

$$= 10,05\vec{e}_x + (10,05\vec{e}_x - 38,44\vec{e}_y - 6,4\vec{e}_z)$$

$$= 20,10\vec{e}_x - 38,44\vec{e}_y - 6,4\vec{e}_z \text{ m/s}^2$$

Thí dụ 5.6. Một đĩa tròn gắn liền với trục của mô tơ điện và quay quanh trục Oz của mô tơ với vận tốc góc n_1=120 vòng/ phút. Bàn quay gắn với vỏ mô tơ quay quanh trục thẳng đứng cố định Oz_0 với vận tốc góc n_2 = 60 vòng/ phút. Góc nghiêng giữa trục Oz và phương ngang $\gamma = 30^0$.

a) Xác định vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa,

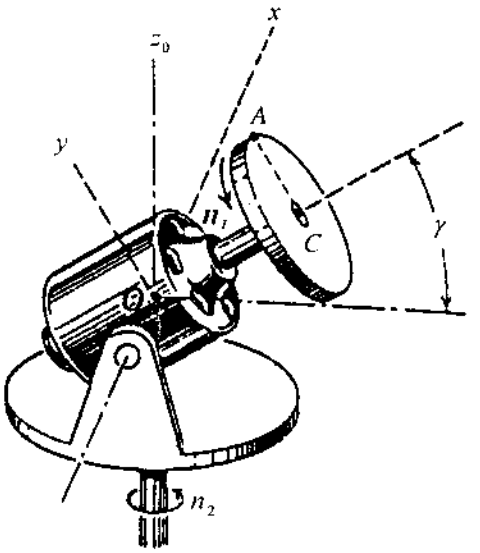
b) Xác định vận tốc và gia tốc của điểm A trên đĩa, cho biết AC = 125 mm, OC = 250 mm.

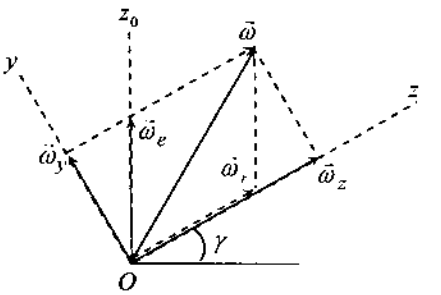
Lời giải. Chọn hệ trục động Oxyz gắn liền vào mô tơ và có các véc tơ đơn vị là $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Trục Oz_0 là trục thẳng đứng, véc tơ đơn vị là $\vec{e}_z^{(0)}$. Ta có

$$\vec{e}_z^{(0)} = \cos\gamma\vec{e}_y + \sin\gamma\vec{e}_z \qquad (1)$$

a) Xác định vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$ của đĩa

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e = \omega_r\vec{e}_z + \omega_e\vec{e}_z^{(0)} = \omega_r\vec{e}_z + \omega_e\cos\gamma\vec{e}_y + \omega_e\sin\gamma\vec{e}_z \\ &= \omega_e\cos\gamma\vec{e}_y + (\omega_r + \omega_e\sin\gamma)\vec{e}_z\end{aligned} \qquad (2)$$





Hình 5.17

Trong đó $\omega_r = 120\times(2\pi)/60 = 4\pi$ rad/s

$\omega_e = 60\times(2\pi)/60 = 2\pi$ rad/s

Vậy $\vec{\omega} = 2\pi\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y + \left(4\pi + 2\pi\dfrac{1}{2}\right)\vec{e}_z = \pi(\sqrt{3}\vec{e}_y + 5\vec{e}_z)$ (3)

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e\times\vec{\omega}_r = \begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \omega_e\cos\gamma & \omega_e\sin\gamma \\ 0 & 0 & \omega_r\end{vmatrix}$$

$$= \omega_e\omega_r\cos\gamma\vec{e}_x = 8\pi^2\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x = 4\pi^2\sqrt{3}\vec{e}_x \qquad (4)$$

b) Xác định vận tốc và gia tốc điểm A. Do $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = 125\vec{e}_y + 250\vec{e}_x$ (mm) ta có

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \pi\sqrt{3} & 5\pi \\ 0 & 125 & 250 \end{vmatrix} = (250\sqrt{3} - 625)\pi\vec{e}_x = -603{,}15\vec{e}_x$$

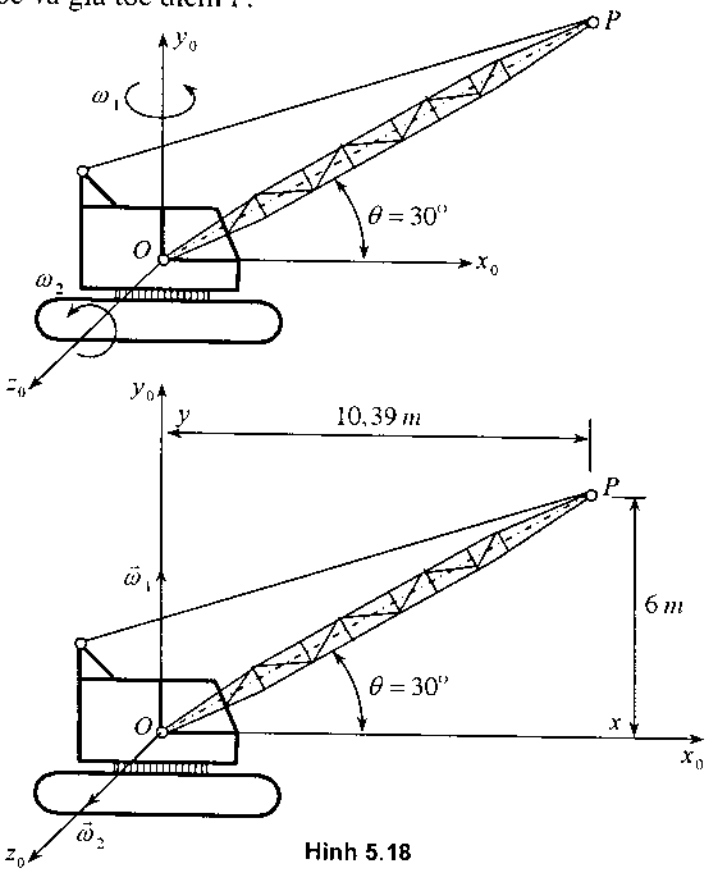
$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{v}_A = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 4\pi^2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 125 & 250 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \pi\sqrt{3} & 5\pi \\ -603{,}15 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1000\pi\sqrt{3} + 1250\sqrt{3} - 3125)\pi\vec{e}_y + (500\pi\sqrt{3} + 625\sqrt{3} - 750)\pi\vec{e}_z$$

Thí dụ 5.7. Cần cẩu OP của ô tô cẩu trục có thể quay quanh trục Oz ≡ Oz_0 với vận tốc góc không đổi $\omega_2 = 0{,}5$ rad/s. Buồng lái có thể quay quanh trục thẳng đứng Oy_0 vơi vận tốc góc không đổi $\omega_1 = 0{,}3$ rad/s. Lúc khảo sát góc $\theta = 30^0$. Cho biết độ dài thanh OP là 12 m. Hãy xác định:

a) Vận tốc góc và gia tốc góc của cần cẩu OP,

b) Vận tốc và gia tốc điểm P.



Hình 5.18

Lời giải. Cần trục OP tham gia hai chuyển động quay quanh hai trục giao nhau.

– Vận tốc góc $\vec{\omega}$ của cần trục OP

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = 0,3\vec{e}_y + 0,5\vec{e}_z \text{ (rad/s)} \qquad (1)$$

– Gia tốc góc của cần trục OP

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \dot{\omega}_r = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 = 0,15\vec{e}_y \times \vec{e}_z = 0,15\vec{e}_x \qquad (2)$$

Trong đó $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ là các véc tơ đơn vị trên hệ quy chiếu động Oxyz.

– Vận tốc và gia tốc điểm P

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0,3 & 0,5 \\ 10,39 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_x + 5,2\vec{e}_y - 3,12\vec{e}_z \qquad (3)$$

Vậy $v_{Px} = -3$ m/s, $v_{Py} = 5,2$ m/s, $v_{Pz} = -3,12$ m/s

– Gia tốc điểm P

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_P + \vec{\omega} \times \vec{v}_P$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0,15 & 0 & 0 \\ 10,39 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0,3 & 0,5 \\ -3 & 5,2 & -3,12 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

$$= -3,54\vec{e}_x - 1,5\vec{e}_y + 1,8\vec{e}_z$$

Vậy $a_{Px} = -3,54$ m/s^2, $a_{Py} = -1,5$ m/s^2, $a_{Pz} = 1,8$ m/s^2.

3.2. Chuyển động của cơ cấu hành tinh, vi sai nón

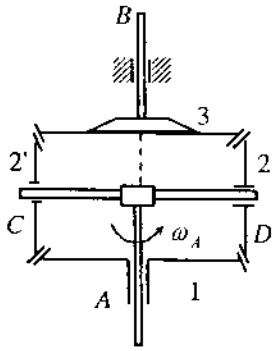
Trong các cơ cấu hành tinh, cơ cấu vi sai nón các trục quay giao nhau tại điểm O (hình 5.19). Theo chương 3, ta có công thức cộng vận tốc góc và gia tốc góc như sau

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \qquad (2.21)$$

$$\vec{\varepsilon}_a = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \qquad (2.22)$$

Áp dụng phương pháp Willis, ta chọn tay quay làm hệ quy chiếu động, khi đó công thức truyền động có dạng

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \pm\frac{r_2}{r_1} = \pm\frac{z_2}{z_1} \qquad (2.23)$$



Hình 5.19

Trong đó ω_{1r}, ω_{2r} là vận tốc tương đối của các bánh răng 1 và 2 đối với hệ quy chiếu động là tay quay, còn z_1, z_2 là số răng, r_1, r_2 là các bán kính tương ứng với các bánh răng 1 và 2. Trong công thức (2.23) dấu cộng (+) lấy khi các chuyển động quay tương đối quanh các trục z_O và z cùng ngược chiều kim đồng hồ (hoặc cùng thuận chiều kim đồng hồ), dấu trừ lấy trong trường hợp ngược lại.

Thí dụ 5.8. Hộp truyền động như hình vẽ 5.19. Bánh răng 1 lắp trơn trên trục A, cuối của trục này mang trục của cặp bánh răng 2–2. Bánh răng 3 gắn cứng với trục B. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của trục B trong các trường hợp:

a) Trục A có vận tốc ω_A, gia tốc góc ε_A còn bánh 1 đứng yên

b) Trục A và bánh 1 quay cùng chiều với $\omega_1 = 4\omega_A$, gia tốc góc $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_A$

c) Trục A có vận tốc ωA, bánh 1 quay ngược chiều với $\omega_1 = 2\omega_A$, gia tốc góc $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_A$.

Lời giải. Hệ khảo sát gồm trục ACD, các bánh răng 1, 2, 2′, bánh răng 3 gắn liền với trục B. Chọn ACD làm $\vec{e}_2^{(0)}$ hệ quy chiếu động. Các bánh răng 2 và 2' quay tương đối quanh trục CD. Trục CD quay quanh trục AB cố định. Hai trục AB và CD cắt nhau tại O. Do đó, chuyển động tuyệt đối của các bánh răng 2 và 2' là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Các bánh răng 1 và 3 chuyển động quay tuyệt đối quanh trục AB.

Áp dụng phương pháp Willis giải bài toán này. Chọn tay quay ACD làm hệ quy chiếu động, công thức truyền động giữa bánh răng 1 và bánh răng 2 là

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = +\frac{r_2}{r_1}, \ \frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_3}{r_2} \ \Rightarrow \frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_3}{r_1} \qquad (1)$$

Quy ước lấy dấu cộng khi cả hai bánh răng quay tương đối cùng thuận chiều hoặc cùng ngược chiều kim đồng hồ. Ta lấy dấu trừ khi một bánh răng quay thuận chiều kim đồng hồ, còn bánh kia quay ngược chiều kim đồng hồ. Trong bài toán này ta lấy dấu cộng.

Do $\bar{\omega}_{1r} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{1e}, \bar{\omega}_{3r} = \bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{3e}$ nên từ (1) ta có

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{1e}}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{3e}} = -\frac{r_3}{r_1} \qquad (2)$$

Trong thí dụ này $\bar{\omega}_{1e} = \bar{\omega}_{3e} = \bar{\omega}_A, \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_B, r_3 = r_1$. Vậy biểu thức (2) có dạng

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \qquad (3)$$

a) Cho biết $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_1 = 0$, từ (3) suy ra

$$\frac{-\bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \Rightarrow \bar{\omega}_B = 2\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\varepsilon}_B = 2\bar{\varepsilon}_A .$$

b) Cho biết $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_1 = 4\bar{\omega}_A$, từ (3) tính được

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = \frac{4\bar{\omega}_A - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \Rightarrow \bar{\omega}_B = -2\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\varepsilon}_B = -2\bar{\varepsilon}_A .$$

c) Cho biết $\bar{\omega}_A, \bar{\omega}_1 = -2\bar{\omega}_A$, từ (3) suy ra hệ thức

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = \frac{-2\bar{\omega}_A - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = -1 \Rightarrow \bar{\omega}_B = 4\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\varepsilon}_B = 4\bar{\varepsilon}_A .$$

Thí dụ 5.9. Cho cơ cấu vi sai nón như hình 5. 20. Trục dẫn A gắn với bánh răng 1, quay đều với vận tốc góc $\omega_A = 4$ rad/s. Trục bị dẫn B gắn với tay quay OC và quay độc lập với bánh răng 3. Bánh răng 2 lắp trơn trên tay quay OC. Bánh răng 3 ăn khớp với bánh răng 2. Tay quay OC quay đều vận tốc góc $\omega_0 = 5$ rad/s. Bán kính các bánh răng $r_1 = r_3 = 10$ cm, $r_2 = 6$ cm. Tính:

1) Vận tốc góc tuyệt đối của bánh răng 3 và bánh răng 2.

2) Gia tốc góc tuyệt đối của bánh răng 2.

Lời giải. Áp dụng phương pháp Willis giải bài toán này. Chọn tay quay OC làm hệ quy chiếu động. Ta ký hiệu

$$\bar{\omega}_{tq} = \bar{\omega}_e = 5\,rad/s,\ \bar{\omega}_{ir} = \bar{\omega}_{itq} = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{tq}\ (i = 1, 2, 3, 4). \qquad (1)$$

Sử dụng công thức ăn khớp tương đối ta có

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{3r}} = \frac{r_3}{r_2} \qquad (2)$$

Từ đó

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_2} = -1$$

Vậy

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = \frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{tq}} = -1$$

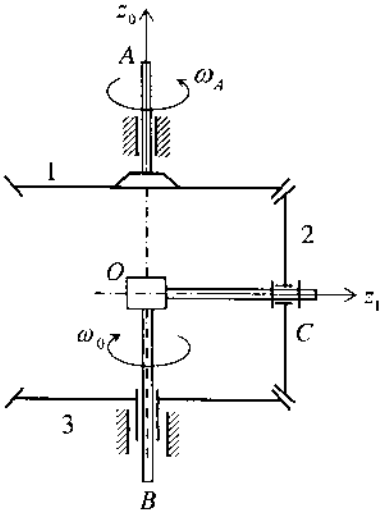
Suy ra

$$\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq} = -\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_{tq}$$

$$\bar{\omega}_3 = 2\bar{\omega}_{tq} - \bar{\omega}_1$$

$$= 2\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_A = -14 \text{ rad/s}.$$

Từ (1) tính được



Hình 5.20

$$\vec{\omega}_{2r} = -\frac{r_1}{r_2}\vec{\omega}_{1r} = -\frac{10}{6}(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_{tq}) = -15\,.$$

Sử dụng công thức cộng vận tốc góc $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_{2e} + \vec{\omega}_{2r}$, ta có

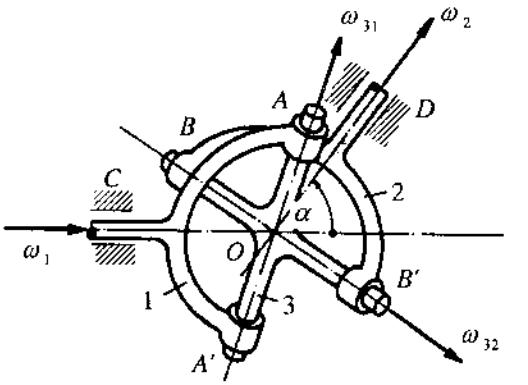
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{2e}^2 + \omega_{2r}^2} = \sqrt{5^2 + 15^2} = 5\sqrt{10}\text{rad/s}\,.$$

Do $\omega_{2r} = const, \omega_{2e} = const$, ta có công thức tính gia tốc $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{\omega}_{2e} \times \vec{\omega}_{2r}$. Do $\vec{\omega}_{2e}$ vuông góc với $\vec{\omega}_{2r}$ nên

$$\varepsilon_2 = \omega_{2e}\omega_{2r} = 75 \text{ rad/s}^2\,.$$

3.3. Chuyển động của cơ cấu Cardan (Cácđăng)

Cơ cấu Cardan (hay còn gọi là khớp Cácđăng) là cơ cấu bốn khâu không gian (hình 5.21). Trong đó khâu 1 (khâu CAA') là vật rắn quay quanh trục 1 (trục CO) cố định, khâu 2 (khâu DBB') là vật rắn quay quanh trục 2 (trục DO) cố định. Hai trục quay 1 và 2 giao nhau tại O và tạo thành một góc α. Khâu chữ thập 3 là vật rắn quay quanh một điểm O cố định. Vì vậy cơ cấu Cardan còn được gọi là cơ cấu cầu. Cơ cấu Cardan được dùng để truyền chuyển động quay giữa 2 trục giao nhau một góc α. Cơ cấu Cardan được dùng trong các xe ô tô để nối hộp tốc độ ở trước với hộp vi sai ở phía sau (cầu sau) hoặc được dùng trong các bộ phận điều khiển hướng.



Hình 5.21

Gọi $\vec{\omega}_1$ là vận tốc góc của khâu 1, $\vec{\omega}_2$ là vận tốc góc của khâu 2, $\vec{\omega}_3$ là vận tốc góc của khâu chữ thập 3 (AA'BB). Xét chuyển động của khâu chữ thập AA'BB'. Nếu chọn khâu 1 (CAA') làm hệ quy chiếu động, ta có

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{3e} + \vec{\omega}_{3r} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{31} \tag{2.24}$$

Nếu chọn khâu 2 (DBB') làm hệ quy chiếu động, thì

$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_{3e} + \vec{\omega}_{3r} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{32} \tag{2.25}$$

Từ các công thức (2.22) và (2.23) suy ra

$$\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_{32} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{31} \tag{2.26}$$

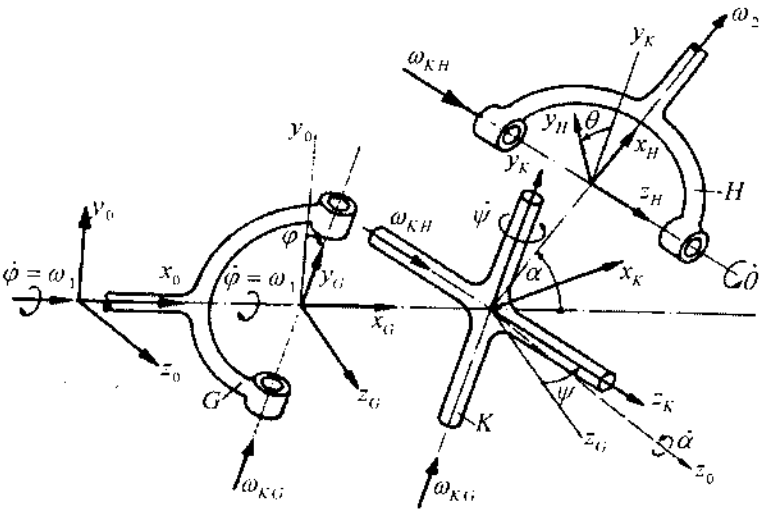
Từ đó xác định được công thức liên hệ giữa các vận tốc góc của cơ cấu Cardan

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{31} - \vec{\omega}_{32} \tag{2.27}$$

Thí dụ 5.10. Hai trục 1 và 2 cùng nằm trong một mặt phẳng và nối với nhau bằng khớp Các đăng (hình 5.22). Cho biết khâu dẫn 1 có vận tốc góc ω_1 và góc quay φ.

a) Xác định vận tốc góc $\omega_2(t)$ của khâu bị dẫn 2,

b) Xác định sự phụ thuộc giữa góc quay γ của khâu bị dẫn 2 và góc quay φ của khâu dẫn 1.



Hình 5.22

Lời giải. Ta tách cơ cấu Cardan thành ba vật rắn như hình 5.22. Chọn hệ toạ độ cố định $Ox_0y_0z_0$ là mặt phẳng chứa hai trục 1 và 2. Phương trình (2.25) bây giờ có dạng

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{KG} - \vec{\omega}_{KH} \qquad (1)$$

Từ hình (5.22) ta có

$$\boldsymbol{\omega}_1^{(0)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(G)} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{KG}^{(G)} = \boldsymbol{\omega}_{KG}^{(K)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{KG} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{KH}^{(K)} = \boldsymbol{\omega}_{KH}^{(H)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{KH} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2^{(H)} = \begin{bmatrix} \omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} \omega_2 \cos\alpha \\ \omega_2 \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Với cách chọn các hệ toạ độ như hình 5.22, các ma trận quay (ma trận côsin chỉ hướng) có dạng như sau

$$\mathbf{A}^{OG} = \mathbf{A}_{\mathbf{xo}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{GK} = \mathbf{A}_{\mathbf{yG}}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{KH} = \mathbf{A}_{\mathbf{zK}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(0)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(0)} + \boldsymbol{\omega}_{KG}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_{KH}^{(0)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(0)} + \mathbf{A}^{OG}\boldsymbol{\omega}_{KG}^{(G)} - \mathbf{A}^{OG}\mathbf{A}^{GK}\boldsymbol{\omega}_{KH}^{(K)} \qquad (2)$$

Do tích hai ma trận $\mathbf{A}^{OG}\mathbf{A}^{GK}$ có dạng

$$\mathbf{A}^{OG}\mathbf{A}^{GK} = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\psi \\ -\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi & \cos\varphi\cos\psi \end{bmatrix}$$

nên từ phương trình (2) suy ra

$$\begin{aligned} \omega_2\cos\alpha &= \omega_1 - \omega_{KH}\sin\psi \\ \omega_2\sin\alpha &= \omega_{KG}\cos\varphi + \omega_{KH}\sin\varphi\cos\psi \\ 0 &= \omega_{KG}\sin\varphi - \omega_{KH}\cos\varphi\cos\psi \end{aligned} \qquad (3)$$

Từ các phương trình (3) tìm được

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha\sin\varphi tg\psi} \qquad (4)$$

để khử số hạng $tg\psi$ trong (4) ta sử dụng hệ thức

$$\boldsymbol{\omega}_2^{(0)} = \mathbf{A}^{OH}\boldsymbol{\omega}_2^{(H)} = \mathbf{A}^{OG}\mathbf{A}^{GK}\mathbf{A}^{KH}\boldsymbol{\omega}_2^{(H)} \qquad (5)$$

Do

$$\mathbf{A}^{OG}\mathbf{A}^{GK}\mathbf{A}^{KH} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -c\psi s\theta & s\psi \\ s\varphi s\psi c\theta + c\varphi s\theta & -s\varphi s\psi s\theta + c\varphi c\theta & -s\varphi c\psi \\ -c\varphi s\psi c\theta + s\varphi s\theta & c\varphi s\psi s\theta + s\varphi c\theta & c\varphi c\psi \end{bmatrix}$$

trong đó ký hiệu $c \equiv \cos$, $s \equiv \sin$.

nên từ (5) suy ra

$$\omega_2 \cos\alpha = \omega_2 \cos\psi \cos\theta$$

$$\omega_2 \sin\alpha = \omega_2 \left(\sin\varphi \sin\psi \cos\theta + \cos\varphi \sin\theta\right) \qquad (6)$$

$$0 = \omega_2 \left(-\cos\varphi \sin\psi \cos\theta + \sin\varphi \sin\theta\right)$$

Từ phương trình thứ nhất của (6) rút ra $\cos\theta = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\psi}$, sau đó thay vào phương trình thứ ba của (6) tính được:

$$\sin\theta = \frac{\cos\alpha \cos\varphi \sin\psi}{\sin\varphi \cos\psi}$$

Thay sinθ và cosθ vừa tìm được vào phương trình thứ 2 của (6) ta có

$$tg\psi = tg\alpha \sin\varphi \qquad (7)$$

Thay (7) vào (4) xác định được công thức xác định ω_2

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha tg\alpha \sin^2\varphi} \qquad (8)$$

Biến đổi công thức (2.24) về dạng khác ta được

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 - \sin^2\alpha \cos^2\varphi}{\cos\alpha} \qquad (9)$$

Do $\omega_2 = \dot{\gamma}$ và $\omega_1 = \dot{\varphi}$, từ phương trình (8) suy ra phương trình vi phân. Từ (1), (2) và công thức (8) thí dụ trên xác định được quan hệ

$$\omega_3 = \frac{\omega_1}{\left(\cos\alpha + \sin\alpha tg\alpha \sin^2\varphi\right)\left\{\cos\beta + \sin\beta tg\beta \cos^2\left[arctg\left(\dfrac{tg\varphi}{\cos\alpha} + \varepsilon\right)\right]\right\}} \qquad (3)$$

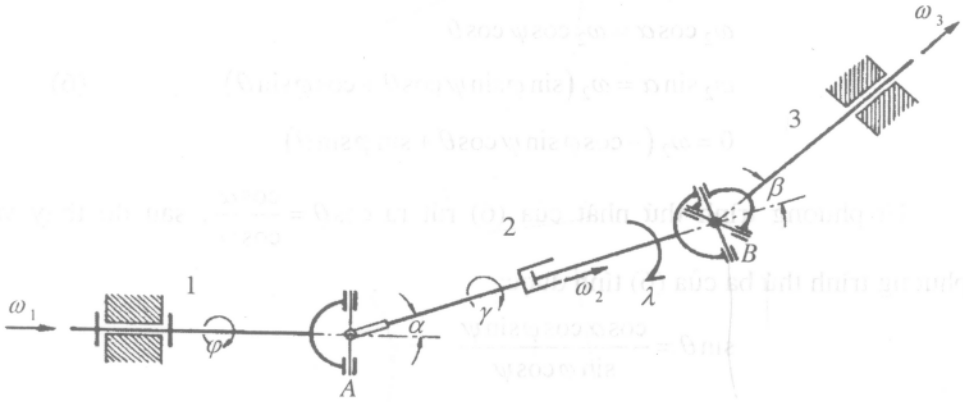
Khi $\varepsilon = 0$ và $\alpha = \pm\beta$ mẫu số của (3) bằng 1. Điều kiện này các kỹ sư cần phải chú ý khi ta muốn có vật tốc góc của khâu bị dẫn là hằng số và bằng ω_1 (trong ôtô và trong máy công cụ hãy quan tâm đến điều kiện này). Hình (5.19) biểu diễn đồ thị

$$d\gamma = \frac{d\varphi}{\cos\alpha + \sin\alpha tg\alpha \sin^2\varphi} \qquad (10)$$

tích phân phương trình (8) ta được

$$\gamma = arctg\left(\frac{tg\varphi}{\cos\alpha}\right) \qquad (11)$$

Thí dụ 5.11. Xét chuyển động của cơ cấu Các đăng kép như hình (5.23). Tìm quan hệ giữa vận tốc góc khâu bị dẫn ω_3 và vận tốc góc khâu dẫn ω_1.



Hình 5.23

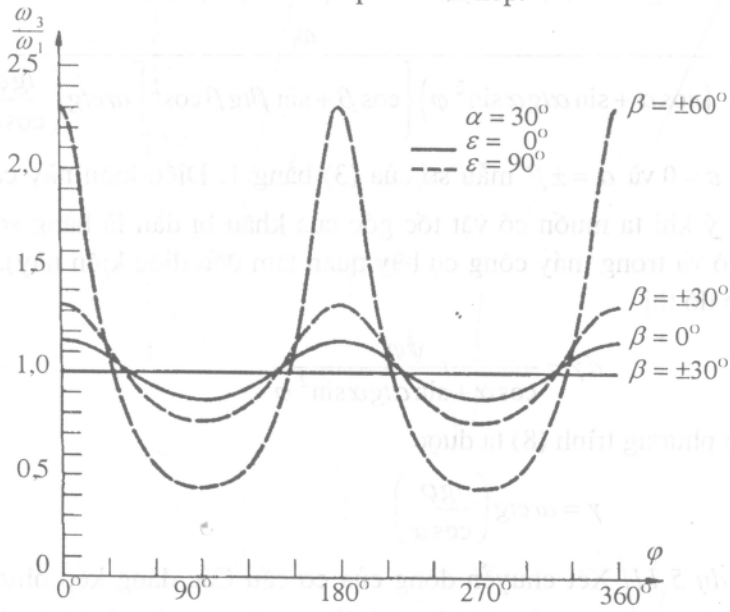
Lời giải. Vận tốc góc của khâu bị dẫn theo công thức (8) thí dụ trên có dạng

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{1}{\cos\beta + \sin\beta tg\beta \sin^2\lambda} \qquad (1)$$

Trong đó λ là góc quay của phần trục 2b. Giả sử góc quay của phần trục 2a và góc quay của phần trục 2b khác nhau một hằng số

$$\lambda = \gamma + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \qquad (2)$$

ω_3/ω_1 phụ thuộc vào góc quay φ của khâu dẫn và vào các tham số của khớp Cardan kép. Trên hình (5.24) là đồ thị ω_3/ω_1 phụ thuộc vào góc quay φ của khâu dẫn và vào các tham số của khớp Cardan kép.



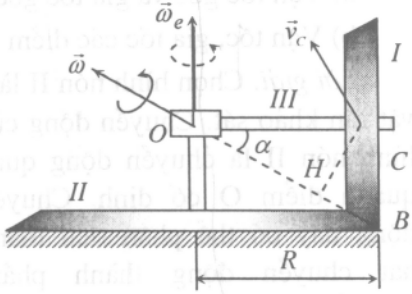
Hình 5.24

3.4. Chuyển động quay tổng quát của vật rắn quanh một điểm cố định

Thí dụ 5.12. Bánh răng hình nón I bán kính r chuyển động lăn không trượt trên bánh răng cố định II bán kính R nhờ tay quay III quay quanh trục thẳng đứng ngược chiều kim đồng hồ theo quy luật φ(t). Xác định vận tốc góc và gia tốc góc của bánh răng I. Cho biết góc giữa OC và OB là α.

Lời giải. Ta chọn bánh răng nón I là vật rắn khảo sát. Trong quá trình chuyển động luôn có O cố định. Vậy bánh răng I chuyển động quay quanh điểm O cố định.

Do bánh răng I lăn không trượt trên bánh răng cố định II nên $v_B = 0$. Do đó OB là trục quay tức thời Δ của bánh răng I.



Hình 5.25

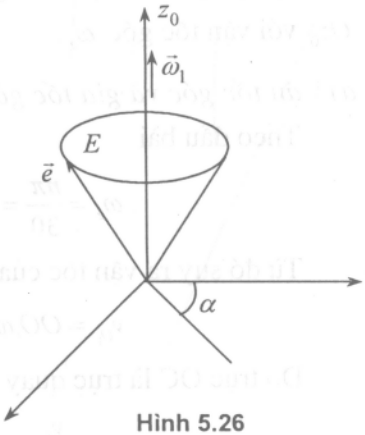
a) Xác định vận tốc góc của bánh răng I. Điểm C là một điểm trên tay quay OC, vậy $v_C = OC\omega_e = R\dot{\varphi}$. Do bánh răng I quay tức thời quanh OB, nên

$$v_C = \omega CH = \omega R\sin\alpha = R\dot{\varphi}.$$

Vậy $$\omega = \frac{\dot{\varphi}}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

b) Xác định gia tốc góc của bánh răng I. Ký hiệu $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị trên trục BO, ta có $\vec{\omega} = \omega\vec{e}$. Do $\vec{\omega}$ biến đổi cả về trị số và hướng, áp dụng công thức định nghĩa gia tốc góc ta có

$$\vec{\varepsilon} = \frac{{}^{R_0}d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\omega}\vec{e} + \omega\frac{{}^{R_0}d\vec{e}}{dt} \qquad (2)$$



Hình 5.26

Từ (1)

$$\dot{\omega} = \frac{\ddot{\varphi}}{\sin\alpha} \quad (\text{do } \alpha = \text{const}).$$

Do $\vec{e}$ là véc tơ đơn vị, nên $\frac{{}^{R_0}d\vec{e}}{dt}$ là một véc tơ vuông góc với $\vec{e}$. Ta có

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{e}}{dt} = \vec{v}_E = \vec{\omega}_e \times \vec{e}$$

Do đó $$v_E = \omega_e\cos\alpha = \dot{\varphi}\cos\alpha$$

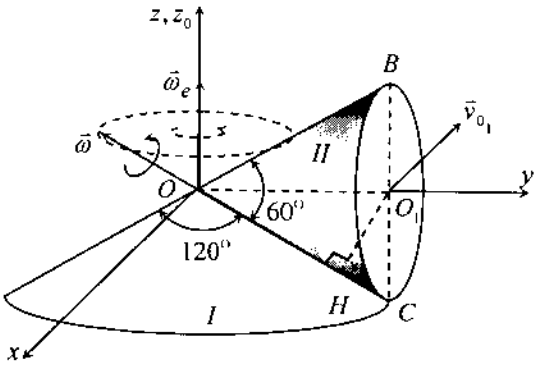
$$\varepsilon = \sqrt{\dot{\omega}^2 + (\omega\dot{\varphi}\cos\alpha)^2} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4\cos^2\alpha}\,.$$

Thí dụ 5.13. Hình nón II chuyển động lăn không trượt trên hình nón cố định I (hình 5.27). Cho biết chiều cao hình nón II là OO_1 = 10 cm, trong một phút hình nón II lăn được 120 vòng. Hãy xác định:

a) Vận tốc góc và gia tốc góc của hình nón II,

b) Vận tốc, gia tốc các điểm B và C trên hình nón II.

Lời giải. Chọn hình nón II làm vật rắn khảo sát. Chuyển động của hình nón II là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Chuyển động này có thể phân tích thành hai chuyển động thành phần: Chuyển động quay tương đối của hình nón II quanh trục OO_1 với vận tốc góc ω_r, chuyển động của trục OO_1 quay quanh trục thẳng đứng Oz_0 với vận tốc góc ω_e.



Hình 5.27

a) Vận tốc góc và gia tốc góc của hình nón II

Theo đầu bài

$$\omega_e = \frac{n\pi}{30} = \frac{120\pi}{30} = 4\pi \text{ rad/s}$$

Từ đó suy ra vận tốc của điểm O_1

$$v_{O_1} = OO_1\omega_e = 40\pi \text{ cm/s}$$

Do trục OC là trục quay tức thời của hình nón II, ta có

$$\omega = \frac{v_{O_1}}{O_1H} = \frac{40\pi}{OO_1\sin 30^0} = \frac{40\pi}{5} = 8\pi \text{ rad/s}$$

Hướng của véc tơ $\vec{\omega}$ dọc theo trục CO như hình vẽ 5.27. Ta chọn hệ quy chiếu động Oxyz có trục Oz ≡ Oz_0 (trục cố định), trục Oy trùng với trục OO_1, trục Ox được chọn sao cho Oxyz là hệ quy chiếu thuận. Các véc tơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz là $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Từ hình vẽ suy ra

$$\vec{\omega}_e = \omega_e\vec{e}_z, \quad \omega_e = 4\pi \text{ rad/s} \qquad (1)$$

$$\vec{\omega} = -\omega\cos 30\vec{e}_y + \omega\sin 30\vec{e}_z = -4\sqrt{3}\pi\vec{e}_y + 4\pi\vec{e}_z \text{ rad/s} \qquad (2)$$

Do véc tơ $\vec{\omega}$ có trị số không đổi, quay quanh trục thẳng đứng Oz_0 với vận tốc góc $\vec{\omega}_e$, ta có

$$\vec{\varepsilon} = \frac{{}^{R_0}d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_e \\ 0 & \frac{-\omega\sqrt{3}}{2} & \frac{\omega}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_e\omega\vec{e}_x$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\pi \times 8\pi\vec{e}_x = 16\sqrt{3}\pi^2\vec{e}_x \text{ cm/s}^2 \qquad (3)$$

b) Vận tốc, gia tốc các điểm B và C

Vận tốc điểm B được xác định bởi công thức

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}$$

Từ hình vẽ ta có

$$\overrightarrow{OB} = OO_1\vec{e}_y + OO_1 tg30^0\vec{e}_z = 10\vec{e}_y + \frac{10\sqrt{3}}{3}\vec{e}_z.$$

Do đó

$$\vec{v}_B = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -4\sqrt{3}\pi & 4\pi \\ 0 & 10 & \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = -80\pi\vec{e}_x \ cm/s \qquad (4)$$

Do C nằm trên trục quay tức thời CO nên $v_C = 0$. Gia tốc của điểm B được xác định bởi công thức sau

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_B$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 16\sqrt{3}\pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10\frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & -4\sqrt{3}\pi & 4\pi \\ -80\pi & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 160\pi^2\vec{e}_y + 480\sqrt{3}\pi^2\vec{e}_z \text{ cm/s}^2 \qquad (5)$$

Do $\vec{v}_0 = 0$, gia tốc của điểm C có dạng

$$\vec{a}_C = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OC} + \vec{\omega} \times \vec{v}_C = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OC}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 16\sqrt{3}\pi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -10\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = 160\pi^2\vec{e}_y + 160\sqrt{3}\pi^2\vec{e}_z \text{ cm/s}^2$$

Từ (5) và (6) ta có

$$a_B = 160\pi^2\sqrt{1+27} = 320\sqrt{7}\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

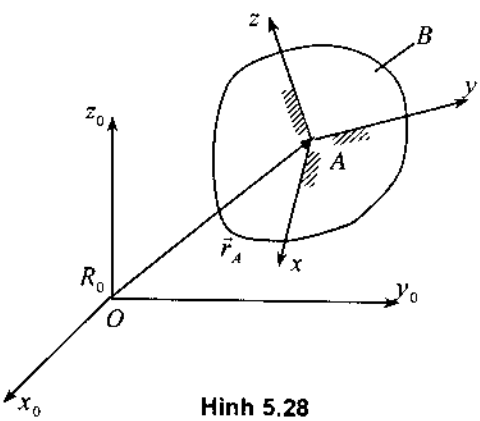
$$a_C = 160\pi^2\sqrt{1+3} = 320\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

4. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG KHÔNG GIAN TỔNG QUÁT

Bài toán xác định chuyển động tổng quát của vật rắn trong không gian ba chiều là bài toán tương đối phức tạp. Với sự phát triển của kỹ thuật rôbốt, kỹ thuật hàng không vũ trụ, v. v... bài toán này cần phải được trình bày tương đối kỹ trong giáo trình cơ học kỹ thuật.

4.1. Xác định vị trí của vật rắn trong không gian ba chiều

Khảo sát chuyển động của vật rắn B trong hệ quy chiếu $R_0 = \{Ox_0y_0z_0\}$ cố định. Lấy A là một điểm bất kỳ của vật rắn B. Như đã biết chuyển động của vật rắn B trong hệ quy chiếu R_0 được phân tích thành 2 chuyển động thành phần: Chuyển động của điểm A đối với hệ quy chiếu R_0 và chuyển động của vật rắn B quay quanh điểm A (hình 5.28). Vị trí của điểm A được xác định bởi phương trình



Hình 5.28

$$\vec{r}_A = x_A^{(0)}\vec{e}_x^{(0)} + y_A^{(0)}\vec{e}_y^{(0)} + z_A^{(0)}\vec{e}_z^{(0)} \tag{4.1}$$

Trong đó $\vec{e}_x^{(0)}, \vec{e}_y^{(0)}, \vec{e}_z^{(0)}$ là các véc tơ đơn vị trên trục Ox_0, Oy_0 và Oz_0.

Để xác định vị trí của vật rắn B quay quanh điểm A ta có thể sử dụng các tọa độ suy rộng trình bày trong phần vật rắn quay quanh một điểm cố định, hoặc sử dụng ma trận cô sin chỉ hướng. Nếu sử dụng ma trận cô sin chỉ hướng ta gắn chặt hệ quy chiếu động R = {Axyz} vào vật rắn B và ký hiệu các véc tơ

đơn vị trên hệ quy chiếu này là $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Khi đó ma trận cô sin chỉ hướng có dạng

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{e}_x^{(0)}.\vec{e}_x & \vec{e}_x^{(0)}.\vec{e}_y & \vec{e}_x^{(0)}.\vec{e}_z \\ \vec{e}_y^{(0)}.\vec{e}_x & \vec{e}_y^{(0)}.\vec{e}_y & \vec{e}_y^{(0)}.\vec{e}_z \\ \vec{e}_z^{(0)}.\vec{e}_x & \vec{e}_z^{(0)}.\vec{e}_y & \vec{e}_z^{(0)}.\vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

4.2. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn

Khái niệm vận tốc góc, gia tốc góc của vật rắn đã được định nghĩa trong chương 2. Để xác định vận tốc góc của vật rắn, người ta thường sử dụng ba phương pháp chính sau đây:

– Phương pháp 1: Áp dụng định lý cộng vận tốc góc của vật rắn. Định lý này đã được trình bày trong chương 3.

– Phương pháp 2: Áp dụng định lý dựa theo đạo hàm của các véc tơ đơn vị của hệ quy chiếu động. Công thức (1.4) trong chương 2.

– Phương pháp 3: Áp dụng định lý dựa theo đạo hàm của ma trận cô sin chỉ hướng.

Hai phương pháp đầu đã được trình bày trong các chương trước. Ở đây ta sẽ trình bày phương pháp thứ 3

a) Định lý Poisson. Toán tử sóng của véc tơ vận tốc góc của vật rắn $\vec{\omega}$ được xác định qua ma trận cô sin chỉ hướng của vật rắn bằng công thức sau

$$\tilde{\omega}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T \tag{4.3}$$

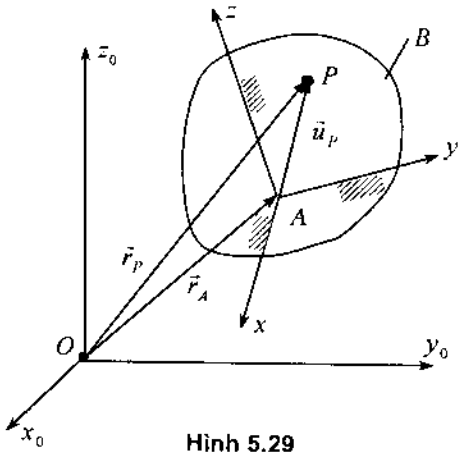
Trong đó $\dot{\mathbf{A}}$ là đạo hàm theo thời gian của ma trận côsin chỉ hướng ở trong hệ quy chiếu cố định R_0, còn $\tilde{\omega}^{(0)}$ là toán tử sóng của véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}$. Toán tử sóng $\tilde{\omega}^{(0)}$ có dạng như sau

$$\tilde{\omega}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^{(0)} & \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} & 0 & -\omega_x^{(0)} \\ -\omega_y^{(0)} & \omega_x^{(0)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Lấy P là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn B. Từ hình vẽ 5.29 ta có

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{u}_P \qquad (1)$$

Đạo hàm phương trình (1) trong hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$ ta được



Hình 5.29

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{u}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_P \qquad (2)$$

Nếu sử dụng ký hiệu ma trận phương trình (2) có dạng

$$\mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)}\mathbf{u}_P^{(0)} \qquad (3)$$

còn phương trình (1) có dạng

$$\mathbf{r}_P^{(0)} = \mathbf{r}_A^{(0)} + \mathbf{u}_P^{(0)} \qquad (4)$$

Theo công thức (1.14) chương này ta có $\mathbf{u}_P^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{u}_P$. Trong đó $\mathbf{u}_P^{(0)}$ là ma trận cột gồm các hình chiếu của $\vec{u}_P$ trong hệ $Ox_Oy_Oz_O$, còn u_P là ma trận cột gồm các hình chiếu của $\vec{u}_P$ trong hệ Axyz. Thế vào (4) ta được

$$\mathbf{r}_P^{(0)} = \mathbf{r}_A^{(0)} + \mathbf{A}\mathbf{u}_P \qquad (5)$$

Đạo hàm phương trình (5) theo thời gian t suy ra

$$\mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{u}_P \qquad (6)$$

Do ma trận côsin chỉ hướng **A** là ma trận trực giao nên từ hệ thức $\mathbf{s}_P^0 = \mathbf{A}.\mathbf{s}_P$ ta có

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}_P^{(0)} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}_P^{(0)} \qquad (7)$$

Thế (7) vào (6) tính được

$$\mathbf{v}_P^{(0)} = \mathbf{v}_A^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{u}_P^{(0)} \qquad (8)$$

So sánh các công thức (3) và (8) suy ra công thức

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T.$$

b) Gia tốc góc. Khi biết vận tốc góc của vật rắn, ta dễ dàng tính được gia tốc góc của nó

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (4.4)$$

4.3. Xác định vận tốc, gia tốc các điểm của vật rắn

Bài toán xác định vận tốc, gia tốc các điểm của vật rắn là bài toán tương đối phức tạp. Vì vậy có nhiều phương pháp tính. Ở đây giới hạn chỉ trình bày phương pháp cộng các véc tơ. Theo chương hai ta có các công thức

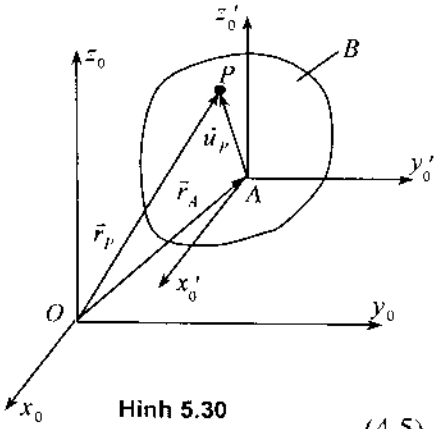
$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} \qquad (4.5)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{PA} \qquad (4.6)$$

Việc xác định $\vec{v}_{PA}$, $\vec{a}_{PA}$ phụ thuộc vào việc chọn hệ quy chiếu động.

a) Chọn hệ quy chiếu động là hệ tọa độ chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu cố định

Chọn hệ tọa độ động $R = \{Ax_0'y_0'z_0'\}$ chuyển động tính tiến đối với hệ cố định R_0, trong đó $Ax_0' // Ox_0$, $Ay_0' // Oy_0$, $Az_0' // Oz_0$. Gọi $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của vật rắn B trong hệ quy chiếu cố định R_0: $\vec{\omega} = {}^{R_0}\vec{\omega}^B$. Ta có các công thức sau:



Hình 5.30

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{u}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_P^r \tag{4.5}$$

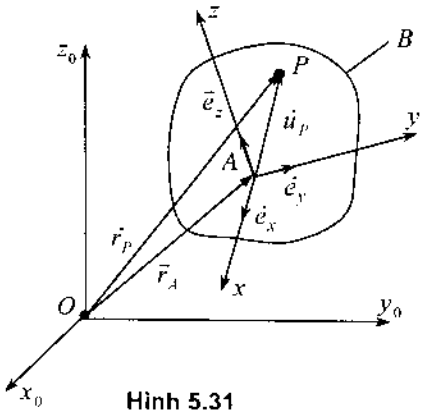
$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{PA} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}_P) = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{u}_P + \vec{\omega} \times \vec{v}_P^r \tag{4.6}$$

Trong đó ký hiệu

$$\vec{u}_P = \overrightarrow{AP},\ \vec{v}_P^r = \vec{\omega} \times \vec{u}_P,\ \vec{\varepsilon} = {}^{R_0}\vec{\varepsilon}^B = \frac{{}^{R_0}d\vec{\omega}}{dt}.$$

b) Chọn hệ quy chiếu động là hệ tọa độ chuyển động tùy ý đối với hệ quy chiếu cố định

Chọn hệ quy chiếu động Axyz có gốc tại điểm A, không gắn chặt vào vật rắn B và không nhất thiết phải chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu cố định R_0 (hình 5.31). Ký hiệu $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ là các véc tơ đơn vị trên các trục Ax, Ay, Az, $\vec{\omega}_e$ là vận tốc góc của hệ quy chiếu động $R = \{Axyz\}$ đối với hệ cố định $R_0 = \{Ox_0y_0z_0\}$, $\vec{\omega}_r$ là vận tốc góc của vật rắn đối với hệ quy chiếu động R, còn $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}$ là vận tốc góc của vật rắn đối với hệ cố định R_0. Trong mô hình này chuyển động theo không phải là chuyển động tịnh tiến. Theo chương hai ta có



Hình 5.31

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_x}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_x,\quad \frac{{}^{R_0}d\vec{e}_y}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_y,$$

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{e}_z}{dt} = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_z$$

Khi đó xác định được có các công thức tính vận tốc, gia tốc điểm P có dạng như sau

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A + \vec{v}^e_{PA} + \vec{v}^r_{PA} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{u}_P + \vec{v}^r_{PA} \tag{4.7}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{PA} = \vec{a}_A + \vec{a}^e_{PA} + \vec{a}^r_{PA} + \vec{a}^c_{PA}$$

$$= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{u}_P + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{u}_P) + \vec{a}^r_{PA} + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}^r_P \tag{4.8}$$

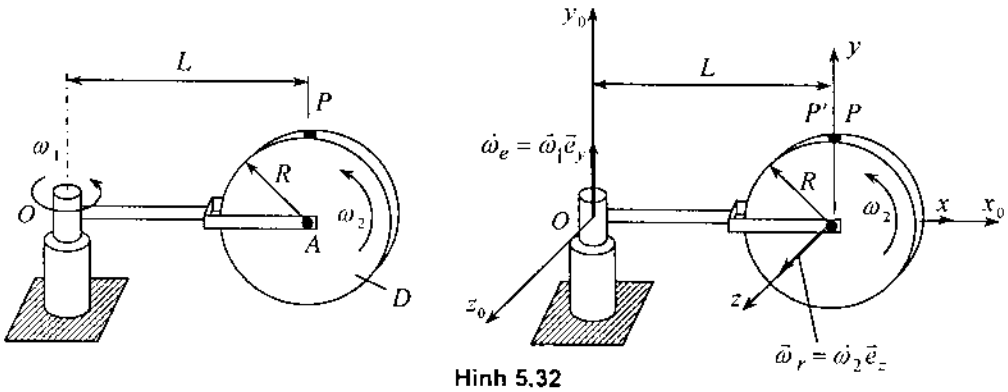
Chú ý. Trong một số sách giáo khoa Cơ học kỹ thuật của Mỹ người ta thường ký hiệu $\vec{\omega}_e = \vec{\Omega}$.

4.4. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.14. Đĩa D bán kính R có thể quay quanh đầu A của tay quay OA nón ngang. Tay quay OA dài L quay đều quanh trục thẳng đứng đi qua O với vận tốc góc không đổi ω_1, đĩa quay quanh Q với vận tốc góc không đổi ω_2. Hãy xác định:

a) Vận tốc và và gia tốc điểm P ở trên đỉnh của đĩa,

b) Vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa.



Hình 5.32

Lời giải. Chọn Axyz là hệ quy chiếu động, $Ox_0y_0z_0$ là hệ quy chiếu cố định. Chuyển động quay tương đối quanh trục Az, chuyển động theo là chuyển động của tay quay OA quanh trục cố định Oy_0 (hình 5.32). Áp dụng định lý cộng vận tốc và định lý cộng gia tốc để xác định vận tốc và gia tốc điểm P. Trong bài này $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_r = \vec{\omega}_2$.

a) Vận tốc điểm và gia tốc điểm P

$$\vec{v}_a(P) = \vec{v}_e(P) + \vec{v}_r(P) \tag{1}$$

Trong đó

$$\vec{v}_r(P) = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{AP} = \omega_2\vec{e}_z \times R\vec{e}_y = -\omega_2 R\vec{e}_x \tag{2}$$

$$\vec{v}_e(P) = \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega}_1 \times (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) = \omega_1\vec{e}_y \times (L\vec{e}_x + R\vec{e}_y) = -\omega_1 L\vec{e}_z \tag{3}$$

Thế (2), (3) vào (1) ta được

$$\vec{v}_a(P) = -\omega_2 R\vec{e}_x - \omega_1 L\vec{e}_z \tag{4}$$

Gia tốc điểm P

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_e(P) + \vec{a}_r(P) + \vec{a}_c(P) \tag{5}$$

Do $\varepsilon_e = 0$, $\varepsilon_r = 0$ nên ta có

$$\vec{a}_e(P) = \vec{\omega}_e \times \vec{v}_e(P) = \omega_1\vec{e}_y \times (-\omega_1 L\vec{e}_z) = -\omega_1^2 L\vec{e}_x \tag{6}$$

$$\vec{a}_r(P) = \vec{\omega}_r \times \vec{v}_r(P) = \omega_2\vec{e}_z \times (-\omega_2 R\vec{e}_x) = -\omega_2^2 R\vec{e}_y \tag{7}$$

$$\vec{a}_c(P) = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 2\omega_1\vec{e}_y \times (-\omega_2 R\vec{e}_x) = 2\omega_1\omega_2 R\vec{e}_z \tag{8}$$

Vậy $\vec{a}_a(P) = -\omega_1^2 L\vec{e}_x - \omega_2^2 R\vec{e}_y + 2\omega_1\omega_2 R\vec{e}_z$ (9)

b) Vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa

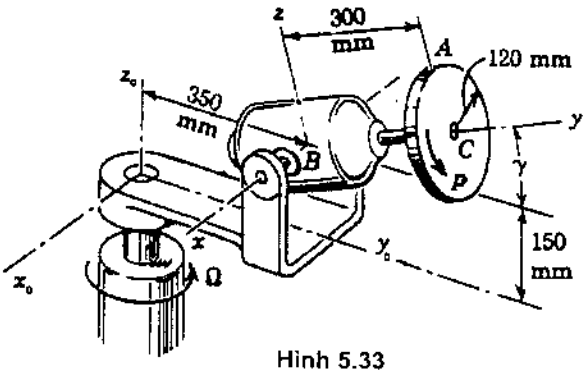
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \omega_1\vec{e}_y + \omega_2\vec{e}_z \tag{10}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_e + \vec{\varepsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r \tag{11}$$

Do $\varepsilon_e = \varepsilon_r = 0$, nên từ (11) suy ra

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \omega_1\vec{e}_y \times \omega_2\vec{e}_z = \omega_1\omega_2\vec{e}_x \tag{12}$$

Thí dụ 5.15. Giá đỡ mô tơ quay quanh trục Oz_0 với vận tốc góc không đổi $\Omega = 3$ rad/s. Mô tơ gắn liền với đĩa quay với vận tốc góc không đổi p = 3 rad/s quay quanh trục By của giá đỡ như hình vẽ. Cho biết góc $\gamma = 30^0$. Các kích thước cho trên hình vẽ. Hãy tìm:



Hình 5.33

a) Vận tốc và gia tốc điểm A trên đỉnh của đĩa,

b) Gia tốc góc của đĩa

Lời giải. Chọn hệ trục Bxyz gắn liền với giá đỡ mô tơ, hệ quy chiếu $Ox_0y_0z_0$ là hệ cố định. Ký hiệu các véc tơ đơn vị trên trục $Ox_0y_0z_0$ là $\vec{e}_x^{(0)}$, $\vec{e}_y^{(0)}$, $\vec{e}_z^{(0)}$ các véc tơ đơn vị trên hệ trục động Bxyz là $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$. Từ hình vẽ ta có $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z^{(0)} = 3\vec{e}_z^{(0)}$ rad/s.

a) Vận tốc điểm A

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB} = \vec{v}_B + \vec{v}^e_{AB} + \vec{v}^r_{AB}$$

Trong đó:

$$\vec{v}_B = \vec{\Omega} \times \vec{r} = 3\vec{e}_z^{(0)} \times 0,350\ \vec{e}_y^{(0)} = -1,05\ \vec{e}_x^{(0)} = -1,05\ \vec{e}_x \text{ m/s}$$

$$\vec{v}^e_{AB} = \vec{\Omega} \times (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 3\vec{e}_z^{(0)} \times (0,300\vec{e}_y + 0,120\vec{e}_z)$$

$$= (-0,9\cos 30^0)\vec{e}_x + (0,36\sin 30^0)\vec{e}_x = -0,599\vec{e}_x \text{ m/s.}$$

$$\vec{v}^r_{AB} = \vec{p} \times (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 8\vec{e}_y \times (0,300\vec{e}_y + 0,120\vec{e}_z) = 0,960\vec{e}_x\ m/s.$$

Do đó $\vec{v}_A = -1,05\ \vec{e}_x = -1,05\ \vec{e}_x - 0,599\ \vec{e}_x + 0,960\ \vec{e}_x = -0,689\vec{e}_x\ m/s$.

b) Gia tốc điểm A

Sử dụng công thức

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB} = \vec{a}_B + \vec{a}^e_{AB} + \vec{a}^r_{AB} + \vec{a}^c_{AB}\ .$$

Lần lượt tính toán

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{v}_B = 3\dot{\vec{e}}_z^{(0)} \times (-1,05\ \vec{e}_x) = 3\dot{\vec{e}}_z^{(0)} \times (-1,05\ \vec{e}_x^{(0)})$$

$$= -3,15\ \vec{e}_y^{(0)} = 3,15\ (-\vec{e}_y \cos 30^0 + \vec{e}_z \sin 30^0) = -2,73\vec{e}_y + 1,55\vec{e}_z \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}^e_{AB} = \vec{\Omega} \times \vec{v}^e_{AB} = 3\vec{e}_z^{(0)} \times (-0,599\ \vec{e}_x) = -3\vec{e}_z^{(0)} \times (0,599\ \vec{e}_x^{(0)})$$

$$= 1,797\ \vec{e}_y^{(0)} = 1,797\ (-\vec{e}_y \cos 30^0 + \vec{e}_z \sin 30^0)$$

$$= -1,557\vec{e}_y + 0,899\vec{e}_z \text{ m/s}^2.$$

$$\vec{a}^c_{AB} = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}^r_{AB} = 2(3\vec{e}_z^{(0)}) \times (0,960\ \vec{e}_x) = 5,76\vec{e}_y^{(0)}$$

$$= 5,76\ (\vec{e}_y \cos 30^0 - \vec{e}_z \sin 30^0) = 4,99\vec{e}_y - 2,88\vec{e}_z\ \ m/s^2.$$

$$\vec{a}^r_{AB} = \vec{p} \times \vec{v}^r_{BA} = 8\vec{e}_y \times 0,960\ \vec{e}_x = -7,68\vec{e}_z\ \ m/s^2.$$

Từ đó suy ra

$$\vec{a}_A = -2,73\vec{e}_y + 1,55\vec{e}_z - 1,557\vec{e}_y + 0,899\vec{e}_z + 4,99\vec{e}_y - 2,88\vec{e}_z - 7,68\vec{e}_z$$

$$= 0,703\vec{e}_y - 8,086\vec{e}_z\ \ m/s^2.$$

c) Gia tốc góc

Do $\omega_e = const,\ \omega_r = const$ nên $\varepsilon_e = 0,\ \varepsilon_r = 0$. Từ đó tính được

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}_e \times \vec{\omega}_r = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{p} = 3\dot{\vec{e}}_z^{(0)} \times 8\vec{e}_y$$

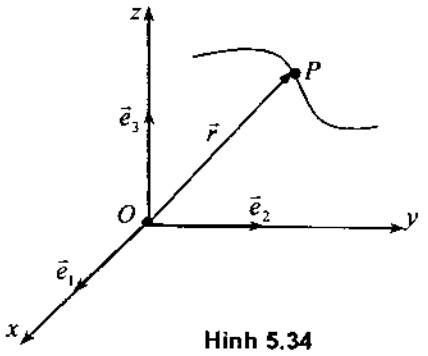
$$= 3(\vec{e}_z \cos 30^0 + \vec{e}_y \sin 30^0) \times 8\vec{e}_y = -24\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x = -20,8\vec{e}_x \text{ rad/s.}$$

5. ĐỘNG HỌC RÔBỐT CÔNG NGHIỆP

Về phương diện Cơ học, rô bốt công nghiệp là hệ nhiều vật rắn ghép nối với nhau bằng các khớp, chủ yếu là các khớp quay và khớp tịnh tiến. Có nhiều phương pháp tính toán động học rôbốt công nghiệp. Dưới đây ta giới hạn chỉ trình bày phương pháp ma trận Denavit–Hartenberg tính toán động học rôbốt.

5.1. Các tọa độ thuần nhất và các ma trận biến đổi tọa độ thuần nhất

Ý tưởng cơ bản của việc đưa vào các toạ độ thuần nhất và các phép biến đổi toạ độ thuần nhất là nhằm mục tiêu kết hợp hai phép biến đổi tịnh tiến và phép biến đổi quay thành một phép biến đổi các ma trận cấp 4.



Hình 5.34

a) Các tọa độ vật lý và các tọa độ thuần nhất

Vị trí của điểm P ở trong hệ tọa độ ba chiều Oxyz được xác định bởi véc tơ sau

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \qquad (5.1)$$

Giả sử σ là một đại lượng vô hướng khác không tùy ý. Khi đó tọa độ thuần nhất của điểm P được định nghĩa bởi hệ thức

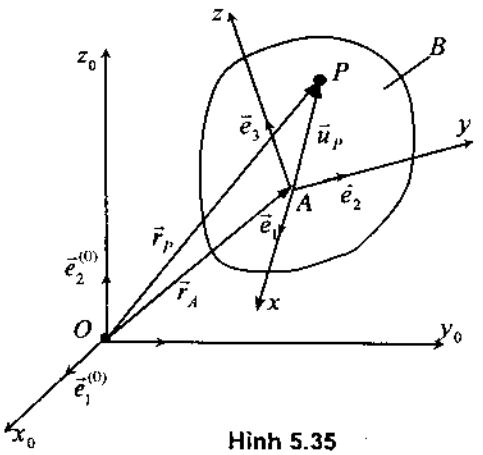
$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \sigma x & \sigma y & \sigma z & \sigma \end{bmatrix}^T \qquad (5.2)$$

Trong kỹ thuật, người ta thường chọn σ = 1. Khi đó tọa độ thuần nhất bốn chiều của điểm P được mở rộng từ các tọa độ vật lý ba chiều của điểm P bằng cách thêm vào thành phần thứ tư như sau

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T \qquad (5.3)$$

Nhờ khái niệm tọa độ thuần nhất trong không gian bốn chiều ta có thể chuyển bài toán cộng ma trận cột trong không gian ba chiều sang bài toán nhân ma trận trong không gian bốn chiều. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc tơ trong không gian ba chiều, ta có

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} \qquad (5.4)$$



Hình 5.35

Từ phép tính cộng (4.4) chuyển sang phép tính nhân hai ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

b) Ma trận biến đổi tọa độ thuần nhất

Xét vật rắn B chuyển động trong hệ quy chiếu cố định $Ox_0y_0z_0$. Lấy một điểm A nào đó của vật rắn B và gắn chặt vào vật rắn hệ quy chiếu Axyz (hình 5.36). Lấy P là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn B. Trong hệ tọa độ vật lý $Ox_0y_0z_0$ ta có

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{u}_P \tag{5.6}$$

Phương trình (5.6) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A^{(0)} \\ y_A^{(0)} \\ z_A^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Trong đó **A** là ma trận côsin chỉ hướng của vật rắn B, x_P, y_P, z_P là tọa độ của điểm P trong hệ quy chiếu Axyz. Nếu sử dụng các tọa độ thuần nhất phương trình (5.7) có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{bmatrix} x_P^{(0)} \\ y_P^{(0)} \\ z_P^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_A^{(0)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_A^{(0)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_A^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Định nghĩa. Ma trận

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_A^{(0)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_A^{(0)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_A^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{r}_A^{(0)} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

được gọi là ma trận chuyển tọa độ thuần nhất của điểm P từ hệ Axyz sang hệ $Ox_0y_0z_0$ (hay gọi tắt là ma trận biến đổi tọa độ thuần nhất). Như thế ma trận **T** cho biết vị trí của vật rắn B trong hệ tọa độ $Ox_0y_0z_0$.

c) Các ma trận quay cơ bản thuần nhất và ma trận tịnh tiến thuần nhất

Các ma trận quay cơ bản (1.7), (1.8) và (1.9) trong mục ma trận côsin chỉ hướng mở rộng ra trong hệ tọa độ thuần nhất bốn chiều có dạng như sau

$$\mathbf{T}_{Rx}(\varphi) = Rot(x,\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$\mathbf{T}_{Ry}(\psi) = Rot(y,\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$\mathbf{T}_{Rz}(\theta) = Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Ngoài ra ta đưa vào khái niệm ma trận tịnh tiến thuần nhất có dạng

$$\mathbf{T}_{Tx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{Ty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_{Tz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

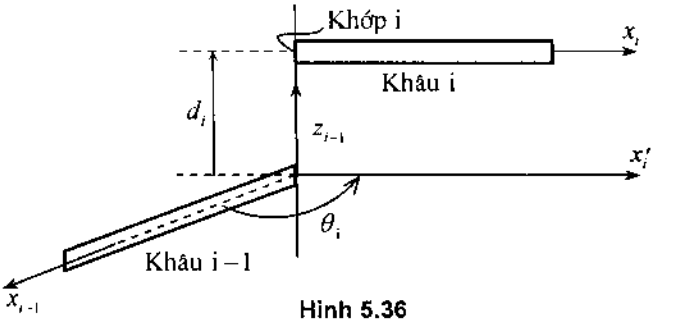
Trong đó ta thực hiện chuyển động tịnh tiến theo trục tọa độ x một đoạn là a, theo trục tọa độ y một đoạn là b, theo trục tọa độ z một đoạn là c.

5.2. Các tham số động học Denavit–Hartenberg và ma trận Denavit–Hartenberg

a) Các tham số động học Denavit–Hartenberg

Trong đoạn này ta chỉ xét hệ các vật rắn nối ghép với nhau bằng các khớp quay và các khớp tịnh tiến. Khi đó quan hệ vị trí giữa hai khâu kế tiếp nhau có thể được xác định bởi hai tham số khớp (hình 5.36).

Trên hình 5.36 khâu thứ i–1 nối với khâu thứ i bằng khớp i. Trục z_{i-1} được chọn là trục khớp của khớp thứ i. Tham số thứ nhất θ_i, được gọi là góc khớp, là góc quay trục x_{i-1} quanh trục z_{i-1} đến



Hình 5.36

trục x_i' // x_i . Tham số thứ hai d_i , là khoảng cách giữa trục x_i' và trục x_i. Nếu khớp i là khớp quay thì θ_i là biến còn d_i là hằng số. Nếu khớp i là khớp tịnh tiến thì khoảng cách d_i là biến, còn θ_i là hằng số.

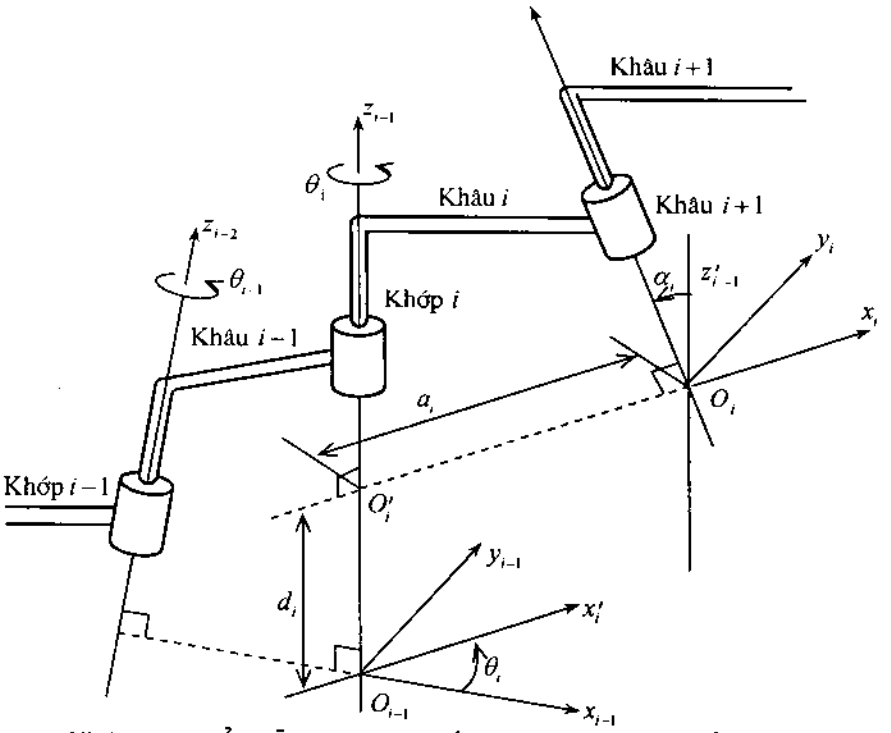
Đối với các rôbốt công nghiệp, Denavit–Hartenberg (1955) đã đưa ra cách chọn các hệ trục tọa độ như sau

1. Trục z_{i-1} được chọn dọc theo hướng của trục khớp động thứ i.

2. Trục x_{i-1} được chọn dọc theo đường vuông góc chung của hai trục z_{i-2} và z_{i-1}, hướng đi từ trục z_{i-2} sang trục z_{i-1}. Nếu trục z_{i-1} cắt trục z_{i-2} thì hướng của trục x_{i-1} được chọn tùy ý.

3. Gốc tọa độ O_{i-1} được chọn tại giao điểm của trục x_{i-1} và trục z_{i-1}.

4. Trục y_{i-1} được chọn sao cho hệ $(Oxyz)_{i-1}$ là hệ quy chiếu thuận.



Hình 5.37. Biểu diễn các thông số Denavit Hartenberg của khớp quay

Với cách chọn hệ tọa độ như trên, đôi khi các hệ tọa độ khâu $(Oxyz)_{i-1}$ không được xác định một cách duy nhất. Vì vậy ta cần có một số bổ xung thích hợp như sau:

5. Đối với hệ tọa độ $(Oxyz)_0$ theo quy ước trên ta mới chỉ chọn được trục z_0, còn trục x_0 chưa có trong quy ước trên. Ta có thể chọn trục x_0 một cách tùy ý.

6. Đối với hệ tọa độ $(Oxyz)_n$, do không có khớp n+1, nên theo quy ước trên

không xác định được trục z_n. Trục z_n không được xác định duy nhất, trong khi trục x_n lại được chọn theo pháp tuyến của trục z_{n-1}. Trong trường hợp này, nếu khớp n là khớp quay ta có thể chọn trục z_n song song với trục z_{n-1}. Ngoài ra, có thể chọn tùy ý sao cho hợp lý.

7. Khi hai trục z_{i-2} và z_{i-1} song song với nhau, giữa hai trục này có nhiều đường pháp tuyến chung, có thể chọn trục x_{i-1} hướng theo pháp tuyến chung nào cũng được.

8. Khi khớp thứ i là khớp tịnh tiến, về nguyên tắc có thể chọn trục z_{i-1} một cách tùy ý. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp người ta thường chọn trục z_{i-1} dọc theo trục của khớp tịnh tiến này.

Vị trí của hệ tọa độ khâu $(Oxyz)_i$ đối với hệ tọa độ khâu $(Oxyz)_{i-1}$ được xác định bởi bốn tham số Denavit–Hartenberg θ_i, d_i, a_i và α_i như sau:

– θ_i : góc quay quanh trục z_{i-1} để trục x_{i-1} chuyển đến trục x'_i (x'_i // x_i)

– d_i : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục z_{i-1} để gốc tọa độ O_{i-1} chuyển đến O'_i, giao điểm của trục x_i và trục z_{i-1}.

– a_i : dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục x_i để điểm O'_i chuyển đến điểm O_i.

– α_i : góc quay quanh trục x_i sao cho trục z'_{i-1} chuyển đến trục z_i.

Trong bốn tham số trên, các tham số a_i và α_i luôn luôn là các hằng số, độ lớn của chúng phụ thuộc vào hình dáng và sự ghép nối các khâu thứ $i-1$ và thứ i. Hai tham số còn lại θ_i và d_i , một là hằng số, một là biến số phụ thuộc vào khớp i là khớp quay hay khớp tịnh tiến. Khi khớp i là khớp quay thì θ_i là biến, còn d_i là hằng số. Khi khớp i là khớp tịnh tiến thì d_i là biến, còn θ_i là hằng số.

b) Ma trận Denavit–Hartenberg

Có thể chuyển tọa độ khâu $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ tọa độ khâu $(Oxyz)_i$ bằng bốn phép biến đổi cơ bản như sau:

– quay quanh trục z_{i-1} một góc θ_i

– dịch chuyển tịnh tiến dọc trục z_{i-1} một đoạn d_i

– dịch chuyển tịnh tiến dọc trục x_i một đoạn a_i

– quay quanh trục x_i một góc α_i

Ma trận của phép biến đổi, ký hiệu là $\mathbf{H}_i$, là tích của bốn ma trận biến đổi cơ bản và có dạng như sau

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Định nghĩa. Ma trận $\mathbf{H}_i$ được xác định bởi công thức (5.14) được gọi là ma trận Denavit–Hartenberg.

Ma trận Denavit–Hartenberg $\mathbf{H}_i$ là ma trận chuyển toạ độ của hệ quy chiếu $(Oxyz)_{i-1}$ đối với hệ quy chiếu $(Oxyz)_i$. Chính xác hơn cần phải ký hiệu ma trận này bằng ${}^{i-1}\mathbf{H}_i$. Để đơn giản cách viết sau này sử dụng ký hiệu $\mathbf{H}_i$ với nghĩa ${}^{i-1}\mathbf{H}_i$, còn $\mathbf{T}_i$ được dùng với nghĩa ${}^{0}\mathbf{H}_i$.

5.3. Phương trình xác định vị trí khâu thao tác (bàn kẹp) của rôbôt

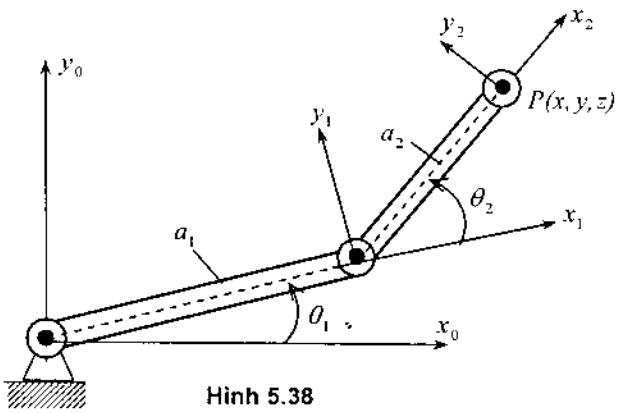
Áp dụng liên tiếp các phép biến đổi (5.8) đối với rôbôt n khâu thu được phương trình xác định vị trí khâu thao tác (bàn kẹp) của Rôbôt

$$\mathbf{D}_n = {}^{0}\mathbf{H}_n = {}^{0}\mathbf{H}_1\,{}^{1}\mathbf{H}_2 \cdots {}^{n-1}\mathbf{H}_n = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_n \tag{5.15}$$

5.4. Các thí dụ áp dụng

a) Thí dụ 5.16: Hình 5.38 là sơ đồ rô bốt phẳng. Hãy thiết lập ma trận Denavit–Hartenberg $\mathbf{D}_2$ và phương trình xác định điểm P.

Lời giải. Từ hình vẽ 5.38 dễ dàng thiết lập bảng các tham số động học Denavit–Hartenberg cho thí dụ này



Hình 5.38

Áp dụng công thức (5.15) tính được ma trận $\mathbf{D}_2$

Trục	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	a_1	0
2	q_2	0	a_2	0

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1C_1 \\ S_2 & C_1 & 0 & a_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ba thành phần đầu tiên của cột cuối cùng của ma trận $\mathbf{T}_2$ chính là các toạ độ của các điểm P. Vậy ta có:

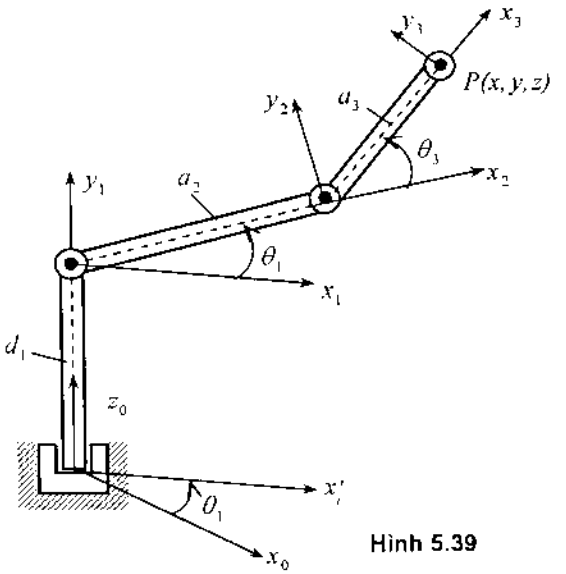
$$x_P^0 = a_1C_1 + a_2C_{12},\ y_P^0 = a_1S_1 + a_2S_{12}$$

Trong thí dụ này cũng như các thí dụ sau sử dụng ký hiệu

$$C_i = \cos q_i,\ S_i = \sin q_i,$$

$$C_{12} = \cos(q_1 + q_2), S_{12} = \sin(q_1 + q_2)$$

b) Thí dụ 5.17. Phân tích động học rôbốt không gian ba bậc tự do. Hình 5.39 là sơ đồ một loại rô bốt không gian ba bậc tự do. Hãy thiết lập ma trận $\mathbf{T}_3$ và phương trình xác định các tọa độ điểm P.



Hình 5.39

Lời giải. Từ hình vẽ dễ dàng xác định bảng các tham số động học Denavit–Hartenberg cho thí dụ này

Trục	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	d_1	0	π/2
2	q_2	0	a_2	0
3	q_3	0	a_3	0

Áp dụng công thức (5.15) tính được ma trận

$$\mathbf{D}_3 = \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & C_1\left(a_3C_{23} + a_2C_2\right) \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & S_1(a_3C_{23} + a_2C_2) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23} + a_2S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy tọa độ điểm P có dạng

$$x_P^0 = C_1\left(a_3C_{23} + a_2C_2\right)$$
$$y_P^0 = S_1\left(a_3C_{23} + a_2C_2\right)$$
$$z_P^0 = a_3S_{23} + a_2S_2 + d_1$$

Ở Bộ môn *Cơ học ứng dụng* Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, phần mềm **ROBOTDYN** đã được xây dựng để thiết lập tự động các phương trình *động học, động lực học* của các rôbốt công nghiệp và tính toán mô phỏng chuyển động của các rôbốt dạng chuỗi.

PHẦN 3. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

MỞ ĐẦU

Động lực học nghiên cứu chuyển động cơ học của các vật thể dưới tác dụng của lực. Trong phần này trình bày động lực học của mô hình chất điểm, mô hình vật rắn, mô hình cơ hệ gồm n chất điểm và p vật rắn.

Nếu như các kích thước nội tại của một vật thể có thể bỏ qua khi khảo sát chuyển động của nó, thì có thể xem vật thể đó là một điểm có mang khối lượng và gọi là chất điểm (hoặc vật điểm). Nếu như các kích thước nội tại của một vật thể ảnh hưởng đến dáng điệu chuyển động của các điểm thuộc vật, thì không thể sử dụng mô hình chất điểm, mà phải sử dụng mô hình vật rắn tuyệt đối, vật thể biến dạng v.v... Vật rắn tuyệt đối (được gọi tắt là vật rắn) là một vật thể có mang khối lượng, mà khoảng cách giữa các điểm của nó luôn luôn không đổi.

Như thế, khi sử dụng mô hình chất điểm ta không cần quan tâm đến dạng hình học cụ thể của vật thể, còn khi sử dụng mô hình vật rắn cần phải quan tâm đến dạng hình học cụ thể của vật thể. Do đó, phải quan tâm đến sự phân bố khối lượng của vật thể. Để xét đến dạng hình học cụ thể của vật rắn người ta đưa ra khái niệm khối tâm của vật rắn, mô men quán tính khối của vật rắn. Chúng ta cần chú ý rằng chất điểm và vật rắn là hai loại mô hình của vật thể.

Galilei (1564–1642) là người đã thực hiện những nghiên cứu có hệ thống đầu tiên về động lực học. Bằng con đường thực nghiệm, Galilei đã tìm ra định luật về chuyển động rơi tự do, định luật về chuyển động parabol. Năm 1638 ông đã tìm ra định luật quán tính. Để đánh giá đúng công lao của ông, cần phải chú ý rằng vào thời kỳ đó chưa có phép tính vi phân và tích phân, chưa có các thiết bị đo đạc như ngày nay.

Năm 1687, Newton (1642 –1727) đã đặt nền móng cho động lực học bằng việc xuất bản tác phẩm nổi tiếng "Các nguyên lý toán học của khoa học tự nhiên". Trong đó, ông nêu lên ba tiên đề làm cơ sở xây dựng cơ học (định luật quán tính, định luật cơ bản, định luật về tác dụng và phản tác dụng). Chú ý rằng, hai tiên đề đầu tiên chỉ đúng trong hệ quy chiếu quán tính.

D. Bernoulli (1745), L. Euler (1746) và D'Arcy (1747) là những người đầu tiên nêu lên định lý biến thiên mômen động lượng. Định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng là cơ sở xây dựng Cơ học véc tơ.

Năm 1829, G.G. Coriolis đã đưa ra khái niệm công của lực. Sau đó ông đã đưa ra khái niệm "lực sống" sau này gọi là động năng. Ông là một trong những người đầu tiên nêu lên định lý biến thiên động năng.

Một cách tiếp cận khác để nghiên cứu cơ học là xây dựng các nguyên lý cơ học. Các nguyên lý cơ học được nghiên cứu và phát triển bởi các nhà khoa học nổi tiếng như d'Alembert (1717 – 1783), Lagrange (1736 – 1813), Gauss (1777 – 1859), v.v... Trong giáo trình này ta giới hạn chỉ trình bày một số nguyên lý quan trọng như Nguyên lý công ảo, Nguyên lý d'Alembert, Nguyên lý d'Alembert – Lagrange và Phương trình Lagrange loại hai.

Bên cạnh một số khái niệm đã được đưa vào trong phần tĩnh học và động học (không gian, thời gian, lực, mômen của lực, điểm, vật rắn, vận tốc và gia tốc của điểm, vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn v.v...), trong phần động lực học ta sẽ đưa vào một số khái niệm mới như chất điểm và vật rắn (mang khối lượng), động lượng, mômen động lượng, xung lượng của lực, động năng, thế năng, mômen quán tính khối, công của lực, di chuyển ảo, v.v...

Các phương pháp tính toán động lực học có thể phân thành ba nhóm: các phương pháp động lượng, các phương pháp năng lượng và các phương pháp của cơ học giải tích. Các phương pháp động lượng dựa trên các khái niệm véc tơ như động lượng, mômen động lượng của chất điểm và vật rắn, xung lượng của lực và tiên đề Newton hai. Các phương pháp năng lượng dựa trên các khái niệm vô hướng như động năng của chất điểm và của vật rắn, công của lực, thế vị của lực có thế và tiên đề Newton hai. Các phương pháp cơ học giải tích dựa trên khái niệm di chyển ảo của chất điểm, của vật rắn và các nguyên lý cơ học.

Các phương pháp nghiên cứu cơ học kỹ thuật nói chung và động lực học nói riêng là phương pháp tiên đề và phương pháp mô hình. Nếu như các tiên đề cơ học hoặc các nguyên lý cơ học về cơ bản gần như đã hoàn chỉnh, thì việc xây dựng các mô hình cơ học cho các hệ kỹ thuật là vấn đề còn đang được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Với góc độ đó, Cơ học kỹ thuật là một lĩnh vực khoa học đang trên đà phát triển. Với sự trợ giúp của tin học và kỹ thuật điện tử, nhiều bài toán quan trọng của cơ học, nhiều phương pháp tính mới đang được nghiên cứu về mặt lý thuyết và đang được đưa vào ứng dụng trong kỹ thuật.

Chương 1

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

Năm 1687 trong tác phẩm "*Các nguyên lý toán học của khoa học tự nhiên*" (Philosophia Naturalis Principia Mathematica), nhà bác học người Anh *Isaac Newton* (1642–1727) đã tổng kết và nêu ra ba tiên đề của động lực học chất điểm, làm cơ sở nghiên cứu động lực học chất điểm và hệ các chất điểm. Trong chương này, trình bày nội dung hệ ba tiên đề Newton. Từ đó thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của mô hình chất điểm trong hệ tọa độ Descartes và trong hệ tọa độ tự nhiên.

1. HỆ TIÊN ĐỀ NEWTON

1.1. Hệ ba tiên đề Newton

Tiên đề 1 (Định luật quán tính). *Khi không có lực tác dụng lên chất điểm, động lượng của nó được bảo toàn.*

Trong đó, động lượng của chất điểm (ký hiệu là $\vec{p}$) là một đại lượng véctơ bằng tích số khối lượng m của chất điểm với vận tốc $\vec{v}$ của nó.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.1}$$

Tiên đề Newton 1 có thể viết dưới dạng biểu thức như sau

Khi $\vec{F} = 0$ thì $\vec{p} = m\vec{v} = const$ (1.2)

Theo tiên đề này, một chất điểm sẽ chuyển động thẳng đều $(\vec{v} = const)$ hoặc đứng yên khi không chịu tác dụng của lực. Chính Galilei (1564–1642) là người đã tìm ra tiên đề này vào năm 1638 và ông gọi là định luật quán tính $(\vec{v} = const)$.

Tiên đề 2 (Định luật cơ bản). Đạo hàm theo thời gian động lượng của chất điểm bằng lực tác dụng lên nó.

Tiên đề này có dạng biểu thức như sau

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \tag{1.3}$$

Nếu khối lượng của chất điểm trong quá trình chuyển động là hằng số, thì từ (1.3) suy ra

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \tag{1.4}$$

Tiên đề 3 (Định luật về tác dụng và phản lực tác dụng). *Các lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm là hai lực có cùng đường tác dụng, cùng cường độ nhưng ngược chiều nhau.*

Để dễ nhớ tiên đề 3 có thể viết dưới dạng biểu thức bằng chữ như sau

$$actio = reactio \tag{1.5}$$

Trong đó *actio* là tác dụng, *reactio* là phản tác dụng. Chú ý rằng, hai lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm không phải là một cặp lực cân bằng vì chúng đặt vào hai chất điểm khác nhau. Do mô tả tương tác giữa hai chất điểm, nên tiên đề 3 là cơ sở để khảo sát động lực học hệ nhiều chất điểm.

Chú ý: Ngoài ba tiên đề nêu trên, trong phần Động lực học chúng ta cũng công nhận và sử dụng một số tiên đề tĩnh học như Tiên đề hình bình hành lực, Nguyên lý giải phóng liên kết Lagrange.

1.2. Hệ quy chiếu quán tính

a) Định nghĩa hệ quy chiếu quán tính. Hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu, mà trong đó các tiên đề Newton 1 và 2 được nghiệm đúng. Người ta còn gọi hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu cố định. Đối với đa số bài toán áp dụng trong kỹ thuật, trái đất có thể xem một cách gần đúng là hệ quy chiếu cố định. Việc áp dụng tiên đề Newton 2 trong hệ quy chiếu không cố định sẽ được bàn đến trong chương động lực học chuyển động tương đối.

Chú ý rằng, tiên đề Newton 3 không liên quan đến các yếu tố động học nên đúng với mọi hệ quy chiếu.

b) Giới hạn áp dụng của Cơ học Newton. Cơ học được xây dựng trên cơ sở các tiên đề Newton được gọi là Cơ học Newton. Cơ học Newton chỉ đúng với chất điểm có kích thước đủ lớn so với kích thước nguyên tử, và có vận tốc đủ nhỏ so với vận tốc ánh sáng. Chính vì vậy cơ học Newton còn được gọi là Cơ học cổ điển, để phân biệt với Cơ học lượng tử và Cơ học tương đối.

c) Chú ý: Như trên đã nói hai tiên đề Newton 1 và 2 chỉ đúng trong hệ quy chiếu quán tính. Nếu công nhận có hệ quy chiếu quán tính, thì tiên đề 1 là một hệ quả của tiên đề 2. Tuy nhiên để ghi nhận ý nghĩa lịch sử công trình khoa học của Newton, người ta vẫn trình bày cả ba tiên đề.

2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

Như đã biết trong phần động học, để xác định vị trí của chất điểm trong không gian, người ta thường sử dụng các hệ toạ độ Descartes (Đề các) vuông góc, hệ toạ độ tự nhiên, hệ toạ độ trụ, v.v... Dưới đây trình bày phương trình chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ Descartes và trong hệ toạ độ tự nhiên.

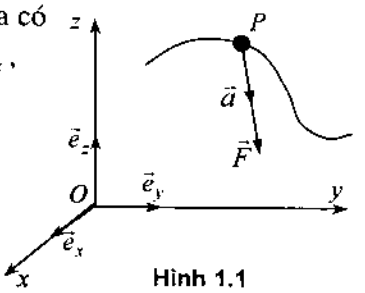
2.1. Các phương trình vi phân chuyển động trong hệ toạ độ Descartes

Trong toạ độ Descartes vuông góc (hình 1.1) ta có

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z,$$

Trong đó: $a_x = \vec{a}.\vec{e}_x$, $a_y = \vec{a}.\vec{e}_y$, $a_z = \vec{a}.\vec{e}_z$.

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z.$$



Hình 1.1

Từ công thức (1.4) suy ra:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{z} &= F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Hệ ba phương trình vi phân cấp (2.1) được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ Descartes. Để giải hệ phương trình vi phân (2.1) cần biết sáu điều kiện tại thời điểm đầu $t = t_0$:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \\ y(t_0) &= y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \\ z(t_0) &= z_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Các điều kiện đầu (2.2) được xác định từ các dữ kiện ban đầu của bài toán.

2.2. Các phương trình vi phân chuyển động trong hệ toạ độ tự nhiên

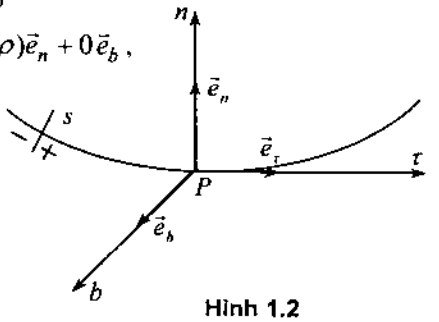
Trong hệ toạ độ tự nhiên (hình 1.2) ta có

$$\vec{a} = a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n + a_b\vec{e}_b = \dot{v}\vec{e}_\tau + (v^2/\rho)\vec{e}_n + 0\vec{e}_b,$$

$$\vec{F} = F_\tau\vec{e}_\tau + F_n\vec{e}_n + F_b\vec{e}_b.$$

Từ định luật cơ bản (1.4) suy ra

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= F_\tau \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned} \qquad (2.3)$$



Hình 1.2

Các phương trình (2.3) được gọi là hệ ba phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ tự nhiên.

2.3. Sự phân loại các bài toán động lực học chất điểm

Các bài toán động lực học chất điểm có thể phân loại thành ba dạng như sau:

– Bài toán một: Cho biết chuyển động của chất điểm, tìm lực tác dụng lên chất điểm.

– Bài toán hai: Cho biết lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động, xác định quy luật chuyển động của chất điểm.

– Bài toán ba: Cho biết một phần các lực tác dụng lên chất điểm và một số thông tin về chuyển động. Tìm các lực chưa biết tác dụng lên chất điểm và các thông tin chưa biết về chuyển động của chất điểm.

3. CÁC THÍ DỤ ÁP DỤNG

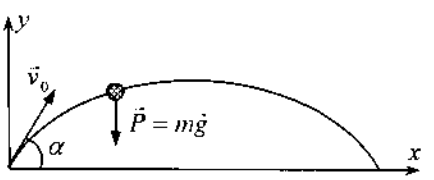
Trong mục này ta trình bày một số thí dụ áp dụng điển hình của động lực học chất điểm. Sự phân loại ở đây chủ yếu dựa trên đặc điểm của lực tác dụng lên chất điểm.

3.1. Chuyển động của chất điểm tự do

Thí dụ 1.1. Khảo sát chuyển động của viên đạn bắn với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ nghiêng với phương nằm ngang một góc α. Bỏ qua sức cản của không khí.

Lời giải. Xem viên đạn như một chất điểm. Phương trình vi phân chuyển động của viên đạn là

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \qquad (1)$$



Hình 1.3

Tích phân hai lần hệ phương trình (1) ta được:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = C_1 t + C_3 \\ y = -g\dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_4 \end{cases} \qquad (2)$$

Theo đầu bài ta có các điều kiện đầu như sau

$$x_0(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$$
$$y_0(0) = 0,\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$$

Từ các điều kiện đầu trên, xác định được các hằng số tích phân

$$C_3 = 0,\ C_1 = v_0 \cos\alpha$$
$$C_4 = 0,\ C_2 = v_0 \sin\alpha$$

Vậy phương trình chuyển động của viên đạn là

$$x = (v_0 \cos\alpha)t$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \qquad (3)$$

Khử thời gian t, nhận được phương trình quỹ đạo chuyển động của viên đạn

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\mathrm{tg}\alpha)x \qquad (4)$$

Vậy quỹ đạo chuyển động của viên đạn là đường parabol bậc hai có trục đối xứng thẳng đứng. Tầm xa của viên đạn được xác định từ điều kiện $y = 0$. Từ phương trình (4) suy ra

$$x_{vd} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (5)$$

Như thế khi $\alpha = 45^0$, $\sin 2\alpha = 1$, viên đạn bắn đi được xa nhất

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Chú ý rằng, nếu đặt $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ thì $2\beta = \pi - 2\alpha$ và do đó $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Vậy tầm xa của viên đạn đạt được như nhau, không phụ thuộc vào hướng của $\vec{v}_0$ nghiêng với phương thẳng đứng hay phương nằm ngang một góc α.

Để tìm độ cao cực đại của viên đạn, ta tìm cực trị của hàm *y(x)*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}x + \mathrm{tg}\alpha = 0 \quad \Rightarrow x^* = \frac{v_0^2 \cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{g} \qquad (6)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} < 0$$

Thế (6) vào (4) ta được độ cao cực đại của viên đạn

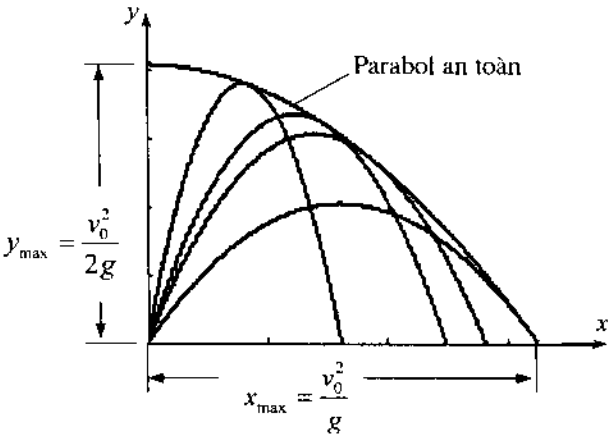
$$y^* = \frac{1}{2g}(v_0 \sin\alpha)^2 \qquad (7)$$

Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ta có $y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Từ kết quả trên thấy rằng, với cùng vận tốc góc ban đầu $\vec{v}_0$, bắn với góc độ khác nhau, viên đạn vạch nên những quỹ đạo parabol nằm trong mặt Oxy, bị giới hạn bởi hai đường

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{g},\ y_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Các quỹ đạo dạng (4) là một họ các parabol phụ thuộc vào tham số α. Tìm hình bao của họ các parabol này ta sẽ được một đường cong, giới hạn phần mặt phẳng hoạt động của viên đạn bắn với cùng vận tốc ban đầu, dưới các góc độ khác nhau. Bây giờ ta tìm hình bao của họ đường cong (4).



Hình 1.4

Đặt $\text{tg}\alpha = p$, ta có

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + p^2$$

Thế vào phương trình (4) suy ra

$$y = px - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + p^2\right) \qquad (8)$$

Đạo hàm biểu thức trên theo p, ta được

$$\frac{dy}{dp} = x - \frac{gx^2}{v_0^2}p \qquad (9)$$

Từ điều kiện $\frac{dy}{dp} = 0$ giải ra

$$p = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Thay vào phương trình (8) ta được phương trình hình bao

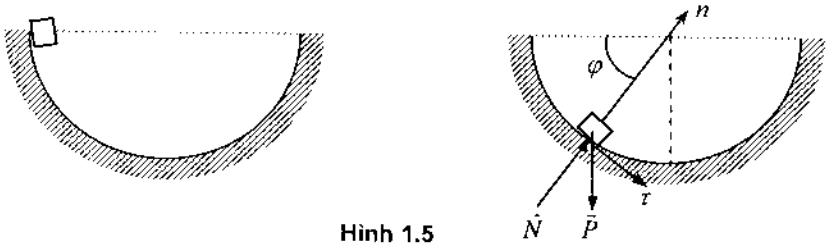
$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \qquad (10)$$

Phương trình hình bao (10) là một parabol, được gọi là parabol an toàn. Parabol (10) đi qua đỉnh cao nhất và qua điểm bắn đạt được xa nhất (hình 1.4).

3.2. Chuyển động của chất điểm chịu liên kết

Dạng chuyển động phổ biến nhất của chất điểm bị ràng buộc là chuyển động của chất điểm trên một đường hoặc một mặt đã cho. Khi đó số bậc tự do của chất điểm sẽ nhỏ hơn ba. Trong phần Động học đã định nghĩa, số bậc tự do của chất điểm là số toạ độ tối thiểu đủ để xác định vị trí của chất điểm .

Thí dụ 1.2. Xét chuyển động của một chất điểm ở bên trong nửa đường tròn bán kính r (hình 1.5)



Hình 1.5

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ tự nhiên

$$\begin{cases} m\dot{v} = mg\cos\varphi \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = N - mg\sin\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

Trong phần động học biết rằng $v = r\dot{\varphi}$, $\dot{v} = r\ddot{\varphi}$, $\rho = r$. Thế các biểu thức này vào phương trình (1) ta được

$$\begin{aligned} mr\ddot{\varphi} &= mg\cos\varphi \\ mr\dot{\varphi}^2 &= N - mg\sin\varphi \end{aligned} \qquad (2)$$

Ở đây ta có hệ phương trình 2 ẩn là φ và N. Với chú ý $\ddot{\varphi} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\dfrac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$, phương trình thứ nhất của (2) đưa được về dạng

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \frac{g}{r}\cos\varphi d\varphi$$

Tích phân phương trình trên và chú ý đến điều kiện đầu $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ xác định được:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r}\sin\varphi \qquad (3)$$

Thế biểu thức (3) vào phương trình vi phân thứ hai của (2) tính được biểu thức xác định phản lực liên kết động:

$$N = mr\frac{2g}{r}\sin\varphi + mg\sin\varphi = 3mg\sin\varphi \qquad (4)$$

Tại điểm thấp nhất $(\varphi = \pi/2)$ phản lực liên kết động lớn gấp ba lần phản lực liên kết tĩnh.

Từ (3) dễ dàng xác định biểu thức vận tốc của chất điểm

$$v = r\dot{\varphi} = \sqrt{2gr\sin\varphi}$$

Như thế, khi $(\varphi = \pi/2)$, vận tốc chất điểm đạt cực đại, $v_{max} = \sqrt{2gr}$. Nếu ta muốn tìm biểu thức $\varphi(t)$ thì cần phải áp dụng phương pháp tách biến một lần nữa. Từ (3) suy ra

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{r}}\sqrt{\sin\varphi} \quad \Rightarrow \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}} = \sqrt{\frac{2g}{r}}dt$$

Việc tính tích phân $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}$ có thể tra trong các bảng tích phân.

3.3. Chuyển động của chất điểm chịu tác dụng của các lực cản

Các lực cản có một vai trò hết sức quan trọng trong kỹ thuật. Khác với bài toán tĩnh học, các lực cản chuyển động của chất điểm là các lực hoạt động, chúng xuất hiện do chất điểm chuyển động và có thể phụ thuộc vào chuyển động của chất điểm. Các thí dụ về lực cản chuyển động của chất điểm là lực ma sát Coulomb giữa chất điểm và vật gây liên kết (giá đỡ), lực cản không khí v.v...

Biểu thức gần đúng của lực ma sát trượt động, hay còn gọi là lực ma sát Coulom, có dạng

$$F_{ms} = \mu N \tag{3.1}$$

Trong đó, N là độ lớn của phản lực pháp tuyến, μ là hệ số ma sát trượt động trung bình. Như vậy lực ma sát Coulomb không phụ thuộc vào độ lớn vận tốc.

Khi chất điểm (hoặc vật rắn) chuyển động ở trong môi trường nước hoặc khí, lực cản chuyển động phụ thuộc vào vận tốc chuyển động. Biểu thức lực cản thường được xác định bằng thực nghiệm. Ở đây ta nêu ra hai trường hợp đặc biệt hay gặp trong kỹ thuật.

Khi vận tốc nhỏ, dòng chảy là ổn định. Lực cản F_c tỷ lệ bậc nhất với vận tốc

$$F_c = kv \tag{3.2}$$

Trong đó, hằng số k phụ thuộc vào hình dáng của vật thể chuyển động trong môi trường lỏng và vào hằng số nhớt γ của dòng chất lỏng. Năm 1854 Stokes đã tìm ra quy luật cản vật thể hình cầu bán kính r, chuyển động trong môi trường lỏng với vận tốc v

$$F_C = 6\pi\gamma r v \tag{3.3}$$

Sự phụ thuộc tuyến tính giữa lực cản nhớt và vận tốc thường được sử dụng trong lý thuyết dao động kỹ thuật.

Khi vận tốc lớn, dòng chảy là chảy rối. Lực cản trong trường hợp này có thể biểu diễn một cách gần đúng dưới dạng

$$F_c = kv^2 \tag{3.4}$$

Trong đó, k là hằng số phụ thuộc vào hình dáng vật thể và mật độ ρ của môi trường quanh vật thể. Người ta thường viết định luật trên dưới dạng

$$F_c = c_0 \frac{\rho}{2} A_b v^2 \tag{3.5}$$

Trong (3.5) A_b là hình chiếu của vật thể lên mặt phẳng vuông góc với dòng chảy, c_0 là hệ số cản xác định bằng thực nghiệm. Chẳng hạn với ô tô thì c_0 nằm giữa 0,3 và 0,4.

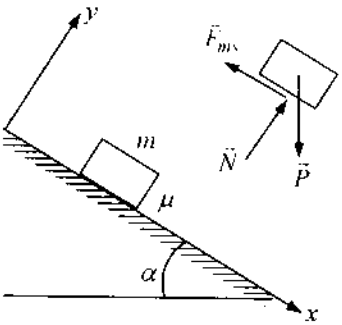
Thí dụ 1.3. Một chất điểm có khối lượng m chuyển động trên mặt phẳng nghiêng nhám như hình 1.6. Cho biết hệ số ma sát trượt động là μ, hãy xác định phương trình chuyển động của chất điểm.

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ toạ độ Decartes có dạng

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{ms} \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha \tag{2}$$

Do y=const, $\ddot{y} = 0$, từ phương trình (2) ta suy ra $N = mg\cos\alpha$. Theo định luật ma sát Coulomb $F_{ms} = \mu N$ biết rằng



Hình 1.6

$$F_{ms} = \mu mg \tag{3}$$

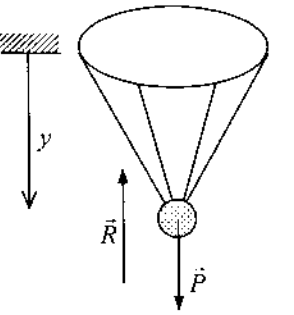
Thế (3) vào phương trình (1) ta được

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = const \tag{4}$$

Tích phân phương trình (4) và chú ý đến các điều kiện đầu $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ tính được

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t \\ x &= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Thí dụ 1.4. Một vật khối lượng m rơi tự do chịu tác dụng của lực cản không khí $R = kv^2$. Hãy xác định vận tốc rơi của vật thể.



Hình 1.7

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm là

$$m\ddot{y} = mg - k\dot{y}^2 \qquad (1)$$

Nếu ta đặt $a^2 = mg/k$, thì từ phương trình (1) có dạng

$$\ddot{y} = g\left(1 - \frac{\dot{y}^2}{a^2}\right) \qquad (2)$$

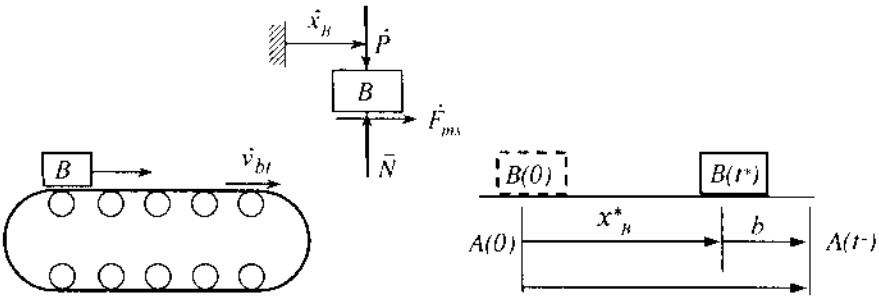
Áp dụng phương pháp tách biến giải phương trình vi phân (2) biết rằng

$$\frac{d\dot{y}}{g\left(1 - \frac{\dot{y}^2}{a^2}\right)} = dt\ , \qquad t = \frac{a}{g}\,arctgh\frac{\dot{y}}{a} + C \qquad (3)$$

Từ điều kiện đầu $\dot{y}(0) = 0$ suy ra $C=0$. Vậy từ (3) ta có

$$\dot{y} = a\,tgh\frac{gt}{a} \qquad (4)$$

Thí dụ 1.5. Một băng tải chuyển động đều với vận tốc $v_{bt} = 3$ (m/s). Ở thời điểm t = 0, một vật nặng B có trọng lượng $P = mg$ bắt đầu chuyển động trên băng tải từ vị trí A (hình 1.8) với vận tốc đầu là $v_0 = 0,5$ (m/s). Cho biết hệ số ma sát trượt động giữa vật nặng và băng tải là $\mu = 0,2$. Hãy xác định khoảng thời gian vật nặng dịch chuyển lọc xọc trên băng tải. Khi vật nặng hết lọc xọc nó đã di chuyển trên băng tải một đoạn là bao nhiêu.



Hình 1.8

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của vật nặng B là

$$m\ddot{x}_B = F_{ms} = \mu mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_B = \mu g \qquad (1)$$

Tích phân phương trình (1) suy ra

$$\dot{x}_B = \mu g t + C_1, \quad x_B = \frac{1}{2}\mu g t^2 + C_1 t + C_2$$

Do các điều kiện đầu $x_B(0) = 0$, $\dot{x}_B(0) = v_0$ dễ dàng xác định được các hằng số tích phân $C_2 = 0$, $C_1 = v_0$. Từ đó xác định được quy luật chuyển động của vật nặng

$$\dot{x}_B = v_B = \mu g t + v_0, \; x_B = \frac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 t \tag{2}$$

Quá trình chuyển động lọc xọc của vật nặng trên băng tải sẽ kết thúc khi vật nặng có vận tốc bằng vận tốc của băng tải.

$$v_B = v_{bt}, \quad \mu g t^* + v_0 = v_{bt}, \; t^* = \frac{v_{bt} - v_0}{\mu g} \tag{3}$$

Quãng đường vận nặng dịch chuyển trong khoảng thời gian t^* là

$$s_B^* = x_B\left(t^*\right) = \frac{1}{2}\mu g t^{*2} + v_0 t^* \tag{4}$$

Trong khoảng thời gian t^* trên, điểm A của băng tải dịch chuyển được một đoạn là

$$s_A^* = s_{bt}\left(t^*\right) = v_{bt} t^* \tag{5}$$

Khoảng cách từ vật nặng B đến điểm A của băng tải tại thời điểm t^* là

$$b = s_A^* - s_B^* = vbt^* - \frac{1}{2}\mu g t^{*2} - v_0 t^* \tag{6}$$

Thay số vào các phương trình (3), (4, (5), (6) ta được

$$t^* = \frac{3 - 0,5}{0,2 \cdot 9,81} = 1,27\,(\text{s}), \quad s_B^* = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 9,81 \cdot 1,27^2 + 0,5 \cdot 1,27 = 2,2\,(\text{m})$$

$$s_A^* = 3 \cdot 1,27 = 3,8\,(\text{m}), \qquad b = 3,8 - 2,2 = 1,6\,(\text{m})$$

Chương 2

CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LƯỢNG

Việc nghiên cứu cơ học bằng các phương pháp động lượng (Momentum Methods) có một vai trò hết sức quan trọng. Đây chính là nội dung chính của Cơ học Newton (hay Cơ học véctơ). Trong chương này ta trình bày những nội dung cơ bản của Cơ học véctơ. Đó là các định nghĩa động lượng của chất điểm và của vật rắn, mômen động lượng đối với một điểm của chất điểm và của vật rắn, các định lý động lượng, định lý chuyển động khối tâm, các định lý mômen động lượng và các áp dụng của các định lý này trong động lực học vật rắn quay quanh một trục cố định và vật rắn chuyển động phẳng.

1. MỞ ĐẦU VỀ CÁC HỆ CƠ HỌC

1.1. Sự phân loại các mô hình cơ học

Các cơ hệ có thể phân thành: Hệ các chất điểm, hệ các vật rắn, hệ liên tục (chất lỏng,vật rắn biến dạng), hệ các phần tử hữu hạn, hệ hỗn hợp. Như đã trình bày trong phần mở đầu, trong giáo trình này ta chỉ xét các hệ gồm các chất điểm và các vật rắn, mà chủ yếu là các vật rắn phẳng. Thuật ngữ hệ cơ học hoặc gọi tắt là cơ hệ trong giáo trình này quy ước dùng để chỉ một tập các chất điểm và các vật rắn mà chuyển động của chúng phụ thuộc lẫn nhau.

1.2. Toạ độ suy rộng, số bậc tự do của cơ hệ

a) Cơ hệ tự do và cơ hệ chịu liên kết (không tự do)

Trong phần động học đã biết rằng, vị trí của mỗi chất điểm tự do được xác định bằng một véc tơ định vị, vận tốc của nó được xác định bằng đạo hàm của véctơ định vị theo thời gian. Vị trí của một vật rắn tự do được xác định bởi vị trí của một điểm định vị bất kỳ thuộc vật và hướng quay của nó, vận tốc của vật rắn được xác định bởi vận tốc của một điểm định vị thuộc vật và vận tốc góc của nó. Điểm định vị của vật rắn đôi khi còn được gọi là điểm cực.

Các cơ hệ được phân thành cơ hệ tự do và cơ hệ chịu liên kết (không tự do). Cơ hệ tự do là cơ hệ mà vị trí và vận tốc của các chất điểm và các vật rắn thuộc hệ có thể nhận các giá trị tuỳ ý. Ngược lại, cơ hệ được gọi là cơ hệ chịu liên kết. Đối với cơ hệ chịu liên kết vị trí và vận tốc của các chất điểm và các vật rắn

thuộc hệ bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học. Trong kỹ thuật thường gặp các cơ hệ chịu liên kết.

Các cơ hệ chịu liên kết được phân thành cơ hệ chỉ có các liên kết hình học (hay còn gọi là liên kết hôlônôm) và các cơ hệ ngoài các liên kết hình học có các liên kết động học không khả tích (hay còn gọi là liên kết không hôlônôm). Trong giáo trình này chỉ xét các cơ hệ chịu các liên kết hình học. Các cơ hệ chỉ chịu các liên kết hình học (liên kết hôlônôm) được gọi là các cơ hệ hôlônôm.

b) Toạ độ suy rộng

Định nghĩa 1.1. Các tham số dùng để xác định vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu được gọi là các toạ độ suy rộng. Trong giáo trình này ký hiệu toạ độ suy rộng bởi $q_1, q_2, q_3, ..., q_m$. Thông thường, các toạ độ suy rộng là các độ dài, các góc quay.

c) Số bậc tự do của cơ hệ

Định nghĩa 1.2. Số bậc tự do của một cơ hệ chịu các liên kết hình học là số các toạ độ suy rộng độc lập tối thiểu, đủ để xác định vị trí của cơ hệ . Ký hiệu f là số bậc tự do của cơ hệ. (Trong chương 4 sẽ nêu ra định nghĩa tổng quát về số bậc tự do của một cơ hệ).

d) Toạ độ suy rộng đủ và tọa độ suy rộng dư

Định nghĩa 1.3. Nếu số tọa độ suy rộng dùng để xác định vị trí của cơ hệ đúng bằng số bậc tự do của cơ hệ và độc lập với nhau, thì các tọa độ suy rộng này được gọi là các tọa độ suy rộng đủ. Nếu số tọa độ suy rộng dùng để xác định vị trí của cơ hệ lớn hơn số bậc tự do của cơ hệ, thì các tọa độ suy rộng này được gọi là các tọa độ suy rộng dư.

Trên hình 2.1 là một số thí dụ đơn giản về các toạ độ xác định vị trí và số bậc tự do của cơ hệ.

Nếu cơ hệ gồm n chất điểm chuyển động trong không gian, chịu r điều kiện ràng buộc, thì số bậc tự do của cơ hệ là

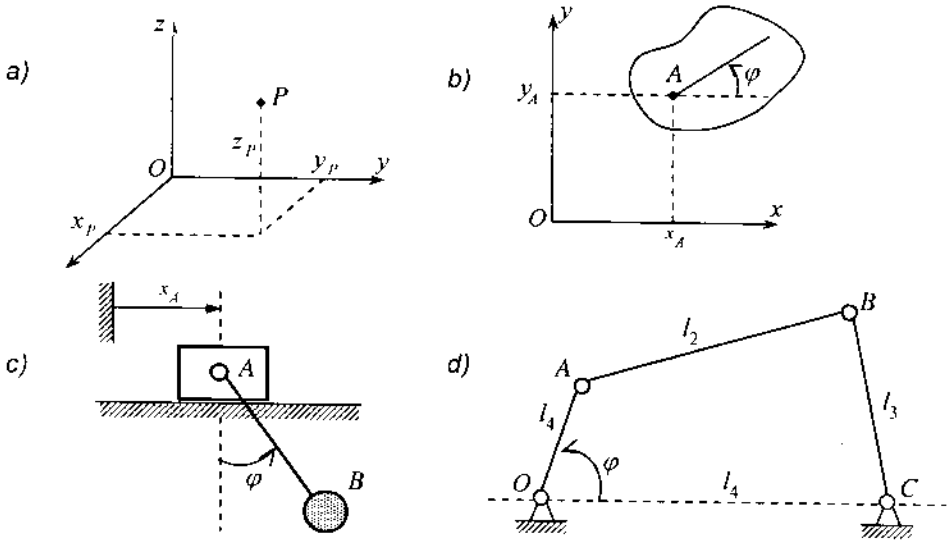
$$f = 3n - r \tag{1.1}$$

Nếu cơ hệ gồm n chất điểm chuyển động trong cùng một mặt phẳng, chịu r điều kiện ràng buộc, thì số bậc tự do của hệ là

$$f = 2n - r \tag{1.2}$$

Nếu cơ hệ gồm p vật rắn phẳng chuyển động trong cùng một mặt phẳng, chịu r điều kiện ràng buộc, thì số bậc tự do của hệ là

$$f = 3p - r \tag{1.3}$$



Hình 2.1

a) Chất điểm *P* chuyển động trong không gian. Các toạ độ định vị: $q_1 = x_P$, $q_2 = y_P$, $q_3 = z_P$. Số bậc tự do: $f = 3$.

b) Hình phẳng chuyển động trong mặt phẳng *Oxy*. Các toạ độ định vị: $q_1 = x_A$, $q_2 = y_A$, $q_3 = \varphi$. Số bậc tự do: $f = 3$.

c) Con lắc eliptic gồm hai chất điểm A và B nối với nhau bằng dây mềm không dãn. Các toạ độ định vị: $q_1 = x_A, q_2 = \varphi$. Số bậc tự do: $f = 2$.

d) Vị trí của cơ cấu bốn khâu *OABC* được xác định hoàn toàn khi biết góc quay φ. Thật vậy, khi biết góc quay φ ta biết được vị trí của điểm *A*. Còn điểm *B* là giao của hai cung tròn. Cung thứ nhất tâm *A* bán kính l_2. Cung thứ hai tâm *C* bán kính l_3. Số bậc tự do của cơ cấu bốn khâu $f = 1$.

1.3. Sự phân loại các lực

Các phương pháp tính toán được sử dụng trong động lực học là phương pháp động lượng (hay phương pháp véctơ) và phương pháp năng lượng. Tuỳ theo việc sử dụng phương pháp tính, người ta phân loại lực theo hai quan điểm.

a) Quan điểm 1. Phân loại các lực tác dụng lên cơ hệ thành ngoại lực và nội lực.

Ngoại lực là các lực từ bên ngoài tác dụng vào hệ khảo sát. Nội lực là các lực tác dụng tương hỗ giữa các vật thể trong cùng một hệ khảo sát. Ta ký hiệu ngoại lực bởi véctơ $\vec{F}_k^e$ (external force), nội lực bởi véctơ $\vec{F}_k^i$ (internal force). Một lực có thể là ngoại lực hay nội lực tuỳ theo sự lựa chọn hệ khảo sát.

Nếu cơ hệ là hệ các chất điểm và các vật rắn thì hệ nội lực của cơ hệ có hai tính chất sau:

– Véctơ chính của các nội lực bằng không,

– Véctơ mômen chính của các nội lực đối với một điểm O bất kỳ bằng không

$$\sum \vec{F}_k^i = 0, \qquad \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^i\right) = 0. \tag{1.4}$$

b) Quan điểm 2. Phân loại các lực tác dụng lên cơ hệ thành lực hoạt động và lực liên kết .

Lực liên kết là các lực do các vật gây liên kết tác dụng lên các vật của hệ khảo sát hoặc các lực thay thế cho tác dụng của các liên kết giữa các vật thể trong cùng một hệ khảo sát. Ký hiệu lực liên kết là véctơ $\vec{F}_k^c$ (constraint force) hoặc $\vec{R}_k$ (Reaction force). Lực hoạt động là các lực không phải là lực liên kết, ký hiệu là véctơ $\vec{F}_k^a$ (applied force, active force). Trọng lực, sức đẩy của gió v.v... là các lực hoạt động.

Quan điểm 1 về phân loại lực được sử dụng khi ta dùng phương pháp động lượng để tính toán, quan điểm 2 được sử dụng khi ta dùng phương pháp năng lượng để tính toán. Chú ý rằng, nội và ngoại lực đều có thể là lực hoạt động hoặc lực liên kết và ngược lại.

Chú ý. Các lực tác dụng lên một vật rắn được phân thành các lực tập trung (mỗi ngẫu lực xem là hai lực) và các lực phân bố (lực mặt và lực khối). Để đơn giản ta ký hiệu lực tác dụng lên một phân tố nhỏ dm của vật rắn B là $d\vec{F}$. Khi đó véc tơ chính của các lực tác dụng lên vật rắn là

$$\vec{F} = \int d\vec{F}$$

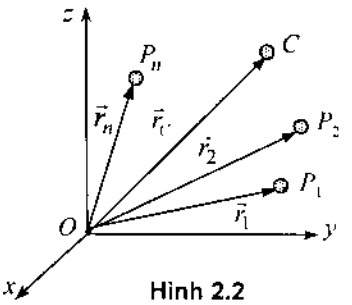
Mặt khác, có thể giả thiết thay thế một hệ lực phân bố bằng một lực và một ngẫu lực. Do đó có thể xem có một hệ lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) tác dụng lên vật rắn B.

1.4. Khối tâm của cơ hệ

a) Khối tâm của hệ n chất điểm

Định nghĩa 1.4. Khối tâm của hệ n chất điểm là một điểm hình học C được xác định bởi công thức sau

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \tag{1.5}$$



Hình 2.2

Trong đó m_i là khối lượng chất điểm thứ i, $\vec{r}_i$ là véctơ định vị của nó, còn $m = \sum m_i$ là khối lượng của tất cả các chất điểm của cơ hệ.

Chiếu công thức (1.5) lên các trục toạ độ x , y và z tính được

$$x_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,, \quad y_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i\,, \quad z_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{1.6}$$

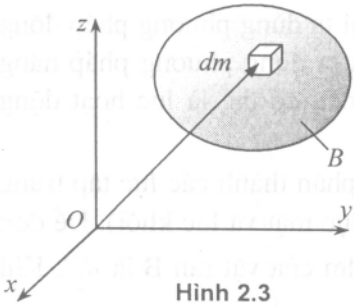
b) Khối tâm của vật rắn

Định nghĩa 1.5. Khối tâm của vật rắn B là một điểm hình học C được xác định bởi công thức

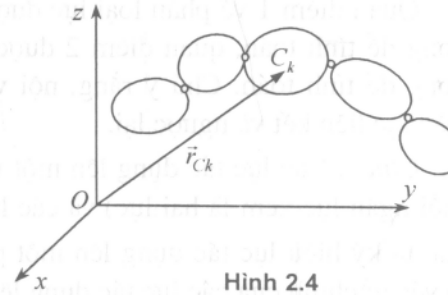
$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_B \vec{r}dm \tag{1.7}$$

Trong đó m là khối lượng của vật rắn. Từ công thức (1.7) suy ra

$$x_C = \frac{1}{m}\int_B xdm\,, \quad y_C = \frac{1}{m}\int_B ydm\,, \quad z_C = \frac{1}{m}\int_B zdm \tag{1.8}$$



Hình 2.3



Hình 2.4

c) Khối tâm của cơ hệ

Định nghĩa 1.6. Khối tâm của cơ hệ gồm n chất điểm và p vật rắn là một điểm hình học C được xác định bởi công thức sau

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i + \sum_{k=1}^{p} m_k\vec{r}_{Ck}\right) \tag{1.9}$$

Trong đó m_i là khối lượng chất điểm thứ i, m_k là khối lượng vật rắn thứ k, $\vec{r}_i$ là véctơ xác định vị trí của chất điểm thứ i, $\vec{r}_{Ck}$ là véctơ xác định vị trí khối tâm C_k của vật rắn thứ k, $m = \sum m_i + \sum m_k$ là khối lượng toàn cơ hệ.

Từ (1.9) suy ra

$$x_C = \frac{1}{m}(\sum m_i x_i + \sum m_k x_{Ck})\,, \quad y_C = \frac{1}{m}(\sum m_i y_i + \sum m_k y_{Ck})\,,$$

$$z_C = \frac{1}{m}(\sum m_i z_i + \sum m_k z_{Ck})\,. \tag{1.10}$$

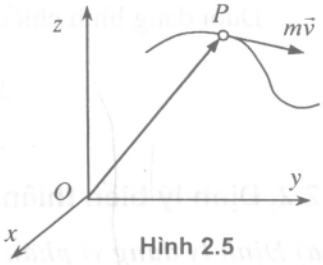
2. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG

2.1. Các khái niệm cơ bản

a) Động lượng của chất điểm

Định nghĩa 2.1. Động lượng của chất điểm là một đại lượng véctơ, ký hiệu là $\vec{p}$, bằng tích khối lượng chất điểm với vận tốc của nó

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.1}$$

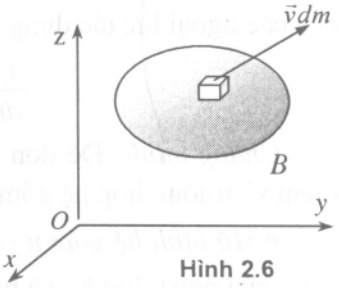


Hình 2.5

b) Động lượng của vật rắn

Định nghĩa 2.2. Động lượng một phân tố nhỏ của vật rắn là $\vec{v}\,dm$. Động lượng của vật rắn B là một đại lượng véctơ được xác định bởi công thức

$$\vec{p} = \int_B \vec{v}dm \tag{2.2}$$



Hình 2.6

Theo định nghĩa khối tâm vật rắn (1.7), suy ra biểu thức động lượng vật rắn

$$\vec{p} = m\vec{v}_C \tag{2.3}$$

Trong đó, m là khối lượng, $\vec{v}_C$ là vận tốc khối tâm vật rắn.

c) Động lượng của cơ hệ

Định nghĩa 2.3. Động lượng của cơ hệ (gồm n chất điểm và p vật rắn) là tổng các động lượng của các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i + \sum_{k=1}^{p} m_k\vec{v}_{Ck} \tag{2.4}$$

Trong đó, m_i là khối lượng chất điểm thứ i, m_k là khối lượng vật rắn thứ k, n là số chất điểm, p là số vật rắn.

Chú ý đến công thức (1.9) về định nghĩa khối tâm cơ hệ suy ra

$$\vec{p} = m\vec{v}_C \tag{2.5}$$

Trong đó, m là khối lượng của toàn hệ, $m = \sum m_i + \sum m_k$, còn $\vec{v}_C$ là vận tốc khối tâm cơ hệ.

d) Xung lực

Để đánh giá tác dụng của lực trong khoảng thời gian hữu hạn từ t_1 đến t_2, đưa vào khái niệm xung lực được định nghĩa bởi công thức sau

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \tag{2.6}$$

Dưới dạng hình chiếu ta có

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt,\ S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt,\ S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt\ .$$

2.2. Định lý biến thiên động lượng

a) Định lý dạng vi phân

Định lý 2.1. Đạo hàm theo thời gian động lượng của cơ hệ bằng véctơ chính của các ngoại lực tác dụng lên các chất điểm và các vật rắn thuộc hệ

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_k^{\,e} = \vec{R}_e' \tag{2.7}$$

Chứng minh: Để đơn giản, ta chứng minh cho trường hợp hệ gồm n chất điểm và trường hợp hệ gồm một vật rắn.

• *Mô hình hệ gồm n chất điểm.* Đối với chất điểm thứ k thuộc hệ, chịu tác dụng của ngoại lực $\vec{F}_k^e$ và nội lực $\vec{F}_k^i$, theo tiên đề Newton 2 ta có

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d(m_k\vec{v}_k)}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$$

Lấy tổng hai vế theo k và chú ý rằng véctơ chính của hệ nội lực bằng không, suy ra

$$\sum \frac{d}{dt}(m_k\vec{v}_k) = \frac{d}{dt}\sum m_k\vec{v}_k = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e = \vec{R}_e'$$

• *Mô hình vật rắn.* Ký hiệu lực tác dụng lên phần tử nhỏ có khối lượng dm của vật rắn B là $d\vec{F}$. Theo tiên đề Newton 2 ta có hệ thức

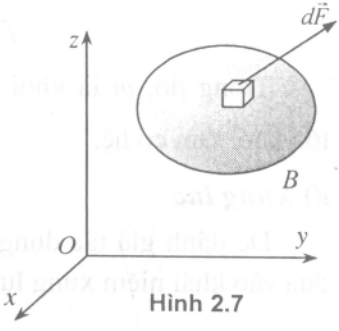
$$\frac{d(\vec{v}dm)}{dt} = d\vec{F} = d\vec{F}^e + d\vec{F}^i$$

Tích phân trên toàn vật rắn

$$\int_B \frac{d(\vec{v}dm)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_B \vec{v}dm = \frac{d\vec{p}}{dt} = \int_B d\vec{F}^e + \int_B d\vec{F}^i$$

Do $\int_B d\vec{F}^i = 0$ nên từ công thức trên suy ra

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_B d\vec{F}^e = \sum \vec{F}_k^e = \vec{R}_e'$$



Hình 2.7

Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh định lý trên cho trường hợp hệ nhiều vật rắn.

Hệ quả. Từ phương trình (2.7) suy ra ba phương trình trên ba trục toạ độ

$$\frac{dp_x}{dt} = \sum \vec{F}_{kx}^e, \quad \frac{dp_y}{dt} = \sum \vec{F}_{ky}^e, \quad \frac{dp_z}{dt} = \sum \vec{F}_{kz}^e \tag{2.8}$$

b) Định lý dạng hữu hạn

Định lý 2.2. Biến thiên động lượng của cơ hệ trong khoảng thời gian hữu hạn bằng tổng các xung lực ngoài tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian đó

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \sum \vec{S}_k^e. \tag{2.9}$$

Chứng minh. Từ công thức (2.7) suy ra

$$d\vec{p} = \sum \vec{F}_k^e dt \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e dt$$

Nếu sử dụng khái niệm xung lực $\vec{S}_k^e = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e dt$, thì biểu thức trên có dạng

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \sum \vec{S}_k^e$$

2.3. Định lý chuyển động khối tâm của cơ hệ

a) Định lý 2.3. Khối tâm của cơ hệ chuyển động như là một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng cả hệ và chịu tác dụng của một lực bằng véctơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e. \tag{2.10}$$

Chứng minh. Theo định lý biến thiên động lượng (2.7), ta có

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e = \vec{R}_e'$$

Thế biểu thức $\vec{p} = m\vec{v}_C$ vào phương trình trên suy ra

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$$

b) Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn chuyển động tịnh tiến

Từ công thức (2.10) suy ra phương trình vi phân chuyển động của vật rắn chuyển động tịnh tiến

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e \tag{2.11}$$

Trong đó, m là khối lượng vật rắn, x_C, y_C, z_C là toạ độ khối tâm của vật rắn.

2.4. Định lý bảo toàn động lượng của cơ hệ

Từ các công thức (2.7) và (2.8) suy ra

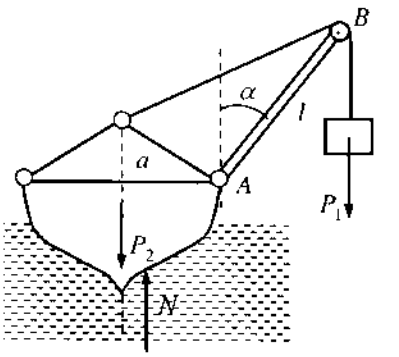
Khi $$\sum \vec{F}_k^e = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v}_C = \text{const} \qquad (2.12)$$

Khi $$\sum F_{kx}^e = 0 \Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow p_x = m\dot{x}_C = \text{const} \qquad (2.13)$$

Các công thức (2.12) và (2.13) được gọi là định lý bảo toàn động lượng (hoặc định lý bảo toàn chuyển động khối tâm).

2.5. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.1. Cho mô hình cơ học của con tầu mang cần cẩu như hình 2.8. Cho biết khối lượng của con tầu và cần cẩu là $m_2 = 20.000\ kg$, khối lượng của vật nặng là $m_1 = 2.000\ kg$. Thanh AB dài $l = 8m$, lúc đầu ở vị trí nghiêng với phương thẳng đứng một góc $\alpha_0 = 30^0$. Bỏ qua trọng lượng thanh AB và sức cản của nước. Xác định di chuyển ngang của con tàu khi thanh AB quay quanh điểm A một góc 30^0 đến vị trí thẳng đứng.



Hình 2.8

Lời giải. Hệ khảo sát gồm con tàu cần cẩu và vật nặng. Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm có trọng lượng $\vec{P}_1$ (vật nặng), $\vec{P}_2$ (con tàu) và phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ (Lực đẩy Acsimet). Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đều song song với trục y thẳng đứng. Theo định lý bảo toàn khối tâm ta có

$$\sum F_{kx}^{(e)} = 0 \Rightarrow m\dot{x}_C = m\dot{x}_C(0) = \text{const} \qquad (1)$$

Lúc đầu con tầu đứng yên $m\dot{x}_C(0) = 0$ nên từ (1) suy ra

$$m\dot{x}_C(0) = 0 \Rightarrow mx_C = m_1x_1 + m_2x_2 = m_1x_1(0) + m_2x_2(0) \quad (2)$$

Trong đó, x_1 là toạ độ của vật nặng P_1, còn x_2 là toạ độ của tàu P_2 theo phương ngang.

Dễ dàng xác định được các toạ độ này ở thời điểm ban đầu $t = 0$ và ở thời điểm thanh AB ở vị trí thẳng đứng $t = t_1$.

$$\begin{aligned} &x_2(0) = 0, \quad x_1(0) = a + l\sin\alpha \\ &x_2(t_1) = s, \quad x_1(t_1) = a + s \end{aligned} \qquad (3)$$

Trong đó s là toạ độ dịch chuyển con tàu theo phương x.

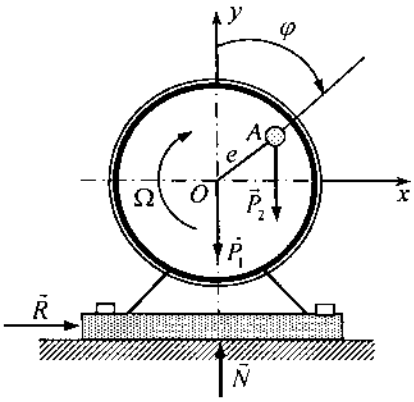
Thế (3) vào (2) ta được

$$m_1(a+s)+m_2 s = m_1(a+l\sin\alpha)+m_2.0 \qquad (4)$$

Từ (4) suy ra

$$s=\frac{m_1 l\sin\alpha}{m_1+m_2}=\frac{4}{11}=0,36m$$

Thí dụ 2.2. Một động cơ được giữ cố định trên sàn bằng bulông. Phần cố định của động cơ có trọng lượng P_1, phần quay có trọng lượng P_2. Trọng tâm của phần quay cách trục quay một đoạn $OA = e$. Cho biết động cơ quay đều với vận tốc góc $\Omega = const$. Tìm phản lực của nền tác dụng lên động cơ và tổng các lực cắt ngang bulông.



Hình 2.9

Lời giải. Khảo sát chuyển động của động cơ gồm phần rôto quay và phần vỏ đứng yên. Các ngoại lực tác dụng lên động cơ gồm các trọng lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, phản lực $\vec{N}$ của nền và tổng các lực cắt ngang bulông $\vec{R}$. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có

$$m\vec{a}_C = \vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{N}+\vec{R} \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$N = P_1+P_2+m_1\ddot{y}_O+m_2\ddot{y}_A \qquad (2)$$

Do $y_A = y_O + e\cos\varphi$; $y_O = 0$; nên $\ddot{y}_A = -e\dot{\varphi}^2\cos\varphi = -e\Omega^2\cos\Omega t$

Thế biểu thức trên vào (2) ta được

$$N = P_1+P_2-\frac{P_2}{g}e\Omega^2\cos\Omega t \qquad (3)$$

Do trục y thẳng đứng và đi qua tâm O của vỏ máy, từ (1) ta có

$$R=\frac{P_2}{g}\ddot{x}_A \qquad (4)$$

Từ hình vẽ

$$x_A = e\sin\Omega t \Rightarrow \quad m_2\ddot{x}_A = -\frac{P_2 e\Omega^2}{g}\sin\Omega t \qquad (5)$$

Thế (5) vào (4) xác định được

$$R = -\frac{P_2 e\Omega^2}{g}\sin\Omega t \qquad (6)$$

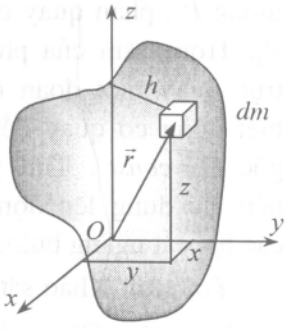
3. MÔMEN QUÁN TÍNH KHỐI CỦA VẬT RẮN

3.1. Mômen quán tính khối của vật rắn đối với một trục và đối với một điểm

a) Mômen quá tính khối của vật rắn đối với một trục

Định nghĩa 3.1. Mômen quán tính khối của vật rắn đối với trục z (ký hiệu là J_z hoặc J_{zz}) được định nghĩa bởi công thức

$$J_z = J_{zz} = \int_B h^2 dm \qquad (3.1)$$



Hình 2.10

Trong đó h là khoảng cách từ phân tố dm đến trục z. Do h^2, dm đều là các số dương nên $J_z > 0$. Đơn vị của J_z là kgm^2 hoặc $kgcm^2$.

Từ hình vẽ (2.10) ta có $h^2 = x^2 + y^2$. Từ đó suy ra

$$J_z = J_{zz} = \int_B \left(x^2 + y^2\right) dm \qquad (3.2)$$

Bằng cách tương tự, ta có các công thức định nghĩa mômen quán tính khối của vật rắn đối vối trục x và trục y

$$J_x = J_{xx} = \int_B (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = J_{yy} = \int_B (x^2 + z^2) dm \qquad (3.3)$$

b) Mômen quán tính khối của vật rắn đối với một điểm

Định nghĩa 3.2. Mômen quán tính khối của vật rắn đối với một điểm O (ký hiệu là J_O) được định nghĩa bởi công thức

$$J_O = \int_B r^2 dm = \int_B (x^2 + y^2 + z^2) dm \qquad (3.4)$$

Trong đó, r là khoảng cách từ phân tố dm đến điểm O.

Do $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}\left(y^2 + z^2\right) + \frac{1}{2}\left(z^2 + x^2\right)$

nên từ (3.2), (3.3), (3.4) suy ra công thức liên hệ

$$J_0 = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) \qquad (3.5)$$

c) Bán kính quán tính

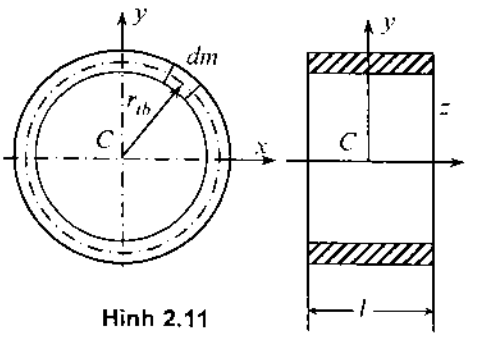
Định nghĩa 3.3. Trong kỹ thuật người ta hay sử dụng khái niệm bán kính quán tính của vật rắn đối với trục z, ký hiệu là ρ_z được định nghĩa bởi công thức sau

$$\rho_z^2 = J_z / m \tag{3.6}$$

Trong đó, m là khối lượng vật rắn, J_z là mômen quán tính khối của vật rắn đối với trục z.

d) Các thí dụ về tính mômen quán tính khối của vật rắn

Thí dụ 2.3. Xác định mômen quán tính khối của ống trụ tròn thành mỏng đối với trục z đi qua khối tâm và song song với ống (hình 2.11).



Hình 2.11

Lời giải. Giả sử bề dày của thành ống s khá nhỏ so với bán kính trung bình của ống r_{tb}. Theo định nghĩa (3.1) ta có

$$J_z = \int r^2 dm \approx r_{tb}^2 \int dm = r_{tb}^2 m \tag{3.7}$$

Thí dụ 2.4. Xác định mômen quán tính khối của ống trụ tròn thành dày và của trụ tròn đặc đối với trục z đi qua khối tâm và song song với ống. Cho biết khối lượng của ống là m chiều dài ống là l.

Lời giải. Khi chiều dày của thành ống khá lớn, không áp dụng công thức (3.7) ở trên được. Giả sử chia bề dày của ống thành các thành nhiều vành tròn (hình 2.12). Ký hiệu bề dày của mỗi vành tròn là dr. Gọi ρ là mật độ khối, dễ dàng tính được

$$dm = \rho dv = \rho 2\pi r l dr$$

Sử dụng công thức (3.1) ta có

$$J_z = \int_{r_1}^{r_2} r^2 dm = \rho 2\pi l \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \rho \frac{2\pi l}{4}(r_2^4 - r_1^4)$$

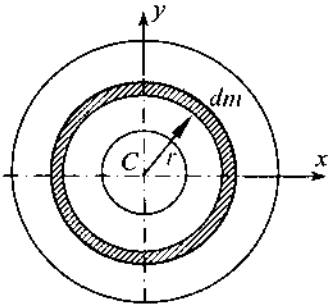
$$= \rho\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) l \left[\frac{r_2^2 + r_1^2}{2}\right] = m\frac{r_2^2 + r_1^2}{2} \tag{3.8}$$

Trong công thức trên, r_1 là bán kính trong, r_2 là bán kính ngoài của ống trụ thành dày. Khối lượng của ống trụ được tính theo công thức

$$m = \rho\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)l$$

Khi chọn $r_1 = 0$, $r_2 = r$, từ công thức (3.8) suy ra biểu thức tính mômen quán tính khối của trụ tròn đặc đối với trục z đi qua khối tâm của hình trụ và song song với mặt bên của ống

$$J_z = \frac{1}{2}m.r^2 \qquad (3.9)$$



Hình 2.12

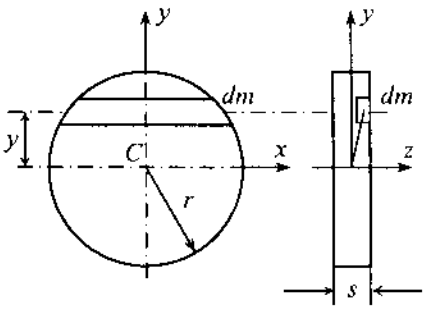
Thí dụ 2.5. Xác định mômen quán tính khối của đĩa tròn mỏng đối với trục x nằm trong mặt phẳng đĩa và đi qua khối tâm của đĩa (hình 2.13).

Lời giải. Do bề dày s của đĩa nhỏ so với bán kính r của đĩa, khoảng cách từ trục x đến một phần tử khối lượng dm xấp xỉ bằng y ($z << y \Rightarrow y^2 + z^2 \approx y^2$). Do đó

$$J_x = \int(y^2 + z^2)dm \approx \int y^2 dm$$

Do tính đối xứng của đĩa tròn nên

$$J_x = J_y \approx \int x^2 dm$$



Hình 2.13

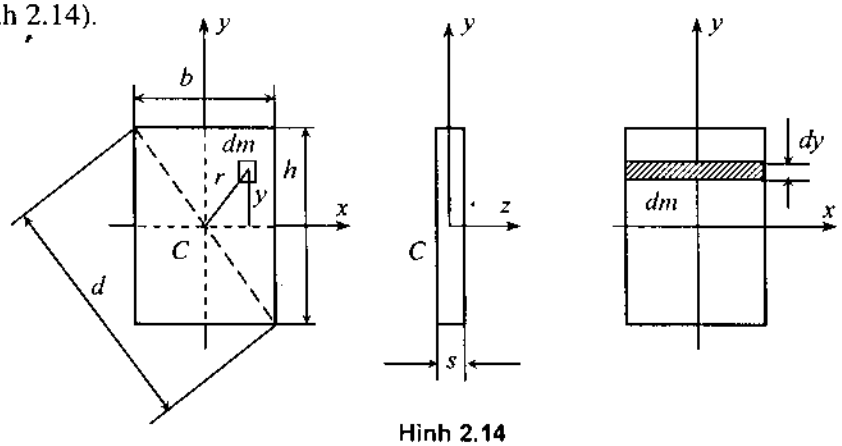
Tổng của hai tích phân trên ta được

$$J_x + J_y = 2J_x = 2J_y \approx \int(x^2 + y^2)dm = \int r^2 dm = J_z$$

Chú ý đến công thức (3.9) ta có

$$J_x = J_y \approx \frac{1}{2}J_Z = \frac{mr^2}{4} \qquad (3.10)$$

Thí dụ 2.6. Xác định mômen quán tính khối của tấm mỏng hình chữ nhật (hình 2.14).



Hình 2.14

Lời giải. Đối với trục z ta có

$$J_z = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

Khi tấm đủ mỏng, sử dụng công thức gần đúng.

$$J_x \approx \int y^2 dm \ , \ J_y \approx \int x^2 dm$$

Để tính J_x giả sử chia hình chữ nhật thành các dm nhỏ như hình 2.14. Gọi s là chiều dày của tấm, ρ là mật độ khối, ta có

$$dm = \rho \, dV = \rho sbdy$$

$$J_x \approx \rho sb \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \rho sb \frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \rho sbh \frac{h^2}{12} = m\frac{h^2}{12} \qquad (3.11)$$

Tính toán tương tự

$$J_y \approx m\frac{b^2}{12}. \qquad (3.12)$$

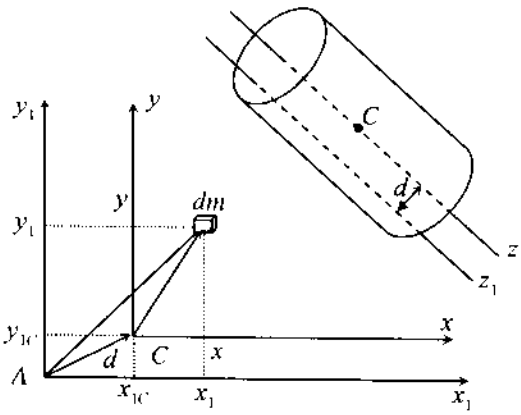
Từ đó suy ra

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = m\frac{h^2}{12} + m\frac{b^2}{12} = \frac{m}{12}(h^2 + b^2) = m\frac{d^2}{12}$$

với $\qquad d^2 = h^2 + b^2$.

3.2. Công thức tính mômen quán tính khối của vật rắn đối với các trục song song

Định lý Steiner (1)*. Mômen quán tính khối của vật rắn đối với trục z_1 bằng mômen quán tính khối của vật rắn đó lấy với trục z đi qua khối tâm, song song với trục z_1 và tích khối lượng của vật rắn với bình phương khoảng cách giữa hai trục



Hình 2.15

* Jakob Steiner (1796 – 1863) nhà toán học Thuỵ Sĩ.

$$J_{dz_1} = J_{Cz} + md^2 \qquad (3.13)$$

Chứng minh. Từ hình (2.15) suy ra

$$x_1 = x_{1C} + x, \quad y_1 = y_{1C} + y,$$

$$J_{z1} = \int_B (x_1^2 + y_1^2)dm = \int_B [(x_{1C} + x)^2 + (y_{1C} + y)^2]dm$$

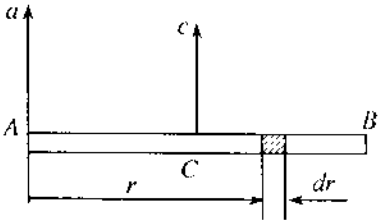
$$= \int_B (x^2 + y^2)dm + (x_{1C}^2 + y_{1C}^2)m + 2x_{1C}\int_B xdm + 2y_{1C}\int_B ydm$$

Do $\int xdm = x_C m = 0$, $\int ydm = y_C m = 0$, nên ta có $J_{z1} = J_{Cz} + md^2$.

Thí dụ 2.7. Xác định mômen quán tính khối của thanh mảnh đồng chất đối với trục vuông góc với thanh. Giả thiết thanh dài là l, khối lượng m.

Lời giải. Trước hết tính mômen quán tính đối với trục đi qua điểm A đầu thanh (hình 2.16)

$$J_a = \int r^2 dm = \frac{m}{l}\int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3}ml^2 \qquad (3.14)$$



Hình 2.16

Áp dụng định lý Steiner ta có

$$J_c = J_a - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2 - \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{12}ml^2 \qquad (3.15)$$

Thí dụ 2.8. Xác định mômen quán tính khối của hình trụ tròn khối lượng m, dài l, bán kính r đối với trục x trong mặt phẳng vuông góc với hình trụ và đi qua khối tâm C của nó (hình 2.17).

Lời giải. Ta chia hình trụ tròn thành các đĩa tròn dày dz, khối lượng $dm = \rho\pi r^2 dz = (m/l)dz$. Mômen quán tính khối của đĩa tròn mỏng đối với trục ξ // trục x được xác định bởi công thức (3.10). Sau đó áp dụng định lý Steiner

$$dJ_x = \frac{r^2 dm}{4} + z^2 dm = \frac{m}{l}\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right)dz$$

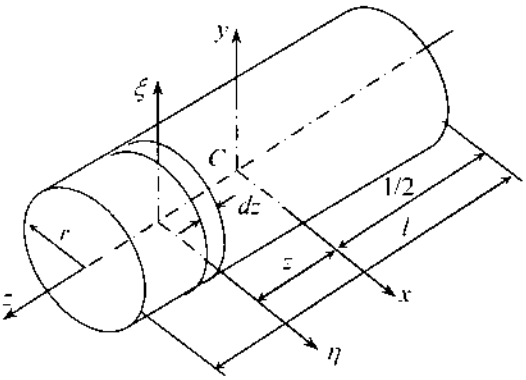
Tích phân lên ta được

$$J_x = \int dJ_x = \frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\left(\frac{r^2}{4} + z^2\right)dz = \frac{m}{l}\left[\frac{r^2}{4}z + \frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)$$

Do tính đối xứng nên

$$J_y = J_x = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right) \tag{3.16}$$

Thí dụ 2.9. Xác định mômen quán tính đối với trục quay z của một bánh xe nan hoa bằng gang đúc (hình 2.18). Cho mật độ khối $\rho = 7,2kg/dm^3$, các kích thước cho trên hình vẽ.

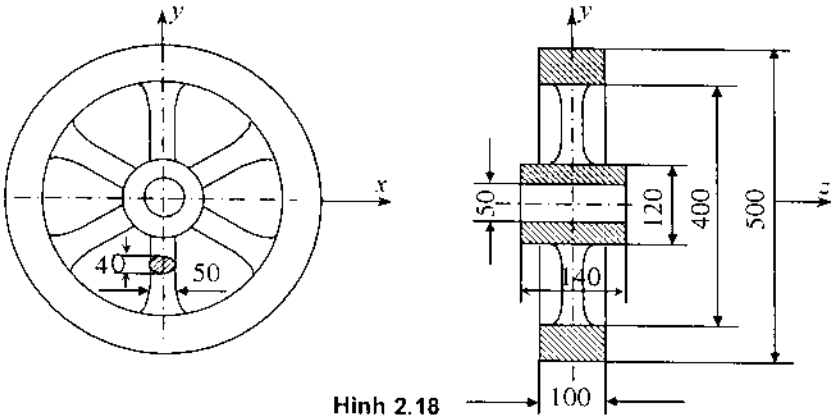


Hình 2.17

Lời giải. Trước hết ta xác định khối lượng các bộ phận của bánh xe. Từ hình vẽ (2.18) ta tính được khối lượng của các bộ phận như sau.

Khối lượng của vành xe

$$m_v = \frac{\pi}{4}(5^2 - 4^2)dm^2.1dm.7,2\frac{kg}{dm^3} = 50,9\ kg$$



Hình 2.18

Khối lượng của mỗi nan hoa

$$m_n = \frac{0.5dm\ .\ 0.4\text{dm}.\pi}{4}.1,4dm.7,2\frac{kg}{dm^3} = 1,583\ \ kg\,.$$

Khối lượng của moay ơ

$$m_m = \frac{\pi}{4}(1,2^2 - 0,5^2)dm^2.1,4dm.7,2\frac{kg}{dm^3} = 9,42 \text{ kg}.$$

Khối lượng của toàn bánh xe

$$m = m_v + 6m_n + m_m = 69,8 \ kg.$$

Bây giờ, xác định mômen quán tính khối của từng bộ phận bánh xe đối với trục như sau.

Mômen quán tính khối của vành bánh xe đối với trục z theo (3.7) ta có

$$J_v = m_v\frac{r_2^2 + r_1^2}{2} = \frac{50,9kg}{2}(25^2 + 20^2)cm^2 = 26100 \text{ kgcm}^2$$

Mômen quán tính khối của từng nan hoa đối với trục z (áp dụng công thức (3.15) và định lý Steiner)

$$J_n = m_n\frac{l^2}{12} + m_n r_n^2 = 1,583kg\left(\frac{14^2}{12} + 13^2\right)cm^2 = 290 \text{ kgcm}^2.$$

Mômen quán tính khối của moay ơ đối với trục z theo công thức (3.7)

$$J_m = m_n\frac{r_2^2 + r_1^2}{2} = \frac{9,42kg}{2}(6^2 + 2,5^2)cm^2 = 200kgcm^2.$$

Từ đó tính được mômen quán tính khối của toàn bánh xe đối với trục z

$$J_z = J_v + 6.J_n + J_m = (26100 + 1740 + 200)\ kgcm^2 = 2,804\ kgm^2$$

Chú ý: Moay ơ chiếm 13.5% khối lượng bánh xe, có gần 0,7% mômen quán tính khối, 6 nan hoa chiếm 13,6% khối lượng và có gần 6,3% mômen quán tính khối. Vành xe chiếm 73% khối lượng và có gần 93% mômen quán tính khối.

3.3. Các mômen tích quán tính, trục quán tính chính, mômen quán tính chính

a) Các mômen tích quán tính của vật rắn

Định nghĩa 3.4. Các mômen tích quán tính của vật rắn là các đại lượng được định nghĩa bởi các công thức sau

$$J_{xy} = \int_B xydm,\ J_{yz} = \int_B yzdm,\ J_{zx} = \int_B zxdm \qquad (3.17)$$

Theo định nghĩa (3.17) các mômen tích quán tính của vật rắn có tính chất đối xứng

$$J_{xy} = J_{yx},\ J_{yz} = J_{zy},\ J_{zx} = J_{xz} \qquad (3.18)$$

Thí dụ 2.10. Thanh mảnh đồng chất dài $l = 40cm$, khối lượng $m = 2,2kg$, nghiêng với trục quay z một góc $\gamma = 10^0$. Hãy xác định mômen tích quán tính J_{yz} của thanh (hình 2.19).

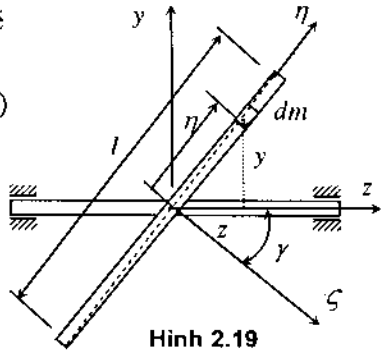
Lời giải. Chọn các hệ toạ độ như hình vẽ (2.19) ta có

$$z = \eta \sin\gamma \,,\; y = \eta \cos\gamma \qquad (1)$$

Thế (1) vào công thức (3.17) ta được

$$J_{yz} = \int yzdm = \sin\gamma\cos\gamma\frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2}\eta^2 d\eta$$

$$= \sin\gamma\cos\gamma\frac{ml^2}{12} = \frac{ml^2}{24}\sin 2\gamma$$



Hình 2.19

Thay số vào biểu thức trên suy ra

$$J_{yz} = \frac{2,2kg(40cm^2)}{24}\sin 20^0 = 50,2kgcm^2$$

b) Trục quán tính chính và mômen quán tính chính

Định nghĩa 3.5. Trục Oz được gọi là trục quán tính chính của vật rắn tại điểm O, nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$J_{yz} = J_{xz} = 0.$$

Mômen quán tính khối của vật rắn đối với trục quán tính chính được gọi là mômen quán tính chính.

Định lý về sự tồn tại ba trục quán tính chính: Tại mỗi điểm của vật rắn luôn tồn tại ba trục quán tính chính vuông góc với nhau.

Ta công nhận không chứng minh định lý này. Chú ý rằng, người ta hay dùng ký hiệu *1, 2* và *3* (hoặc I, II, III) để chỉ các trục quán tính chính. Khi đó các mômen quán tính chính ký hiệu là J_1, J_2 và J_3 (hoặc J_I, J_{II}, J_{III}).

c) Các trục quán tính chính trung tâm

Định nghĩa 3.6. Các trục quán tính chính tại khối tâm của vật rắn được gọi là các trục quán tính chính trung tâm. Các mômen quán tính của vật rắn đối với các trục quán tính chính trung tâm được gọi là các mômen quán tính chính trung tâm.

d) Định lý Steiner (II). Các mômen tích quán tính của vật rắn đối với hai hệ toạ độ song song có liên hệ sau

$$J_{xy} = J_{\xi\eta} + m x_C . y_C \qquad (3.19)$$

Trong đó hệ toạ độ $\xi\eta\varsigma$ gắn ở khối tâm C của vật rắn, còn hệ toạ độ xyz có các trục tương ứng song song với các trục của hệ toạ độ $\xi\eta\varsigma$.

Chứng minh. Theo định nghĩa ta có

$$J_{xy} = \int xydm = \int (x_C + \xi)(y_C + \eta)dm$$

$$= x_C y_C \int dm + \int \xi\eta dm + x_C \int \eta dm + y_C \int \xi dm$$

Do $\int \eta dm = m\eta_C = 0$, $\int \xi dm = m\xi_C = 0$, nên

$$J_{xy} = J_{\xi\eta} + m x_C y_C$$

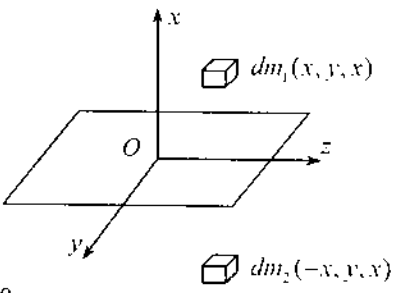
Chứng minh tương tự suy ra

$$J_{yz} = J_{\eta\xi} + m y_C z_C$$
$$J_{xz} = J_{\xi\varsigma} + m x_C z_C \qquad (3.20)$$

e) Xác định các trục quán tính chính của vật rắn đồng chất đối xứng

Định lý 3.1. Trục vuông góc với mặt phẳng đối xứng của vật rắn đồng chất là trục quán tính chính tại giao điểm của trục và mặt phẳng đối xứng.

Chứng minh. Gọi yz là mặt phẳng đối xứng của vật rắn B. Dựng Ox vuông góc với mặt phẳng yz. Cần phải chứng minh $J_{xy} = J_{xz} = 0$. Do yz là mặt phẳng đối xứng nên với phân tố dm_1 có toạ độ (x, y, z) ta có phân tố dm_2 có tọa độ $(-x, y, z)$ với $dm_1 = dm_2$.



Hình 2.20

Từ đó suy ra

$$dJ_{xy} = xydm_1 - xydm_2 = 0$$

Vậy $J_{xy} = 0$. Tương tự $J_{xz} = 0$.

Định lý 3.2. Trục đối xứng của vật rắn đồng chất là trục quán tính chính của vật rắn tại mọi điểm trên trục đó.

Chứng minh tương tự như cách chứng minh định lý trên.

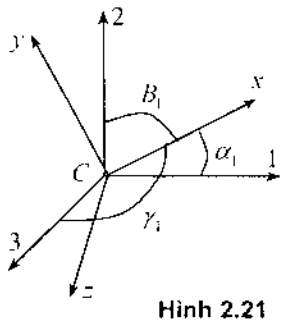
3.4. Công thức tính mômen quán tính khối của vật rắn

a) Định lý 3.3. Mômen quán tính của vật rắn đối với trục x đi qua khối tâm của nó được xác định bởi công thức sau

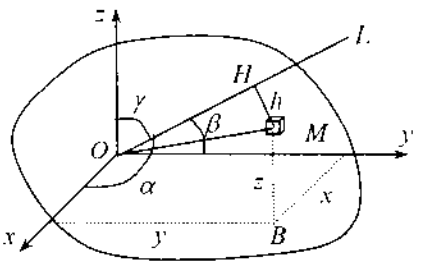
$$J_x = J_1 \cos^2\alpha_1 + J_2 \cos^2\beta_1 + J_3 \cos^2\gamma_1 \qquad (3.21)$$

Trong đó, J_1, J_2, J_3 là các mômen quán tính chính trung tâm, α_1 là góc

giữa trục x và trục quán tính chính trung tâm *1*, β_1 là góc giữa trục x và trục quán tính chính trung tâm 2, γ_1 là góc giữa trục x và trục quán tính chính trung tâm *3* (hình 2.21).



Hình 2.21



Hình 2.22

Chứng minh: Lấy điểm O thuộc vật rắn B làm gốc toạ độ. Dựng hệ toạ độ vuông góc $Oxyz$. Trục L đi qua O. Hướng của trục L được xác định bằng ba góc α, β và γ (hình 2.22). Gọi khoảng cách MH từ phân tố dm bất kỳ thuộc vật rắn đến trục L là h.

Theo định nghĩa ta có

$$J_L = \int_B h^2 dm \qquad (1)$$

Từ hình vẽ thấy rằng

$$h^2 = OM^2 - OH^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

$$= x^2(1-\cos^2\alpha) + y^2(1-\cos^2\beta) + (1-\cos^2\gamma)$$

$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma \qquad (2)$$

Do $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, nên biểu thức (2) có dạng

$$h^2 = x^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) + z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)$$

$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma$$

$$= (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$

$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma \qquad (3)$$

Thế (3) vào (1) ta được

$$J_L = \int_B (y^2 + z^2)dm + \cos^2\beta \int_B (z^2 + x^2)dm + \cos^2\gamma \int_B (x^2 + y^2)dm$$

$$- 2\cos\alpha\cos\beta \int_B xydm - 2\cos\alpha\cos\gamma \int_B xzdm - 2\cos\beta\cos\gamma \int_B yzdm$$

Từ đó suy ra

$$J_L = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$

$$-2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \qquad (3.22)$$

Nếu lấy điểm O là khối tâm C của vật rắn, các trục 1, 2, 3 là các trục quán tính chính trung tâm, còn trục L là trục x bất kỳ đi qua khối tâm C, từ (3.22) suy ra

$$J_x = J_1\cos^2\alpha_1 + J_2\cos^2\beta_1 + J_3\cos^2\gamma_1$$

Chú ý. Công thức (3.22) được dùng để tính mômen quán tính khối của vật rắn đối với một trục L bất kỳ đi qua gốc toạ độ, còn công thức (3.21) được dùng để tính mômen quán tính khối của vật rắn đối với một trục L bất kỳ đi qua khối tâm của vật rắn.

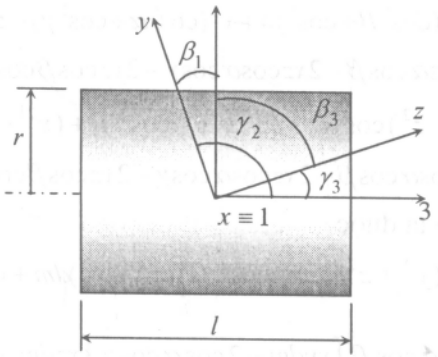
b) Định lý 3.4. Mômen tích quán tính của vật rắn trong hệ tọa độ xyz bất kỳ có gốc ở khối tâm được xác định bởi công thức sau đây

$$J_{xy} = -J_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - J_2\cos\beta_1\cos\beta_2 - J_3\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \qquad (3.23)$$

Trong đó, J_1, J_2, J_3 là các mômen quán tính chính trung tâm, α_1, β_1, γ_1 là các góc định hướng của trục x đối với hệ các trục quán tính chính 1, 2 và 3 (hình 2.21), còn α_2, β_2, γ_2 và α_3, β_3, γ_3 là góc định hướng của các trục y và z đối với hệ trục quán tính chính kể trên.

Việc chứng minh công thức (3.23) sẽ không trình bày ở đây. Độc giả có thể tự chứng minh dựa trên công thức định nghĩa J_{xy} và các suy luận tương tự khi chứng minh công thức (3.21).

Thí dụ 2.11. Các trục toạ độ y và z của hình trụ tạo thành với trục quán tính chính các góc β_2, γ_2 và β_3, γ_3 (hình 2.23). Hãy xác định J_z và J_{yz}.



Hình 2.23

Lời giải. Từ hình vẽ ta có:

$$\alpha_3 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = \gamma_3, \beta_3 = \frac{\pi}{2} - \gamma_3, \gamma_2 = 90^o + \gamma_3$$

Sử dụng công thức (3.21) suy ra

$$J_z = J_1 \cos^2 \alpha_3 + J_2 \cos^2 \beta_3 + J_3 \cos^2 \gamma_3$$

$$J_z = J_1 \cos^2 \frac{\pi}{2} + J_2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3\right) + J_3 \cos^2 \gamma_3$$

Do $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3\right) = \sin\gamma_3$ nên

$$J_z = J_2 \sin^2 \gamma_3 + J_3 \cos^2 \gamma_3 \qquad (1)$$

Áp dụng công thức (3.23) ta có

$$J_{zy} = -J_1 \cos\alpha_3 \cos\alpha_2 - J_2 \cos\beta_3 \cos\beta_2 - J_3 \cos\gamma_3 \cos\gamma_2$$

$$J_{zy} = -0 - J_2 \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_3)\cos\gamma_3 - J_3 \cos\gamma_3 \cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_3)$$

Do $\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_3) = -\sin\gamma_3$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_3) = \sin\gamma_3$, suy ra

$$J_{zy} = -J_2 \sin\gamma_3 \cos\gamma_3 + J_3 \cos\gamma_3 \sin\gamma_3$$

Vậy $J_{zy} = \frac{J_3 - J_2}{2} \sin 2\gamma_3$. (2)

Đối với hình trụ tròn khối lượng m, bán kính r, dài l, ta có các công thức xác định mômen quán tính khối

$$J_3 = \frac{1}{2} mr^2, \; J_2 = m(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{12}) \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1) tính được

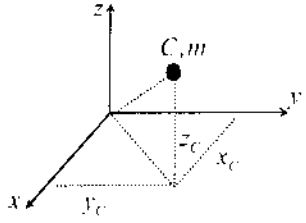
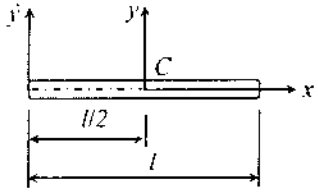
$$J_z = \left(\frac{mr^2}{4} + \frac{ml^2}{12}\right)\sin^2 \gamma_3 + \frac{mr^2}{2}\cos^2 \gamma_3$$

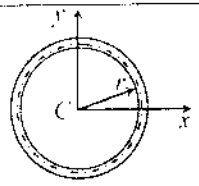
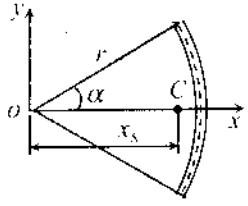
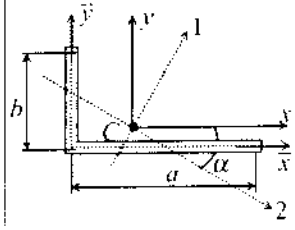
$$= \frac{mr^2}{2}\left(\cos^2 \gamma_3 + \sin^2 \gamma_3\right) - \left(\frac{mr^2}{4} - \frac{ml^2}{12}\right)\sin^2 \gamma_3 = \frac{mr^2}{2} - \left(\frac{mr^2}{4} - \frac{ml^2}{12}\right)\sin^2 \gamma_3 \quad (4)$$

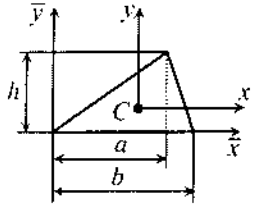
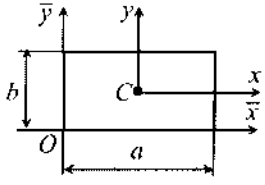
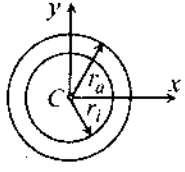
Thế (1) vào (2) suy ra

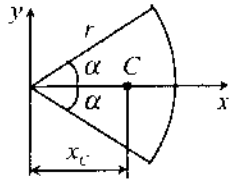
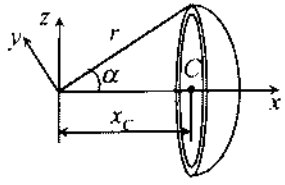
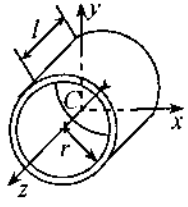
$$J_{zy} = \frac{1}{2}(\frac{mr^2}{2} - \frac{mr^2}{4} - \frac{ml^2}{12})\sin 2\gamma_3 = \frac{m}{8}\left(r^2 - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\gamma_3. \qquad (5)$$

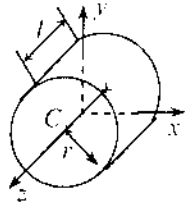
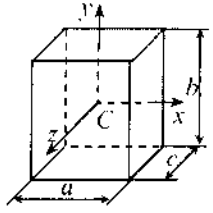
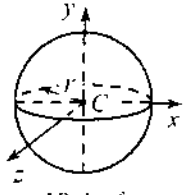
Bảng mômen quán tính khối của vật rắn

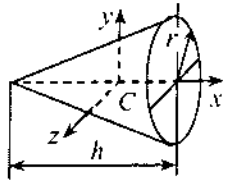
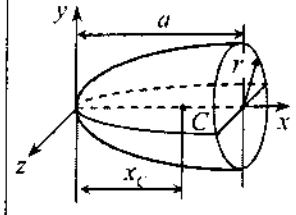
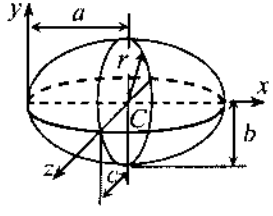
Các vật thể dạng điểm và đường. Khối lượng trên một đơn vị dài $\mu_1 = (m/l)[kg/m]$			
Hình vẽ	**Khối lượng, trọng tâm**	**Mômen quán tính**	**Mômen tích quán tính**
 Chất điểm	m $x_C = x$ $y_C = y$ $z_C = z$	$J_{xx} = m(y^2 + z^2)$ $J_{yy} = m(z^2 + x^2)$ $J_{zz} = m(x^2 + y^2)$	$J_{xy} = mxy$ $J_{yz} = myz$ $J_{zx} = mzx$
 Thanh mỏng	$m = \rho A l = \mu_1 l$	$J_{xx} = 0$ $J_{yy} = J_{zz} = \frac{1}{12} m l^2$ $J_{\xi\xi} = J_{\eta\eta} = \frac{1}{3} m l^2$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$

 Vành tròn	$m = \mu_l 2\pi r$	$J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $J_{zz} = mr^2$	$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$
 Cung tròn	$m = \mu_l 2\alpha r$ $x_C = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$	$J_{xx} = \frac{1}{2}mr^2\left[1 - \cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$ $J_{yy} = \frac{1}{2}mr^2\left[1 + \cos\alpha\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$ $J_{zz} = mr^2$	$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$
 Hình thước thợ	$m = \mu_l(a+b)$ $\bar{x}_C = \frac{a^2}{2(a+b)}$ $\bar{y}_C = \frac{b^2}{2(a+b)}$	$J_{xx} = \frac{m}{12}b^3\frac{4a+b}{(a+b)^2}$ $J_{yy} = \frac{m}{12}a^3\frac{a+4b}{(a+b)^2}$ $J_{zz} = \frac{m}{12}\frac{a^4+4a^3b+4ab^3+b^4}{(a+b)^2}$	$J_{xy} = m\frac{a^2+b^2}{4(a+b)^2}$ $J_{xz} = m\frac{a^2+b^2}{4(a+b)^2}$ Các trục chính 1,2,3

Vật thể dạng tấm và vỏ mỏng. Khối lượng trên một đơn vị diện tích $\mu_A = (m/A)[kg/m^2]$			
Hình vẽ	**Khối lượng, trọng tâm**	**Mômen quán tính**	**Mômen tích quán tính**
 Hình tam giác	$m = \mu_A \frac{1}{2} bh$ $\bar{x}_C = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y}_C = \frac{h}{3}$	$J_{xx} = \frac{1}{18} mh^2$ $J_{yy} = \frac{1}{18} m(a^2 + b^2 - ab)$ $J_{zz} = J_{xx} + J_{yy}$	$J_{xy} = \frac{1}{36} mh(2a - b)$ $J_{yz} = J_{zx} = 0$
 Hình chữ nhật	$m = \mu_A ab$	$J_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{1}{12} mb^2$; $J_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{1}{12} ma^2$ $J_{zz} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ $J_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$	$J_{\bar{x}\bar{y}} = J_{\bar{y}\bar{z}} = J_{\bar{z}\bar{x}} = 0$ (Các trục chính) $J_{xy} = -\frac{1}{4} mab$ $J_{\bar{y}\bar{z}} = J_{\bar{z}\bar{x}} = 0$
 Hình vành khăn	$m = \mu_A \pi (r_a^2 - r_i^2)$	$J_{xx} = \frac{1}{4} m(r_a^2 + r_i^2)$ $J_{yy} = \frac{1}{4} m(r_a^2 + r_i^2)$ $J_{zz} = \frac{1}{2} m(r_a^2 + r_i^2)$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$

 Hình quạt	$m = \mu_A \alpha r^2$ $x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$	$J_{xx} = \frac{1}{4} mr^2 \left[1 - \cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$ $J_{yy} = \frac{1}{4} mr^2 \left[1 + \cos\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]$ $J_{zz} = \frac{1}{2} mr^2$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$
 Hình chỏm cầu	$m = \mu_A 2\pi r^2 (1 - \cos\alpha)$ $x_C = \frac{r}{4} \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos\alpha}$	$J_{xx} = \frac{m}{3} r^2 \frac{2 - \cos\alpha(2 + \sin^2\alpha)}{1 - \cos\alpha}$ $J_{yy} = \frac{m}{6} r^2 \frac{4 - \cos\alpha(4 - \sin^2\alpha)}{1 - \cos\alpha}$ $J_{zz} = \frac{m}{6} r^2 \frac{4 - \cos\alpha(4 - \sin^2\alpha)}{1 - \cos\alpha}$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)
 Ống thành mỏng	$m = \mu_A 2\pi r l$	$J_{xx} = \frac{1}{12} m(6r^2 + l^2)$ $J_{yy} = \frac{1}{12} m(6r^2 + l^2)$ $J_{zz} = mr^2$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)

Các vật thể dạng hình khối. Khối lượng trên một đơn vị thể tích $\rho = (m/V)[kg/m^3]$			
Hình vẽ	**Khối lượng, trọng tâm**	**Mômen quán tính**	**Mômen tích quán tính**
 Hình trụ	$m = \rho\pi r^2 l$	$J_{xx} = \frac{1}{12}m(3r^2 + l^2)$ $J_{yy} = J_{xx}$ $J_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)
 Hình hộp	$m = \rho abc$	$J_{xx} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $J_{yy} = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $J_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)
 Hình cầu	$m = \frac{4}{3}\rho\pi r^3$	$J_{xx} = \frac{2}{5}mr^2$ $J_{yy} = J_{zz} = J_{xx}$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)

 Hình nón	$m = \frac{1}{3}\rho\pi r^2 h$ $x_C = \frac{1}{4}h$	$J_{xx} = \frac{3}{10}mr^2$ $J_{yy} = \frac{3}{80}m(4r^2 + h^2)$ $J_{zz} = \frac{3}{80}m(4r^2 + h^2)$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)
 Hình Paraboloit	$m = \frac{1}{2}\rho\pi r^2 a$	$J_{xx} = \frac{1}{3}mr^2$ $J_{yy} = \frac{1}{18}m(3r^2 + a^2)$ $J_{zz} = \frac{1}{18}m(3r^2 + a^2)$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)
 Hình Elipxôit	$m = \frac{4}{3}\rho\pi abc$	$J_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $J_{yy} = \frac{1}{5}m(c^2 + a^2)$ $J_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$	$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ (Các trục chính)

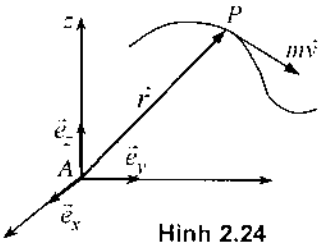
4. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

4.1. Các định nghĩa

a) Mômen động lượng của chất điểm

Định nghĩa 4.1. Mômen động lượng của chất điểm đối với điểm quy chiếu A, ký hiệu là $\vec{l}_A$, là mômen của véctơ động lượng của chất điểm đối với điểm A đó

$$\vec{l}_A = \vec{m}_A(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (4.1)$$



Hình 2.24

Chú ý đến công thức tính tích có hướng của hai véctơ trong toán học ta có

$$\vec{l}_A = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= m(y\dot{z} - z\dot{y})\vec{e}_x + m(z\dot{x} - x\dot{z})\vec{e}_y + m(x\dot{y} - y\dot{x})\vec{e}_z \qquad (4.2)$$

Định nghĩa 4.2. Mômen động lượng của chất điểm đối với trục z là hình chiếu trên trục z của mômen động lượng của chất điểm đối với một điểm A bất kỳ trên trục z, và được xác định bởi công thức

$$l_z = hc_z\vec{m}_A(m\vec{v}) = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \qquad (4.3a)$$

Tương tự ta có mômen động lượng của chất điểm đối với trục x, trục y

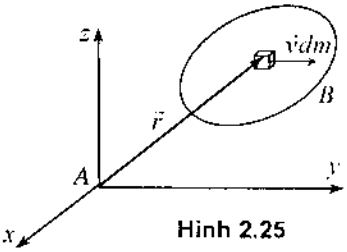
$$l_x = hc_x\vec{m}_A(m\vec{v}) = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \qquad (4.3b)$$

$$l_y = hc_y\vec{m}_A(m\vec{v}) = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \qquad (4.3c)$$

b) Mô men động lượng của vật rắn

Định nghĩa 4.3. Mômen động lượng của vật rắn đối với điểm quy chiếu A (hình 2.25) là một đại lượng véctơ được định nghĩa bởi công thức

$$\vec{l}_A = \int_B (\vec{r} \times \vec{v})dm \qquad (4.4)$$



Hình 2.25

Mômen động lượng của vật rắn đối với điểm A phụ thuộc vào dạng chuyển động của vật rắn.

Vật rắn chuyển động tịnh tiến. Do vận tốc mọi điểm của vật rắn bằng nhau và bằng vận tốc khối tâm C của nó, nên từ (4.4) suy ra

$$\vec{l}_A = \left(\int_B \vec{r}dm\right) \times \vec{v}_C = m\vec{r}_C \times \vec{v}_C = \vec{m}_A(m\vec{v}_C) \qquad (4.5)$$

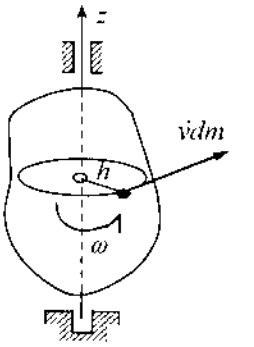
Vật rắn quay quanh một trục cố định. Mômen động lượng của vật rắn quay quanh một trục z cố định đối với trục quay z của vật rắn có dạng

$$l_z = J_z\omega_z \qquad (4.6)$$

Thật vậy, từ hình vẽ 2.26 ta có

$$dl_z = hvdm = \omega_z h^2 dm$$

$$l_z = \omega_z \int_m h^2 dm = J_z\omega_z$$



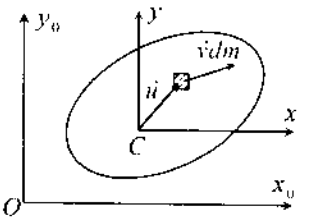
Hình 2.26

Vật rắn chuyển động phẳng. Gọi C là khối tâm của tấm phẳng chuyển động phẳng, trục Cz vuông góc với mặt phẳng của tấm như hình vẽ 2.27. Theo công thức (4.4)

$$\vec{l}_C = \int(\vec{u}\times\vec{v})dm = \int[\vec{u}\times(\vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{u})]dm \qquad (1)$$

Chú ý rằng

$$\vec{u}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}) = u^2\vec{\omega} - (\vec{u}.\vec{\omega})\vec{u} = u^2\vec{\omega} \qquad (2)$$



Hình 2.27

Thế (2) vào (1) ta được

$$\vec{l}_C = (\int u^2 dm)\vec{\omega} = J_{Cz}\vec{\omega} \qquad (4.7a)$$

Chiếu véctơ (4.7a) lên trục Cz vuông góc với mặt phẳng Oxy suy ra

$$l_{Cz} = J_{Cz}\omega_z \qquad (4.7b)$$

c) Mômen động lượng của cơ hệ

Định nghĩa 4.4. Mômen động lượng của cơ hệ (gồm n chất điểm và p vật rắn) đối với điểm quy chiếu A là một đại lượng véctơ bằng tổng các mômen động lượng của các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ lấy đối với điểm A đó.

$$\vec{l}_A = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i + \sum_{k=1}^{p}\int_{B_k}(\vec{r}\times\vec{v})dm \qquad (4.8)$$

Định nghĩa 4.5. Mômen động lượng của cơ hệ đối với một trục z là hình chiếu trên trục z của mômen động lượng của cơ hệ lấy đối với một điểm A bất kỳ trên trục đó

$$l_z = hc_z\vec{l}_A \quad \text{với} \quad A\in z. \qquad (4.9)$$

4.2. Định lý biến thiên mômen động lượng

a) Định lý biến thiên mômen động lượng của cơ hệ đối với một điểm O cố định

Định lý 4.1. Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của cơ hệ đối với

điểm O cố định bằng tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ lấy đối với điểm O đó.

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right) = \vec{M}_O^e \tag{4.10}$$

Chứng minh.

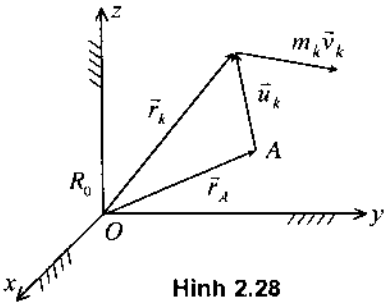
*** Mô hình hệ gồm n chất điểm.** Từ biểu thức (4.8) ta có

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\sum\left(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k\right) = \sum\frac{d\left(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k\right)}{dt} = \sum\vec{v}_k \times m\vec{v}_k + \sum\left(\vec{r}_k \times m_k\vec{a}_k\right)$$

$$= \sum\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \sum\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i$$

Do $\sum\vec{m}_O\left(\vec{F}_k^i\right) = \sum\vec{r}_k \times F_k^i = 0$, suy ra

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e = \sum\vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right) = \vec{M}_O^e$$



Hình 2.28

*** Mô hình vật rắn.** Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O cố định (biểu thức (4.4)) ta được

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\int_B\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)dm = \int_B\left(\vec{v} \times \vec{v}\right)dm + \int_B\vec{r} \times \frac{d\left(\vec{v}dm\right)}{dt}$$

$$= \int_B\vec{r} \times \frac{d\left(\vec{v}dm\right)}{dt} = \int_B\vec{r} \times \left(d\vec{F}^e + d\vec{F}^i\right) = \int_B\vec{r} \times d\vec{F}^e = \sum\vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right)$$

Bằng cách tương tự, ta có thể chứng minh định lý đối với hệ các chất điểm và các vật rắn.

Hệ quả: Từ công thức (4.10) ta suy ra

$$\frac{dl_z}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right) \tag{4.11}$$

b) Định lý biến thiên mômen động lượng của cơ hệ đối với một điểm A chuyển động

Định lý 4.2. Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của cơ hệ đối với điểm A chuyển động được xác định bởi công thức

$$\frac{d\vec{l}_A}{dt} = \sum\vec{m}_A\left(\vec{F}_k^e\right) - \vec{v}_A \times \vec{p} \tag{4.12}$$

Trong đó $\vec{p}$ là động lượng của cơ hệ, $\vec{v}_A$ là vận tốc của điểm A trong hệ quy chiếu cố định.

Chứng minh. Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp hệ gồm n chất điểm. Theo hình (2.28) và công thức (4.8) suy ra

$$\vec{l}_O = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum (\vec{r}_A + \vec{u}_k) \times m_k \vec{v}_k$$

$$\vec{l}_O = \vec{r}_A \times \sum m_k \vec{v}_k + \sum \vec{u}_k \times m_k \vec{v}_k$$

Vậy ta có công thức liên hệ mômen động lượng của cơ hệ đối với hai điểm O và A

$$\vec{l}_O = \vec{l}_A + \vec{r}_A \times \vec{p} \tag{4.13}$$

Đạo hàm theo thời gian biểu thức (4.13) và chú ý đến (4.10) ta được

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \frac{d\vec{l}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}_A \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e$$

$$= \sum (\vec{r}_A + \vec{u}_k) \times \vec{F}_k^e = \sum \vec{r}_A \times \vec{F}_k^e + \sum \vec{u}_k \times \vec{F}_k^e$$

Do $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$ nên

$$\frac{d\vec{l}_A}{dt} + \vec{v}_A \times \vec{p} + \vec{r}_A \times \sum \vec{F}_k^e = \vec{r}_A \times \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{m}_A \left(\vec{F}_k^e\right)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{d\vec{l}_A}{dt} = \sum \vec{m}_A \left(\vec{F}_k^e\right) - \vec{v}_A \times \vec{p}$$

Hệ quả: Khi chọn điểm A là khối tâm C của cơ hệ, từ công thức (4.12) ta suy ra

$$\frac{d\vec{l}_C}{dt} = \sum \vec{m}_C \left(\vec{F}_k^e\right) - \vec{v}_C \times m\vec{v}_C = \sum \vec{m}_C (\vec{F}_k^e)$$

Từ đó ta có định lý biến thiên mômen động lượng của cơ hệ đối với khối tâm của nó

$$\frac{d\vec{l}_C}{dt} = \sum \vec{m}_C \left(\vec{F}_k^e\right) = \vec{M}_C \tag{4.14}$$

4.3. Định lý bảo toàn mômen động lượng

Từ các công thức (4.10) và (4.11) suy ra định lý bảo toàn mômen động lượng của cơ hệ

Nếu $$\sum \vec{m}_O \left(\vec{F}_k^e\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{l}_O}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{l}_O = \text{const} \tag{4.15}$$

Nếu $$\sum m_z \left(\vec{F}_k^e\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dl_z}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; l_z = \text{const} \tag{4.16}$$

4.4. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.12. Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.

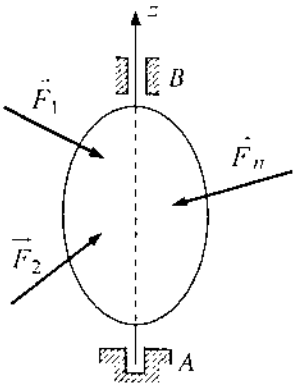
Cho vật rắn quay quanh trục z cố định, chịu tác dụng của các ngoại lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Áp dụng công thức (4.11) ta có

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_k\right)$$

Do $L_z = J_z\omega_z$ nên

$$J_z\frac{d\omega_z}{dt} = J_z\ddot{\varphi} = \sum m_z\left(\vec{F}_k\right) \qquad (4.17)$$

Phương trình (4.17) là phương trình vi phân chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.



Hình 2.29

Thí dụ 2.13. Dao động của con lắc vật lý.

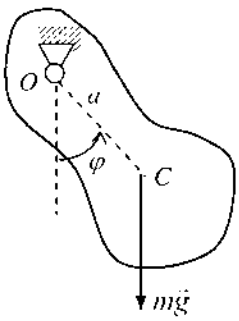
Con lắc vật lý (hình 2.30) là một vật rắn phẳng có thể quay quanh một trục đi qua O và vuông góc với trục quay. Cho biết khối lượng con lắc là m, mômen quán tính đối với trục quay là J_O, khoảng cách từ O đến khối tâm C là a. Hãy xác định chu kỳ dao động của con lắc vật lý.

Lời giải. Áp dụng phương trình (4.17) ta có

$$J_O\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{mga}{J_O}\sin\varphi = 0$$

Nếu đặt $\omega_0^2 = \dfrac{mga}{J_0}$ và khảo sát dao động nhỏ $\sin\varphi \approx \varphi$, từ phương trình trên suy ra

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$



Hình 2.30

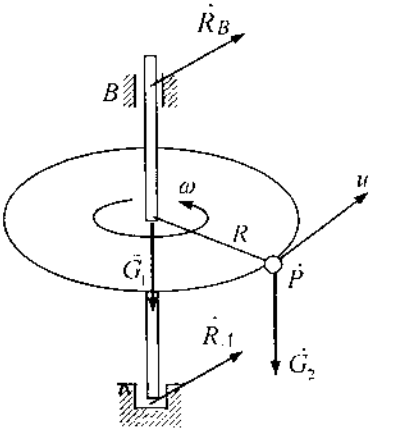
Trong đó ω_0 là tần số riêng. Từ đó suy ra chu kỳ dao động của con lắc vật lý

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mga}}$$

Thí dụ 2.14. Một đĩa tròn đồng chất trọng lượng G_1, bán kính R quay được quanh một trục thẳng đứng AB đi qua tâm của đĩa và vuông góc với mặt phẳng đĩa. Trên vành có một chất điểm P có trọng lượng G_2. Đĩa quay quanh trục với

vận tốc góc ω_0. Tại một thời điểm nào đó chất điểm P chuyển động dọc theo vành đĩa với vận tốc tương đối so với đĩa có trị số không đổi là u. Tìm vận tốc góc của đĩa (hình 2.31).

Lời giải. Khảo sát cơ hệ gồm một vật rắn phẳng là đĩa và chất điểm P. Đĩa có thể quay quanh trục cố định z thẳng đứng còn chất điểm chuyển động tương đối trên mặt đĩa theo một đường tròn tâm O, bán kính $R = OP$. Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ và các phản lực $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ tại các ổ đỡ (hình 2.31).



Hình 2.31

Do hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ hoặc song song với trục z hoặc cắt trục z, nên ta có

$$\sum m_z\left(\vec{F}_i^e\right) = 0 \qquad (1)$$

Áp dụng định lý bảo toàn mômen động lượng đối với trục z ta có

$$L_z(t) = L_z(0) \qquad (2)$$

Biểu thức mômen động lượng của hệ tại thời điểm t bất kỳ sau khi chất điểm chuyển động có dạng

$$L_z(t) = L_z^1 + L_z^2 = J_z\omega + R\frac{G_2}{g}(u + R\omega) \qquad (3)$$

Do $J_z = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}R^2$ nên biểu thức (3) có dạng

$$L_z(t) = \frac{G_1}{2g}R^2\omega + \frac{G_2}{g}(R^2\omega + Ru) = \frac{R^2\omega(G_1 + 2G_2) + 2G_2Ru}{2g} \qquad (4)$$

Tại thời điểm $t = 0$, $\omega = \omega_0$, $u = 0$, từ (4) suy ra

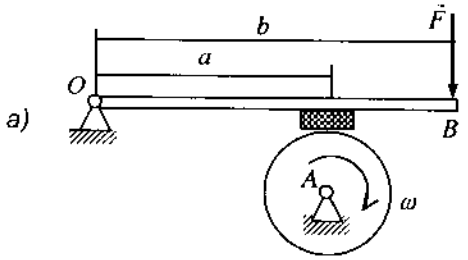
$$L_z(0) = \frac{R^2\omega_0(G_1 + 2G_2)}{2g} \qquad (5)$$

Thế (4) và (5) vào (2) tính được

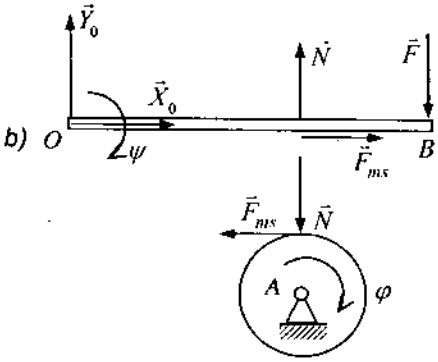
$$\omega = \omega_0 - \frac{2G_2u}{R(G_1 + 2G_2)} \qquad (6)$$

Thí dụ 2.15. Một bánh xe bán kính r đang quay đều quanh A với vận tốc góc ω_0. Người ta dùng cần hãm để hãm chuyển động của bánh xe. Tìm lực $\vec{F}$ không đổi tác dụng lên đầu cần hãm sao cho trong khoảng thời gian T thì bánh

xe dừng hẳn. Cho biết mômen quán tính của bánh xe đối với trục A là J_A, hệ số ma sát trượt động giữa má hãm và bánh xe là μ. Các kích thước cho trên hình vẽ 2.32. Tìm số vòng quay mà bánh xe quay được từ khi bắt đầu hãm cho đến khi dừng hẳn. Giả thiết chuyển động quay của cần hãm có gia tốc góc rất nhỏ, có thể bỏ qua. Bỏ qua chiều dầy má hãm.



Hình 2.32a



Hình 2.32b

Lời giải. Ta tách cơ hệ thành hai hệ con như hình vẽ 2.32b. Phương trình vi phân chuyển động của từng vật rắn có dạng

$$J_A\ddot{\varphi} = -F_{ms}r \tag{1}$$

$$J_0\ddot{\psi} = Fb - Na \approx 0 \tag{2}$$

Từ (2) suy ra: $N = \dfrac{b}{a}F$ (3)

Thế (3) vào (1) với chú ý $F_{ms} = \mu N$, tính được

$$J_A\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\mu br}{a}F \quad \Rightarrow \quad -\frac{aJ_A}{\mu brF}d\omega = dt \tag{4}$$

Tích phân biểu thức (4)

$$-\frac{aJ_A}{\mu brF}\int_{\omega_0}^{0} d\omega = \int_0^T dt \Rightarrow T = \frac{\omega_0 aJ_A}{\mu brF}$$

Từ đó suy ra độ lớn của lực F cần thiết

$$F = \frac{J_A\omega_0 a}{br\mu T} \tag{5}$$

Mặt khác từ công thức (4) suy ra

$$J_A\frac{d\omega}{dt}d\varphi = -\frac{\mu brF}{a}d\varphi \quad \Rightarrow \quad J_A\omega d\omega = -\frac{\mu brF}{a}d\varphi$$

Tích phân hai vế ta được

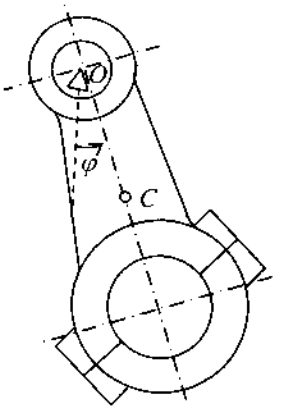
$$\int_{\omega_0}^{0} \omega d\omega = -\frac{\mu brF}{J_A a}\int_0^{\varphi_1} d\varphi \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\omega_0^2 = -\frac{\mu brF}{J_A a}\varphi_1$$

Vậy $$\varphi_1 = \frac{J_A a\omega_0.\omega_0}{2\mu brF} = \frac{T\omega_0}{2} \text{ (rad)}$$

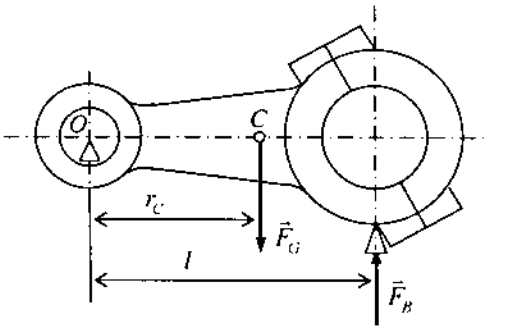
Từ công thức chuyển đổi $n = \dfrac{\varphi}{2\pi}$ suy ra số vòng quay thêm của bánh xe là

$$n_1 = \frac{\omega_0 T}{4\pi} \qquad (6)$$

Thí dụ 2.16. Xác định mômen quán tính bằng phương pháp thực nghiệm. Trên hình 2.33 là mô hình thanh biên của động cơ. Khối lượng của thanh là $m = 1{,}2\ kg$, chiều dài thanh $l = 12cm$. Xem thanh biên là một con lắc vật lý (hình 2.33a) ta đo được thời gian thanh thực hiện 20 dao động nhỏ là $12{,}6s$. Bằng cách xác định phản lực gối đỡ như hình 2.33b ta đọc được $m_B = 0{,}8\ kg$ ($F_B = m_B g$). Hãy xác định: Vị trí trọng tâm r_C, mômen quán tính khối J_C.



Hình 2.33a



Hình 2.33b

Lời giải. Từ phương trình cân bằng mômen đối với tâm O (hình 2.33b) ta có

$$mgr_C = m_B gl \Rightarrow r_C = \frac{m_B}{m}l \qquad (1)$$

Thay số vào (1) được

$$r_C = \frac{0.8kg}{1,2kg}12cm = 8cm$$

Theo thí dụ 2 về dao động con lắc vật lý ta có công thức

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{mgr_C}} \Rightarrow J_0 = mgr_C\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \qquad (2)$$

Thay số vào (2) suy ra

$$J_O = 1,2kg.981cm/s^2.8cm.\left(\frac{0,63}{2\pi}s\right)^2 = 94,7kgcm^2$$

Áp dụng định lý Steiner tính được mômen quán tính J_C

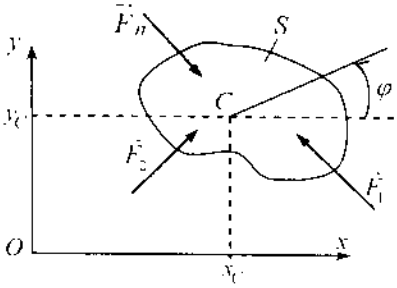
$$J_C = J_O - mr_C^2 = 94,7kgcm^2 - 1,2kg(8cm)^2 = 17,9kgcm^2$$

5. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN PHẲNG

5.1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của vật rắn phẳng

Xét hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng Oxy của nó và chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ cũng nằm trong mặt phẳng Oxy. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k \qquad (5.1)$$



Hình 2.34

Từ (5.1) suy ra

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx} \qquad (5.2)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky} \qquad (5.3)$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với khối tâm C của tấm phẳng chuyển động phẳng ta có

$$\frac{d\vec{l}_C}{dt} = \sum \vec{m}_C\left(\vec{F}_k\right) \qquad (5.4)$$

Chọn trục Cz vuông góc với mặt phẳng Oxy và đi qua khối tâm C, từ (5.4) biết được

$$\frac{dl_{Cz}}{dt} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k\right) \qquad (5.5)$$

Do $l_{Cz} = J_{Cz}\omega = J_{Cz}\dot{\varphi}$ nên từ (5.5) suy ra

$$J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k\right) \qquad (5.6)$$

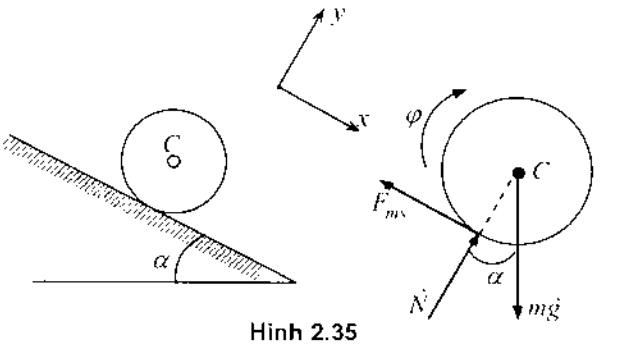
Kết hợp các phương trình (5.2), (5.3) và (5.6) nhận được hệ 3 phương trình vi phân chuyển động của vật rắn phẳng

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{kx} \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{ky} \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} &= \sum m_{Cz}\left(\vec{F}_k\right) \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Chú ý. Trong các bài toán áp dụng người ta hay gặp trường hợp vật rắn chuyển động song phẳng. Chỉ những vật rắn chuyển động song phẳng có mặt phẳng đối xứng động lực (vật rắn có mặt phẳng đối xứng, các lực tác dụng lên vật rắn có thể biến đổi tương đương thành các lực nằm trong mặt phẳng đối xứng) thì mới áp dụng được các phương trình vi phân chuyển động (5.7).

5.2. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 2.17. Một đĩa tròn đồng chất khối lượng m bán kính r chuyển động trên mặt phẳng nghiêng nhám (hình 2.35). Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh là μ_0, hệ số ma sát trượt động là μ. Hãy khảo sát chuyển động của đĩa. Bỏ qua ma sát lăn.



Hình 2.35

Lời giải. Giả sử lúc đầu đĩa tròn lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng. Phương trình vi phân chuyển động của đĩa

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - F'_{ms} \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - mg\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = rF'_{ms} \qquad (3)$$

Trong đó $J_C = \frac{1}{2}mr^2$, F'_{ms} là ma sát trượt tĩnh. Do đĩa lăn không trượt, ta có điều kiện ràng buộc

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{r} \qquad (4)$$

Từ (1), (3) và (4) suy ra

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - \frac{J_C}{r^2}\ddot{x}_C \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_C = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{J_C}{mr^2}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Từ (1) tính được

$$F'_{ms} = m\left(g\sin\alpha - \ddot{x}_C\right) = \frac{1}{3}mg\sin\alpha \qquad (5)$$

Từ đó suy ra để cho đĩa lăn không trượt thì hệ số ma sát trượt tĩnh μ_0 phải thoả mãn điều kiện sau

$$F_{ms}^{t} \le \mu_0 N \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \ge \frac{F_{ms}^{t}}{N} = \frac{\frac{1}{3} mg \sin\alpha}{mg\cos\alpha} = \frac{1}{3} tg\alpha \qquad (6)$$

Nếu hệ số ma sát trượt tĩnh không thoả mãn điều kiện (6) thì đĩa sẽ vừa lăn vừa trượt. Trong trường hợp này các phương trình (1), (2), (3) sẽ có dạng

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha - F_{ms}^{d}, \qquad N = mg\cos\alpha, \qquad J_{Cz}\ddot{\varphi} = rF_{ms}^{d} \qquad (7)$$

Khác với trường hợp trước, ta không có điều kiện ràng buộc (4). Tuy nhiên theo định luật ma sát trượt động

$$F_{ms}^{d} = \mu N \qquad (8)$$

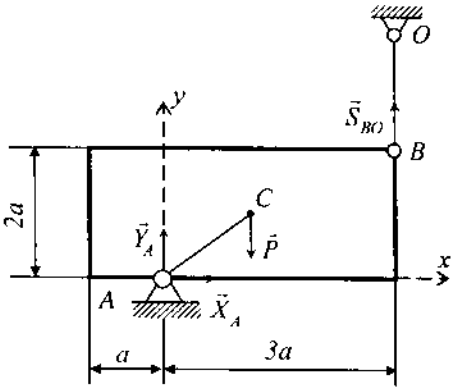
Từ (7) và (8) giải ra được

$$\ddot{x}_C = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad \ddot{\varphi} = \frac{2\mu g}{r}\cos\alpha$$

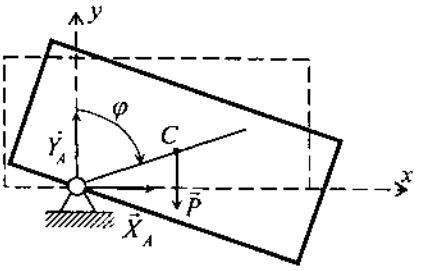
Thí dụ 2.18. Một tấm hình chữ nhật đồng chất dài $4a$, rộng $2a$, treo trong mặt phẳng thẳng đứng bằng khớp bản lề tại A và dây mềm không dãn tại B (hình 2.36a). Cho biết khối lượng của tấm là m.

a) Xác định phản lực tại bản lề A và sức căng của dây.

b) Giả sử tại một thời điểm nào đó dây treo bị đứt. Xác định phản lực động tại A, ngay sau khi dây treo đứt.



Hình 2.36a



Hình 2.36b

Lời giải. Lực tác dụng lên tấm gồm trọng lượng $\vec{P} = m\vec{g}$, lực căng dây $\vec{S}_{BO}$ và phản lực $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ tại bản lề A.

a) Phản lực tĩnh. Các phương trình cân bằng tĩnh học

$$\sum F_{kx} = X_A = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - mg + S_{BO} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -mga + 3S_{BO}a = 0$$

Giải các phương trình (1), (2), (3) ta được

$$X_A = 0, Y_A = \frac{2}{3}mg, S_{BO} = \frac{1}{3}mg$$

b) Phản lực động. Sau khi dây đứt, $\vec{S}_{BO} = 0$, tấm phẳng chuyển động quay quanh A

$$J_A\ddot{\varphi} = mga\sqrt{2}\sin\varphi \tag{4}$$

Mômen quán tính khối

$$J_A = J_C + 2ma^2 = \frac{11}{3}ma^2 \tag{5}$$

Tại $\varphi(0) = 45^0$, ta có $\ddot{\varphi}(0) = \frac{3}{11}\frac{g}{a}$ (6)

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có

$$m\ddot{x}_C = X_A, \qquad m\ddot{y}_C = Y_A - mg \tag{7}$$

Từ hình (2.36b) dễ dàng tính được

$$x_C = a\sqrt{2}\sin\varphi, \qquad y_C = a\sqrt{2}\cos\varphi \tag{8}$$

Từ (8) suy ra

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C &= a\sqrt{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\sqrt{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ \ddot{y}_C &= -a\sqrt{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi - a\sqrt{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{aligned} \tag{9}$$

Thế (9) vào (7) ta được

$$\begin{aligned} X_A &= ma\sqrt{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ Y_A &= mg - ma\sqrt{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \end{aligned} \tag{10}$$

Ngay sau khi dây đứt $\varphi(0) = 45^0, \dot{\varphi}(0) = 0, \ddot{\varphi}(0) = \frac{3}{11}\frac{g}{a}$. Do đó

$$X_A = ma\sqrt{2}\frac{3}{11}\frac{g}{a}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{11}mg$$

$$Y_A = mg - ma\sqrt{2}\frac{3}{11}\frac{g}{a}\frac{\sqrt{2}}{2} = mg - \frac{3}{11}mg = \frac{8}{11}mg$$

Thí dụ 2.19. Một thanh đồng chất AB khối lượng m, dài $2a$ đặt trong mặt phẳng thẳng đứng. Đầu A tựa vào mặt tường nhẵn thẳng đứng, đầu B tựa vào mặt nhẵn nằm ngang. Giữ cho thanh đứng yên tạo với mặt phẳng ngang một góc φ_0 rồi thả cho thanh chuyển động dưới tác dụng của trọng lực. Xác định vận tốc

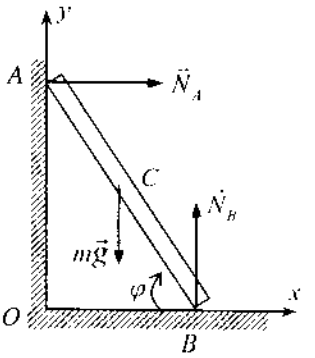
góc, gia tốc góc của thanh dưới dạng hàm của góc φ (hình 2.37). Xác định phản lực do tường và nền tác dụng vào thanh theo góc φ và các đạo hàm của nó. $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ khi đầu A của thanh rời khỏi tường, góc φ có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của thanh AB

$$m\ddot{x}_C = N_A \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N_B - mg \qquad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = N_A a\sin\varphi - N_B a\cos\varphi \qquad (3)$$



Hình 2.37

Vị trí của thanh AB được xác định bởi góc φ. Ta có các phương trình liên kết

$$x_C = a\cos\varphi, \qquad y_C = a\sin\varphi \qquad (4)$$

Đạo hàm biểu thức (4) theo thời gian ta được

$$\dot{x}_C = -a\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \ddot{x}_C = -a\ddot{\varphi}\sin\varphi - a\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$\dot{y}_C = a\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \ddot{y}_C = a\ddot{\varphi}\cos\varphi - a\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

Thế các biểu thức trên vào các phương trình (1) và (2) ta có

$$N_A = -ma\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) \qquad (5)$$

$$N_B = mg + ma\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) \qquad (6)$$

Thế (5) và (6) vào phương trình (3) và chú rằng $J_C = \frac{1}{3}ma^2$, suy ra

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mga}{J_C + ma^2}\cos\varphi = -\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\varphi \qquad (7)$$

Nhân hai vế của (7) với $d\varphi$ ta được

$$\ddot{\varphi}d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}d\varphi = \frac{1}{2}d\left(\dot{\varphi}^2\right) = -\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\varphi d\varphi \qquad (8)$$

Tích phân hai vế phương trình (8)

$$\int_0^{\varphi} d\left(\dot{\varphi}^2\right) = -\frac{3}{2}\frac{g}{a}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos\varphi d\varphi$$

tính được

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{3g}{2a}\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right) = \frac{3g}{2a}\left(\sin\varphi_0 - \sin\varphi\right) \qquad (9)$$

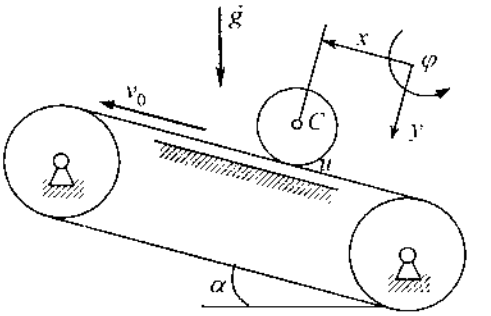
Khi đầu A của thanh rời khỏi tường thì $N_A = 0$, từ đó ta có

$$ma\left[-\frac{3}{4}\frac{g}{a}\cos\varphi_1\sin\varphi_1-\frac{3g}{2a}(\sin\varphi_1-\sin\varphi_0)\cos\varphi_1\right]=0$$

Do $\cos\varphi_1 \neq 0$, suy ra giá trị góc φ khi đầu A rời khỏi tường là

$$3\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_0 = 0 \Rightarrow \quad \varphi_1 = \arcsin(\frac{2}{3}\sin\varphi_0)$$

Thí dụ 2.20. Một trụ tròn đồng chất khối lượng m, bán kính r tại thời điểm $t = 0$ đứng yên tại vị trí $x_C(0) = 0$ trên một băng tải nhám. Băng tải chuyển động với vận tốc v_0 không đổi (hình 2.38a). Hệ số ma sát trượt động giữa trụ tròn và băng tải là μ. Cho biết α, r, m, v_0, $\mu = 2\text{tg}\alpha$. Hãy tìm:



Hình 2.38a

a) Thời điểm t_1 kể từ đó trụ tròn lăn không trượt trên băng tải.

b) Giá trị cực đại của x, mà trọng tâm trụ tròn đạt được.

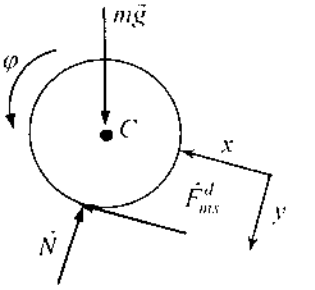
Lời giải. Lúc đầu trụ tròn vừa lăn vừa trượt trong khoảng $0 \le t \le t_1$. Sau đó trụ tròn lăn không trượt trên băng tải.

a) $0 \le t \le t_1$, trụ tròn vừa lăn vừa trượt. Phương trình vi phân chuyển động của trụ tròn (hình 2.38b) là

$$m\ddot{x}_C = F_{ms}^d - mg\sin\alpha \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = -N + mg\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = -F_{ms}^d r \qquad (3)$$



Hình 2.38b

Từ (2) suy ra

$$N = mg\cos\alpha \qquad (4)$$

Thế (4) vào định luật ma sát Coulomb

$$F_{ms}^d = \mu N = 2\text{mgtg}\alpha\cos\alpha = 2mg\sin\alpha \qquad (5)$$

Do $\quad J_C = \frac{1}{2}mr^2$, từ (1) và (3) ta có

$$\ddot{x}_C = g\sin\alpha \qquad (6)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{4}{r}g\sin\alpha \qquad (7)$$

Chú ý đến các điều kiện đầu $\dot{x}_C(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ suy ra

$$\dot{x}_C(t) = gt\sin\alpha, \qquad \dot{\varphi}(t) = -\frac{4}{r}gt\sin\alpha \qquad (8)$$

Trụ tròn sẽ lăn không trượt khi vận tốc tương đối tại điểm tiếp xúc bằng không, hay

$$\dot{x}_{C'}(t) = r\dot{\varphi}(t) + v_0 \tag{9}$$

Thế (7), (8) vào (9) ta được

$$t_1 = \frac{v_0}{5g\sin\alpha} \tag{10}$$

b) Khi $t > t_1$, trụ tròn lăn không trượt trên băng tải

$$\dot{x}_{C'}(t) = r\dot{\varphi}(t) + v_0 \tag{11}$$

Các phương trình vi phân chuyển động của trụ tròn có dạng như (1), (2) và (3) chỉ khác ta thay lực ma sát trượt động F_{ms}^{d} bằng lực ma sát trượt tĩnh F_{ms}^{t}. Ta có

$$m\ddot{x}_{C'} = F_{ms}^{t} - mg\sin\alpha \tag{12}$$

$$J_{C'}\ddot{\varphi} = -F_{ms}^{t} r \tag{13}$$

Từ (11) ta có $\ddot{x}_{C'}(t) = r\ddot{\varphi}(t)$. Thế vào hai phương trình trên suy ra

$$\ddot{x}_{C'} = -\frac{2}{3}g\sin\alpha \tag{14}$$

Tích phân lên suy ra

$$\dot{x}_{C'}(t) = -\frac{2}{3}g(t - t_1)\sin\alpha + \dot{x}_{C'}(t_1) \tag{15}$$

Với $\dot{x}_{C'}(t_1)$ xác định từ phương trình (8), ta có

$$\dot{x}_{C'}(t) = -\frac{2}{3}g(t - t_1)\sin\alpha + gt_1\sin\alpha = \frac{5}{3}gt_1\sin\alpha - \frac{2}{3}gt\sin\alpha \tag{16}$$

Giá trị cực đại của $x_{C'}(t)$ đạt tại $t = t_2$ khi $\dot{x}_{C'}(t_2) = 0$. Nên

$$\dot{x}_{C'}(t) = \frac{5}{3}gt_1\sin\alpha - \frac{2}{3}gt_2\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{5}{2}t_1 \tag{17}$$

Tích phân biểu thức (16) ta được

$$x_{C'}(t) = x_{C'}(t_1) - \frac{1}{3}g(t - t_1)^2\sin\alpha + gt_1(t - t_1)\sin\alpha \tag{18}$$

Từ (8) suy ra

$$x_{C'}(t_1) = \frac{gt_1^2}{2}\sin\alpha \tag{19}$$

Thế (19) và (18) vào (17) xác định được

$$\max x_{C'} = x_{C'}(t_2) = \frac{v_0^2}{20g\sin\alpha}. \tag{20}$$

Chương 3

CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

Các phương pháp năng lượng (Energy Methods) được sử dụng trong hầu hết các lĩnh vực của khoa học và kỹ thuật. Trong chương này, sẽ trình bày cơ sở phương pháp năng lượng tính toán động lực học chất điểm và vật rắn. Trước hết, trình bày các khái niệm cơ bản của phương pháp này như động năng của chất điểm, động năng của vật rắn, công của lực, thế vị của lực có thế, động năng của cơ hệ, thế năng của cơ hệ. Sau đó, xuất phát từ tiên đề Newton 2, thiết lập các định lý biến thiên động năng và định lý bảo toàn cơ năng.

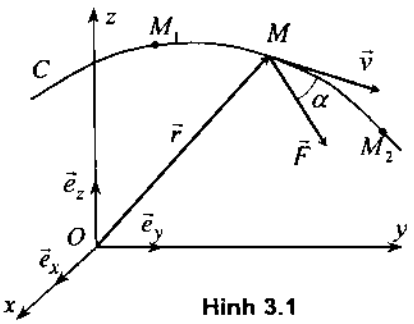
1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Công của lực

a) Công nguyên tố của lực*

Định nghĩa 1.1. Công nguyên tố của lực $\vec{F}$ khi điểm đặt của nó di chuyển trên đường cong C một độ dời vô cùng bé ds được định nghĩa bởi công thức sau

$$d'A(\vec{F}) = Fds\cos\alpha \qquad (1.1)$$



Hình 3.1

Trong đó, α là góc giữa lực $\vec{F}$ và tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm đặt của lực.

Do $ds = vdt$ nên biểu thức (1.1) có thể biến đổi về dạng

$$d'A(\vec{F}) = Fv\cos\alpha dt = \vec{F}.\vec{v}dt \qquad (1.2)$$

Chú ý đến quan hệ $d\vec{r} = \vec{v}dt$, biểu thức (1.2) có dạng

$$d'A(\vec{F}) = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (1.3)$$

Trong đó

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z, \quad d\vec{r} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

* Năm 1829, nhà Cơ học Pháp G.G. Coriolis (1792 – 1843) đã đưa ra khái niệm công của lực.

b) Công hữu hạn của lực

Định nghĩa 1.2. Khi điểm đặt của lực $\vec{F}$ di chuyển trên đường cong C từ điểm M_1 đến điểm M_2, công của lực $\vec{F}$ trên đoạn di chuyển đó được xác định bởi công thức

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\alpha ds = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{M_1M_2}} F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (1.4)$$

Đơn vị của công là Nm. Trong hệ đơn vị SI người ta sử dụng tên nhà Vật lý người Anh J. P. Joule (1818–1889) làm đơn vị công J (Joule), $1J = 1Nm$.

c) Chú ý:

- Từ biểu thức (1.3) ta thấy $d'A = 0$ khi $\vec{F} \perp d\vec{r}$ hoặc khi $d\vec{r} = 0$.
- Ta sử dụng ký hiệu $d'A(\vec{F})$ để nhấn mạnh công của lực nói chung không phải là vi phân hoàn chỉnh của một hàm nào đó.

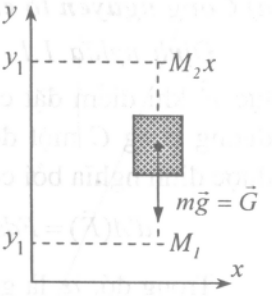
1.2. Các thí dụ tính công của một số lực thường gặp

a) Công của trọng lực $\vec{G}$. Từ hình vẽ 3.2 ta có

$$d'A = F_y dy = -mgdy$$

Khi trọng lực $\vec{G}$ di chuyển từ điểm M_1 đến M_2 biểu thức công có dạng

$$A = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1)$$



Hình 3.2

Khi trọng lực $\vec{G}$ di chuyển từ điểm M_2 đến M_1

$$A = -mg\int_{y_2}^{y_1} dy = mg(y_2 - y_1)$$

Nếu ký hiệu $h = (y_2 - y_1)$, thì công của trọng lực có dạng

$$A = \pm mgh \qquad (1.5)$$

Dấu cộng lấy khi trọng tâm của vật di chuyển từ cao xuống thấp; dấu trừ lấy trong trường hợp ngược lại.

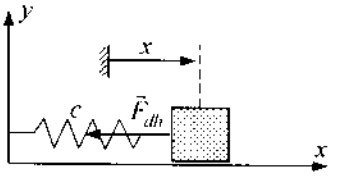
Nhận xét: Công của trọng lực không phụ thuộc vào hình dáng quỹ đạo, mà chỉ phụ thuộc vào vị trí của điểm đầu và điểm cuối của quỹ đạo.

b) Công của lực đàn hồi tuyến tính. Lực đàn hồi tuyến tính có dạng $F_{dh} = cx$ (trong đó x là độ dãn của lò xo, c là độ cứng của lò xo). Từ hình 3.3 thấy rằng

$$d'A = F_x dx = -cxdx$$

Từ đó suy ra

$$A_{M_1M_2} = -c\int_{x_1}^{x_2} xdx = -\frac{1}{2}c\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$



Hình 3.3

Nếu chọn $x_1 = 0$, $x_2 = x$ ta có hệ thức

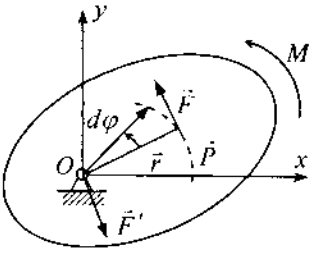
$$A_{M_1M_2} = -\frac{1}{2}cx^2 \qquad (1.6)$$

c) Công của ngẫu lực. Ngẫu lực có mômen M tác dụng vào vật rắn quay quanh trục cố định ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay. Dựa vào tính chất ngẫu lực, có thể biến đổi ngẫu lực về cặp lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ mà $\vec{F}'$ đi qua O. Từ hình 3.4 thấy rằng

$$d'A = Fds = Frd\varphi = Md\varphi \qquad (1.7)$$

Lấy tích phân theo góc φ suy ra

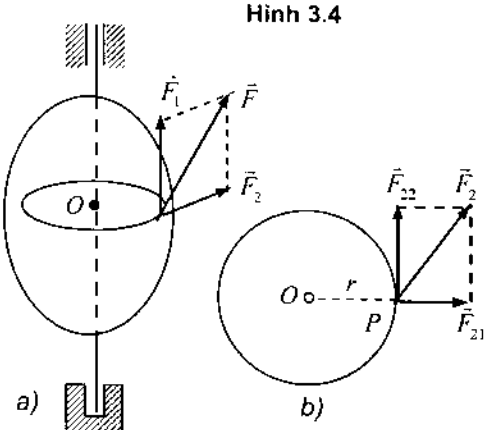
$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi$$



Hình 3.4

d) Công của lực tác dụng lên vật rắn quay quanh một trục cố định

Ta phân tích lực $\vec{F}$ thành hai lực: $\vec{F}_1$ song song với trục z, $\vec{F}_2$ vuông góc với trục z. Sau đó phân tích lực $\vec{F}_2$ thành hai lực: $\vec{F}_{21}$ dọc theo đường kính và lực $\vec{F}_{22}$ vuông góc với đường kính OM (hình 3.5).



Hình 3.5

Theo định nghĩa ta có

$$d'A\left(\vec{F}\right) = d'A\left(\vec{F}_1\right) + d'A\left(\vec{F}_{22}\right) + d'A\left(\vec{F}_{21}\right)$$

Do $d'A\left(\vec{F}_1\right) = d'A\left(\vec{F}_{21}\right) = 0$, nên ta có

$$d'A\left(\vec{F}\right) = d'A\left(\vec{F}_{22}\right) = F_{22}rd\varphi = m_z\left(\vec{F}\right)d\varphi$$

Vậy $$d'A\left(\vec{F}\right) = m_z\left(\vec{F}\right)d\varphi \qquad (1.8)$$

Chú ý: Các lực tác dụng lên vật rắn thường phân thành các lực phân bố (lực

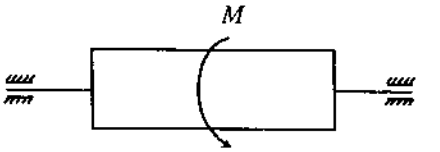
mặt và lực khối) và các lực tập trung. Các lực khối cũng như các lực mặt có thể thu gọn về một số hữu hạn các lực tập trung. Vì vậy, không giảm tổng quát, có thể giả thiết các lực tác dụng lên vật rắn gồm một số hữu hạn lực tập trung: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$. Khi đó biểu thức công của các lực tác dụng lên vật rắn có thể biểu diễn một cách hình thức dưới dạng

$$d'A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k . d\vec{r}_k .$$

1.3. Công suất và hiệu suất

a) Công suất

Định nghĩa 1.3. Công của lực sinh ra trong một đơn vị thời gian được gọi là công suất



Hình 3.6

$$N = \frac{d'A}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{v}dt}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \qquad (1.9)$$

Trong kỹ thuật, người ta hay phải tính công suất của ngẫu lực tác dụng vào trục máy quay quanh một trục cố định. Từ công thức (1.7) ta có

$$d'A = Md\varphi \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega \qquad (1.10)$$

Đơn vị công suất là tên nhà khoa học người Scotland J. G. Watt (1736–1819), $1W = 1\ J/s$.

b) Hiệu suất

Trong kỹ thuật cơ khí, một phần công bị tiêu hao do ma sát ở các ổ đỡ. Do đó chỉ có một phần công sinh ra là công hữu ích. Ký hiệu công hữu ích là A_h, công toàn thể là A_t người ta đưa ra khái niệm hiệu suất (ký hiệu η) được định nghĩa bởi công thức

$$\eta = \frac{A_h}{A_t} \qquad (1.11)$$

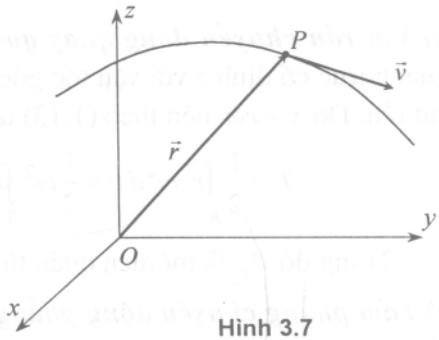
1.4. Động năng của chất điểm và vật rắn

Gaspard – Gustave de Criolis (1792–1843), nhà Cơ học Pháp, là người đầu tiên đưa ra khái niệm "lực sống" (Living force), sau này được gọi là động năng.

a) Động năng của chất điểm

Định nghĩa 1.4. Động năng của chất điểm (ký hiệu là T) là một đại lượng vô hướng bằng một nửa tích của khối lượng của chất điểm với bình phương vận tốc của nó

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1.12)$$



Hình 3.7

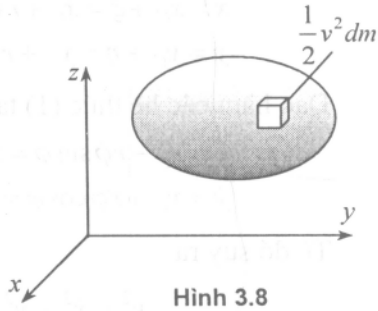
Đơn vị của động năng là kgm^2/s^2.

b) Động năng của vật rắn

Định nghĩa 1.5. Động năng của một phân tố dm của vật rắn là

$$dT = \frac{1}{2}v^2 dm$$

Từ đó ta có biểu thức xác định động năng của vật rắn

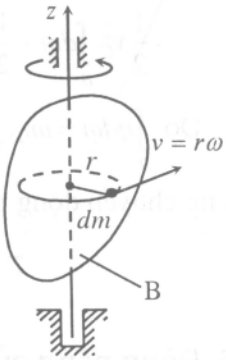


Hình 3.8

$$T = \frac{1}{2}\int_B v^2 dm \qquad (1.13)$$

1.5. Biểu thức tính động năng của vật rắn chuyển động

Biểu thức động năng của vật rắn (1.13) phụ thuộc vào dạng chuyển động cụ thể của nó. Ở đây ta đưa ra biểu thức tính động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến, vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định và tấm phẳng chuyển động phẳng. Biểu thức động năng của vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định và của vật rắn chuyển động tổng quát sẽ trình bày trong chương 5.



Hình 3.9

a) Vật rắn chuyển động tịnh tiến. Xét vật rắn *B* khối lượng *m*, chuyển động tịnh tiến với vận tốc khối tâm là $\vec{v}_C$. Theo công thức (1.13) suy ra

$$T = \frac{1}{2}v_C^2\int_B dm = \frac{1}{2}mv_C^2 \qquad (1.14)$$

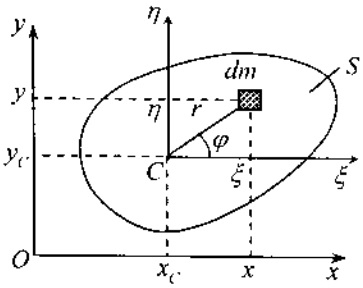
b) Vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định. Xét vật rắn B quay quanh trục cố định z với vận tốc góc ω (hình 3.9). Lấy một phân tố nhỏ dm của vật rắn. Do $v = r\omega$ nên theo (1.13) ta có

$$T = \frac{1}{2}\int_B r^2\omega^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2\int_B r^2 dm = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \tag{1.15}$$

Trong đó J_z là mômen quán tính khối của vật rắn đối với trục z.

c) Tấm phẳng chuyển động phẳng. Lấy một phân tố nhỏ dm của tấm phẳng S. Từ hình vẽ (3.10) suy ra

$$\left.\begin{aligned} x &= x_C + \xi = x_C + r\cos\varphi \\ y &= y_C + \eta = y_C + r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1)$$



Hình 3.10

Đạo hàm các hệ thức (1) ta được

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_C - r\dot{\varphi}\sin\varphi = \dot{x}_C - \omega\eta \\ \dot{y} &= \dot{y}_C + r\dot{\varphi}\cos\varphi = \dot{y}_C + \omega\xi \end{aligned}\right\}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\dot{x}_C - \omega\eta\right)^2 + \left(\dot{y}_C + \omega\xi\right)^2 \\ &= \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \omega^2\left(\eta^2 + \xi^2\right) - 2\omega\eta\dot{x}_C + 2\omega\xi\dot{y}_C \end{aligned} \tag{2}$$

Thế (2) vào (1.13) tính được

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_B v^2 dm = \frac{1}{2}\int_B\left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \omega^2\left(\eta^2 + \xi^2\right) - 2\omega\eta\dot{x}_C + 2\omega\xi\dot{y}_C\right)dm \\ &= \frac{1}{2}v_C^2\int_B dm + \frac{1}{2}\omega^2\int_B r^2 dm - \dot{x}_C\omega\int_B \eta dm + \dot{y}_C\omega\int_B \xi dm \end{aligned}$$

Do $\int_B \eta dm = m\eta_C = 0$, $\int_B \xi dm = m\xi_C = 0$, nên biểu thức động năng của tấm phẳng chuyển động phẳng có dạng

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 \tag{1.16}$$

1.6. Động năng của cơ hệ

Định nghĩa 1.6. Động năng của cơ hệ (gồm n chất điểm và p vật rắn) là tổng động năng của các chất điểm và các vật rắn thuộc hệ

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\int_{B_k} v^2 dm \tag{1.17}$$

Khi hệ gồm gồm n chất điểm và p vật rắn chuyển động trên cùng một mặt phẳng ta có

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} m_k v_{C_k}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} J_{C_k}\omega_k^2 \qquad (1.18)$$

2. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

2.1. Định lý biến thiên động năng

a) Định lý 2.1. Biến thiên động năng của cơ hệ (n chất điểm và p vật rắn) trong một dịch chuyển nào đó của cơ hệ bằng tổng công của tất cả các ngoại lực và các nội lực tác dụng lên cơ hệ trong dịch chuyển đó.

- Dạng vi phân: $dT = \sum d'A(\vec{F}_k^e) + \sum d'A(\vec{F}_k^i)$ (2.1)
- Dạng giới nội: $T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i)$ (2.2)

Chứng minh. Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp hệ gồm n chất điểm và hệ gồm một vật rắn.

• *Mô hình hệ gồm n chất điểm.* Xét chất điểm thứ k của cơ hệ, theo định luật Newton 2 ta có

$$\frac{d(m_k\vec{v}_k)}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \qquad (1)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{d(m_k\vec{v}_k)}{dt}.d\vec{r}_k = d\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = \vec{F}_k^e.d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i.d\vec{r}_k \qquad (2)$$

Cộng lại ta được

$$\sum d\left(\frac{1}{2}m_k v_k^2\right) = d\left(\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2\right) = \sum \vec{F}_k^e.d\vec{r}_k + \sum \vec{F}_k^i.d\vec{r}_k \qquad (3)$$

hay $\quad dT = \sum d'A(\vec{F}_k^e) + \sum d'A(\vec{F}_k^i)$

Mặt khác từ (3) suy ra

$$\int_{v_{k0}}^{v_k} d\left(\frac{1}{2}\sum m_k v_k^2\right) = \sum \int_{\vec{r}_{k0}}^{\vec{r}_k} \vec{F}_k^e.d\vec{r}_k + \sum \int_{\vec{r}_{k0}}^{\vec{r}_k} \vec{F}_k^i.d\vec{r}_k \qquad (4)$$

hay $\quad T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i) \qquad (5)$

• *Mô hình vật rắn.* Lấy một phần tử nhỏ dm của vật rắn, theo công thức (2) ta có

$$d\left(\frac{1}{2}v^2 dm\right) = d\vec{F}^e.d\vec{r} + d\vec{F}^i.d\vec{r} \qquad (6)$$

Từ đó suy ra

$$d\left(\frac{1}{2}\int_B v^2 dm\right) = \int_B d\vec{F}^e.d\vec{r} + \int_B d\vec{F}^i.d\vec{r} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^e.d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^i.d\vec{r}_k \qquad (7)$$

hay $$dT = \sum d'A(\vec{F}_k^e) + \sum d'A(\vec{F}_k^i) \qquad (8)$$

Bằng cách tương như trên, tích phân hệ thức (8) ta được

$$T - T_0 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i) \qquad (9)$$

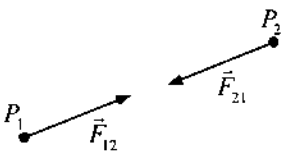
b) Định lý 2.2. Đạo hàm theo thời gian động năng của cơ hệ bằng tổng công suất của các ngoại lực và các nội lực tác dụng lên cơ hệ.

$$\frac{dT}{dt} = \sum \vec{F}_k^e.\vec{v}_k + \sum \vec{F}_k^i.\vec{v}_k \qquad (2.3)$$

Chứng minh. Đạo hàm biểu thức (3) theo thời gian, ta suy công thức (2.3).

c) Chú ý

• Khác với định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng, trong định lý biến thiên động năng ta phải quan tâm đến các nội lực, vì tổng công của các nội lực tác dụng lên hệ có thể khác không. Để làm ví dụ ta xét hai chất điểm bị hút vào nhau bởi hai lực như hình 3.11. Ta có



Hình 3.11

$$\sum d'A_k^i = \vec{F}_{12}.d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}.d\vec{r}_2 > 0$$

Tuy nhiên, đối với một hệ gồm một vật rắn hoặc hệ nhiều vật rắn liên kết với nhau bởi các bản lề, dây mềm không giãn thì

$$\sum A\left(\vec{F}_k^i\right) = 0\,.$$

• Khi áp dụng định lý biến thiên động năng người ta thường phân chia các lực tác dụng lên hệ thành hai tập con: Một tập gồm các lực sinh công (thường là các lực hoạt động $\left\{\vec{F}_k^a\right\}$) và một tập hợp gồm các lực không sinh công (thường là các phản lực liên kết không ma sát $\left\{\vec{R}_k\right\}$). Khi đó định lý biến thiên động năng có dạng

$$dT = \sum d'A\left(\vec{F}_k^a\right) \qquad (2.8)$$

$$T - T_0 = \sum A\left(\vec{F}_k^a\right) \tag{2.9}$$

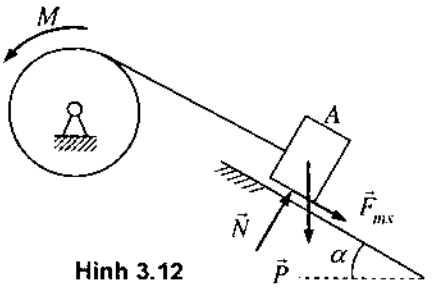
$$\frac{dT}{dt} = \sum \vec{F}_k^a.\vec{v}_k \tag{2.10}$$

Ta quy ước xếp các lực liên kết có sinh công vào tập các lực hoạt động.

2.2. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 3.1. Một ngẫu lực có mô men M_0 không đổi tác dụng vào tang của một trục tời . Tang của trục tời được xem là một đĩa tròn đối xứng bán kính R, trọng lượng Q, mô men quán tính đối với trục vuông góc với mặt phẳng tang và đi qua tâm O là J_0. Quấn vào tang tời một sợi dây mềm nhẹ không giãn, rồi buộc vào đầu dây tự do một vật nặng A có trọng lượng $P = mg$ và đặt vật nặng này lên mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α (xem hình vẽ 3.12). Cho biết hệ số ma sát trượt động giữa vật A và mặt phẳng nghiêng là μ. Tìm biểu thức vận tốc góc của tời dưới dạng hàm của góc quay cuả nó. Biết rằng ban đầu hệ đứng yên.

Lời giải. Hệ khảo sát gồm tời và vật nặng A. Tời chuyển động quay quanh trục O cố định. Vật nặng A chuyển động thẳng theo phương của mặt phẳng nghiêng. Các lực sinh công gồm ngẫu lực M_0, trọng lượng vật nặng $\vec{P}$, và lực ma sát trượt động $\vec{F}_{ms}$ (xem hình 3.12).



Hình 3.12

Biểu thức động năng của hệ

$$T = \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{1}$$

Do liên hệ động học $v_A = R\omega$ ta có

$$T = \frac{1}{2}\left(J_0 + mR^2\right)\omega^2 \tag{2}$$

Tổng công của các lực khi tời quay một góc φ ($s = R\varphi$) là

$$\sum A_k = M_0\varphi - mg\sin\alpha.s - F_{ms}.s = \left(M_0 - mgR\sin\alpha - F_{ms}R\right)\varphi$$

Chú ý tới định luật Coulomb về lực ma sát trượt động

$$F_{ms} = \mu N = \mu\left(mg\cos\alpha\right)$$

biểu thức tổng công có dạng

$$\sum A_k = \left[M_0 - mgR\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right]\varphi \qquad (3)$$

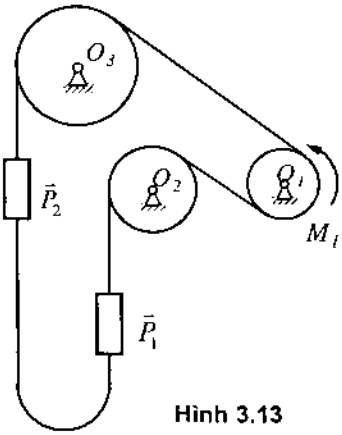
Do ban đầu hệ đứng yên $(T_0 = 0)$ nên theo định lý biến thiên động năng ta có

$$T - T_0 = \sum A_k \Rightarrow \frac{1}{2}\left(J_0 + mR^2\right)\omega^2 = \left[M_0 - mgR\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right]\varphi \qquad (4)$$

Từ đó suy ra

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left[M_0 - mgR\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)\right]\varphi}{J_0 + mR^2}} \qquad (5)$$

Thí dụ 3.2. Một động cơ điện kéo một hệ thống truyền động dùng xích như hình vẽ 3.13. Hệ thống đó làm việc như sau: Lúc mở máy xích bắt đầu chuyển động với gia tốc a. Khi vận tốc của xích đạt giá trị v_{max} thì điều chỉnh mômen phát động của động cơ để giữ nguyên vận tốc đó. Đường kính của trục chính gắn với động cơ là $2r_1$, đường kính của hai ròng rọc khác là $2r_2$ và $2r_3$. Đối với trục quay của chúng, mômen quán tính khối của trục quay chính là J_1, mô men của các ròng rọc là J_2 và J_3. Trọng lượng của vật nặng được kéo lên là P_1 và của vật được hạ xuống là P_2. Xích có chiều dài l, trọng lượng trên một đơn vị chiều dài của xích là q. Hãy tính công suất của động cơ trong quá trình mở máy và quá trình bình ổn $v = v_{max}$.



Hình 3.13

Lời giải. Hệ khảo sát gồm 3 vật rắn quay quanh các trục cố định tương ứng O_1, O_2, O_3, dây xích và hai vật nặng chuyển động thẳng trên hai quỹ đạo song song. Các lực sinh công gồm mômen phát động M_1, các trọng lượng P_1, P_2 của hai vật nặng.

Biểu thức động năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}v_2^2 + \frac{1}{2}\frac{ql}{g}v^2 \qquad (1)$$

Do các mối quan hệ động học, ta có

$$v = v_1 = v_2 = r_1\omega_1 = r_2\omega_2 = r_3\omega_3 \qquad (2)$$

Thế vào biểu thức động năng ta được

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} + \frac{P_1 + P_2 + ql}{g}\right)v^2 \qquad (3)$$

Từ (3) ta suy ra

$$dT = \left(\frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} + \frac{P_1 + P_2 + ql}{g} \right) v dv \qquad (4)$$

Biểu thức công của các lực khi động cơ quay một góc $d\varphi_1$

$$d'A = M_1 d\varphi_1 + P_2 ds - P_1 ds = \left(\frac{M_1}{r_1} + P_2 - P_1 \right) ds \qquad (5)$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng $dT = d'A$ ta có

$$\left(\frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} + \frac{P_1 + P_2 + ql}{g} \right) v dv = \left(\frac{M_1}{r_1} + P_2 - P_1 \right) ds \qquad (6)$$

Chia cả hai vế của (6) cho dt suy ra

$$\frac{M_1}{r_1} = \left(\frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} + \frac{P_1 + P_2 + ql}{g} \right) a + \left(P_1 - P_2 \right)$$

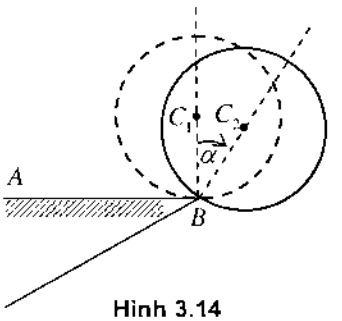
Vậy công suất của động cơ trong giai đoạn mở máy là

$$N = M_1 \omega_1 = \frac{M_1}{r_1} v = \left[\left(\frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} + \frac{P_1 + P_2 + ql}{g} \right) a + \left(P_1 - P_2 \right) \right] v \qquad (7)$$

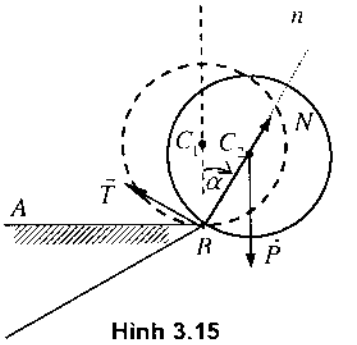
Công suất của động cơ trong giai đoạn bình ổn

$$v = v_{\max}, \quad a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = \left(P_1 - P_2 \right) v_{\max} \qquad (8)$$

Thí dụ 3.3. Sau khi nhận được vận tốc ban đầu khá nhỏ, trụ tròn đồng chất bán kính r lăn không trượt khỏi bệ nằm ngang AB (hình 3.14). Bệ có cạnh biên B nhọn và song song với đường sinh của trụ. Khi trụ rời khỏi bệ, mặt phẳng đi qua trục của trụ và cạnh biên B nghiêng với phương thẳng đứng một góc $CBC_1 = \alpha$. Bỏ qua ma sát lăn. Xác định vận tốc góc của trụ lúc nó tách rời khỏi bệ và giá trị của góc α khi đó.



Hình 3.14



Hình 3.15

Lời giải. Áp dụng định lý biến thiên động năng

$$T - T_0 = \sum A_k \qquad (1)$$

Trong bài này, biểu thức động năng của trụ có dạng

$$T_0 = 0, \quad T = \frac{1}{2} J_{Bz}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(J_{Cz} + mr^2\right)\omega_1^2 = \frac{3}{4} mr^2\omega_1^2 \qquad (2)$$

Biểu thức công của trọng lực là

$$\sum A_k = mgr\left(1 - \cos\alpha\right) \qquad (3)$$

Thế (2) và (3) vào (1) suy ra

$$\frac{3}{4} mr^2\omega_1^2 = mgr\left(1 - \cos\alpha\right) \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{4g}{3r}\left(1 - \cos\alpha\right) \qquad (4)$$

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có

$$m\vec{a}_C = \vec{N} + \vec{P} + \vec{T} \qquad (5)$$

Chiếu (5) lên trục pháp tuyến chính n, ta được

$$ma_C^n = N - mg\cos\alpha \qquad (6)$$

Từ đó suy ra: $N = mg\cos\alpha - m\omega_1^2 r$

Khi trụ bắt đầu rời khỏi thành B thì $N = 0$. Thế (4) vào (6) suy ra

$$\cos\alpha = \frac{4}{3}\left(1 - \cos\alpha\right) \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = 4/7 \Rightarrow \alpha = \arccos\left(4/7\right) \qquad (7)$$

Vận tốc góc của trụ khi rời khỏi bệ nằm ngang là

$$\omega_1^2 = \frac{4g}{3r}\left(1 - \frac{4}{7}\right) \Rightarrow \omega_1 = 2\sqrt{\frac{g}{7r}} \qquad (8)$$

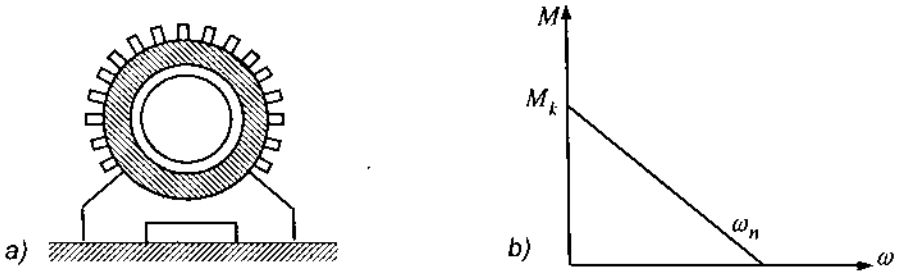
Thí dụ 3.4. Khởi động môtơ điện. Để khởi động mô tơ điện từ trạng thái tĩnh ta tác dụng vào rôto một mômen $M(\omega)$ có đồ thị như hình vẽ 3.16b. Cho biết mômen quán tính khối của môtơ đối với trục quay là J. Hãy xác định

a) Vận tốc góc của rôto $\omega(t)$. Cho biết $\omega(0) = 0$,

b) Khi nào thì vận tốc $\omega(t)$ đạt giá trị bình ổn ω_n,

c) Công suất $W(t)$ của mômen phát động $M(t)$,

d) Công của mômen phát động $M(t)$ trong quá trình mở máy.



Hình 3.16

Lời giải.

a) Từ định lý biến thiên mômen động lượng

$$J\frac{d\omega}{dt} = M(\omega) = M_k\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right) \tag{1}$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{d\omega}{dt} + \lambda\omega = \lambda\omega_n \quad \text{với} \quad \lambda = \frac{M_k}{J\omega_n} \tag{2}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2) có dạng

$$\omega(t) = \omega_n + Ce^{-\lambda t} \tag{3}$$

Hằng số tích phân C được xác định từ điều kiện đầu $\omega(0) = 0$. Ta có

$$\omega(t) = \omega_n\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \tag{4}$$

b) Từ (4) suy ra

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t) = \omega_n \tag{5}$$

Như thế, về mặt lý thuyết khi $t \to \infty$ thì $\omega(t) \to \omega_n$.

c) Công suất của mômen phát động. Theo định nghĩa công suất ta có

$$N(t) = M\left[\omega(t)\right]\omega(t) = M_k\omega_n\left[1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right]\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$$

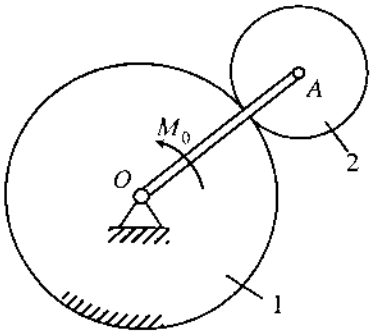
$$= M_k\omega_n\left[e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right] \tag{6}$$

d) Công của mômen phát động trong qua trình mở máy. Do $T_O = 0$, theo định lý biến thiên động năng xác định được

$$T - T_0 = A \Rightarrow A = \frac{1}{2}J\omega_n^2 \tag{7}$$

Thí dụ 3.5. Một cơ cấu hành tinh nằm trong mặt phẳng nằm ngang (hình 3.17) chuyển động từ trạng thái tĩnh nhờ một ngẫu lực có mômen không đổi M_0

đặt vào tay quay. Tay quay OA quay quanh trục cố định đi qua O làm cho bánh răng 2 lăn không trượt trên bánh răng 1 cố định. Xem tay quay OA là thanh đồng chất và có trọng lượng là Q, bánh răng 2 là đĩa tròn đồng chất bán kính r_2, trọng lượng là P, bánh răng 1 hình tròn, bán kính r_1. Bỏ qua các lực cản. Hãy xác định gia tốc góc của tay quay.



Hình 3.17

Lời giải. Khảo sát chuyển động của cơ cấu hành tinh. Trong đó tay quay OA quay quanh O, bánh 1 cố định, bánh 2 chuyển động phẳng. Cơ hệ có một bậc tự do. Lực tác dụng sinh công là ngẫu lực M_0.

Đầu tiên ta tính động năng của hệ

$$T = T_{OA} + T_2 \tag{1}$$

Trong đó

$$T_{OA} = \frac{1}{2}J_O\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\frac{(r_1+r_2)^2}{3}\omega^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_A\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_A^2 = \frac{P}{4g}r_2^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_A^2$$

Do $v_A = (r_1+r_2)\omega$, $\omega_2 = v_A/r_2 = (r_1+r_2)\omega/r_2$ nên

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2Q+9P}{6g}(r_1+r_2)^2\omega^2 \tag{2}$$

Biểu thức công

$$\sum A_k = M_0\varphi \tag{3}$$

Thế (2) và (3) vào định lý biến thiên động năng $T - T_0 = \sum A_k$

ta được $\dfrac{2Q+9P}{12g}(r_1+r_2)^2\omega^2 = M_0\varphi$ (4)

Đạo hàm theo t hai vế của phương trình (4) ta được

$$\varepsilon = \frac{6M_0g}{(2Q+9P)(r_1+r_2)^2} = \text{const} \tag{5}$$

3. ĐỊNH LÝ BẢO TOÀN CƠ NĂNG

3.1. Các khái niệm cơ bản

a) Lực có thế

Cho $\vec{F}$ là lực phụ thuộc vào vị trí điểm đặt của nó $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$. Trong trường hợp tổng quát, công nguyên tố của lực $d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ không phải là vi phân đúng của một hàm. Tuy nhiên trong một số trường hợp đặc biệt, $d'A$ có thể là vi phân của một hàm nào đó.

Định nghĩa 3.1. Lực chỉ phụ thuộc vị trí $\vec{F}(x, y, z)$ được gọi là lực có thế, nếu công nguyên tố của nó là vi phân đúng của một hàm $U(x, y, z)$ nào đó

$$d'A(\vec{F}) = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \tag{3.1}$$

Khi đó, hàm $U(x, y, z)$ được gọi là hàm lực.

b) Thế vị của lực có thế

Định nghĩa 3.2. Cho $\vec{F}(x, y, z)$ là lực có thế. Hàm $\Pi(x, y, z)$ xác định bởi công thức

$$d\Pi(x, y, z) = -dU(x, y, z) = -d'A(\vec{F}) \tag{3.2}$$

được gọi là thế vị của lực có thế $\vec{F}(x, y, z)$.

Chú ý: Do thế vị của lực có thế được định nghĩa bởi biểu thức vi phân (3.2) nên thế vị của lực có thế được xác định sai khác một hằng số cộng.

c) Tính chất của lực có thế

– Tính chất 1: Nếu $\vec{F}(x, y, z)$ là lực có thế, thì

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \tag{3.3}$$

Chứng minh. Theo định nghĩa

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{3.4}$$

Mặt khác theo định nghĩa vi phân của hàm số ta có hệ thức

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz \tag{3.5}$$

Từ các biểu thức (3.2), (3.4) và (3.5) suy ra (3.3).

– *Tính chất 2:* Nếu $\vec{F}(x,y,z)$ là lực có thế, thì công hữu hạn của nó không phụ thuộc vào hình dáng quỹ đạo mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm đầu và điểm cuối của quỹ đạo.

Chứng minh. Theo (3.1) và (3.2) ta có

$$d'A = \vec{F}.d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -d\Pi$$

Từ đó suy ra

$$A_{\overset{\frown}{M_1M_2}} = \int\limits_{\overset{\frown}{M_1M_2}} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = -\int\limits_{\overset{\frown}{M_1M_2}} d\Pi$$

$$= \Pi\left(x_1, y_1, z_1\right) - \Pi\left(x_2, y_2, z_2\right) \qquad (3.6)$$

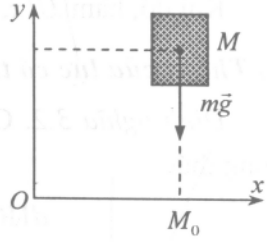
– *Tính chất 3:* Thế vị của lực có thế $\vec{F}(x,y,z)$ tại vị trí $M(x,y,z)$ so với vị trí $M_O(x_O,y_O,z_O)$ là công của lực $\vec{F}(x,y,z)$ khi điểm đặt của lực di chuyển từ vị trí M tới vị trí M_O.

Chứng minh. Theo công thức (3.6)

$$A_{\overset{\frown}{MM_0}} = \int\limits_{\overset{\frown}{MM_0}} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = -\int\limits_{M}^{M_O} d\Pi$$

$$= \Pi(x,y,z) - \Pi(x_0,y_0,z_0).$$

Vậy $\quad \Pi(x,y,z) = \Pi(x_0,y_0,z_0) + A_{\overset{\frown}{MM_0}}.$



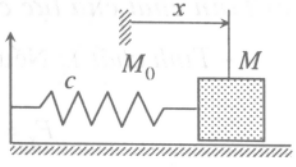
Hình 3.18

d) Các thí dụ minh hoạ

Để minh hoạ ta xác định các biểu thức thế vị của trọng lực và thế vị của lực đàn hồi tuyến tính. Thế vị của trọng lực có dạng (hình 3.18)

$$\Pi = A_{\overset{\frown}{MM_0}} = mgy \qquad (1)$$

Bây giờ chuyển sang tính thế vị của lực đàn hồi tuyến tính (hình 3.19). Tại M_0 lò xo chưa bị dãn, ta có



Hình 3.19

$$\Pi = A_{\overset{\frown}{MM_0}} = \frac{1}{2}cx^2 \qquad (2)$$

đ) Thế năng của cơ hệ

Định nghĩa 3.3. Thế năng của cơ hệ ở vị trí khảo sát so với vị trí quy chiếu đã chọn trước là tổng các thế vị của các lực có thế, tác dụng lên cơ hệ, ở vị trí khảo sát so với vị trí quy chiếu đã chọn.

Chú ý:

– Do thế vị của lực có thế được xác định sai khác một hằng số cộng nên thế

năng của cơ hệ cũng được xác định sai khác một hằng số cộng, phụ thuộc vào vị trí quy chiếu ta chọn.

– Chú ý đến định nghĩa thế vị của lực có thế ta có thể phát biểu định nghĩa 3.3 dưới dạng khác như sau: Thế năng của cơ hệ ở vị trí khảo sát so với vị trí quy chiếu đã chọn trước là tổng công của của các lực có thế tác dụng lên cơ hệ khi cơ hệ chuyển từ vị trí khảo sát về vị trí quy chiếu đã chọn.

e) Khái niệm trường lực

Định nghĩa 3.4. Khoảng không gian vật lý mà khi các chất điểm và các vật rắn chuyển động trong đó chỉ chịu tác dụng của các lực phụ thuộc vào vị trí được gọi là trường lực.

Khoảng không gian vật lý mà khi các chất điểm và các vật rắn chuyển động trong đó chỉ chịu tác dụng của các lực có thế được gọi là trường lực thế.

f) Sự phân loại các lực. Đến đây ta đã đưa ra ba cách phân loại các lực tác dụng lên một cơ hệ:

– Ngoại lực và nội lực,

– Lực hoạt động và phản lực liên kết lý tưởng,

– Lực có thế và lực không có thế.

Tuỳ từng bài toán chúng ta có thể áp dụng mỗi cách phân loại lực khác nhau.

3.2. Định lý bảo toàn cơ năng

a) Khái niệm Cơ hệ bảo toàn. Cơ hệ chỉ chịu tác dụng của các lực hoạt động có thế được gọi là cơ hệ bảo toàn (hay gọi tắt là hệ bảo toàn).

b) Định lý 3.1. Khi cơ hệ chỉ chịu tác dụng của các lực hoạt động có thế, thì tổng động năng và thế năng của cơ hệ luôn luôn là hằng số

$$T + \Pi = \text{const}. \tag{3.8}$$

Chứng minh. Theo định lý biến thiên động năng ta có

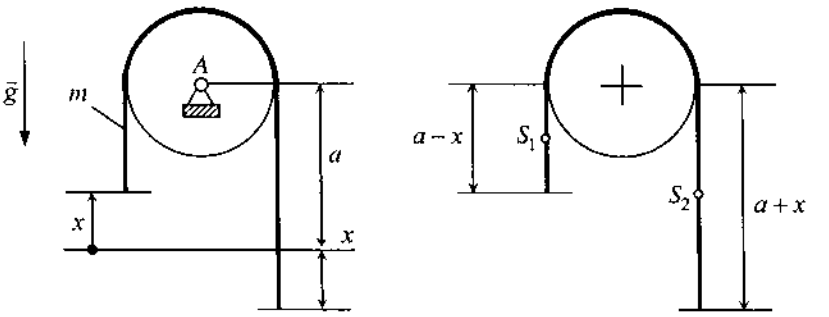
$$dT = d'A = -d\Pi$$

Do đó $$d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow T + \Pi = \text{const}$$

Thí dụ 3.6. Cho một sợi dây có khối lượng vắt qua ròng rọc A. Cho biết mômen quán tính khối của ròng rọc đối với trục đi qua A là J_A, bán kính ròng rọc r. Các kích thước cho trên hình vẽ. Dây có khối lượng là m, chuyển động với điều kiện đầu $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = x_0$. Bỏ qua ma sát. Hãy xác định

a) Vận tốc của dây phụ thuộc vào x khi $x \le a$.

b) Quy luật chuyển động của dây x(t).



Hình 3.20

Lời giải. Hệ khảo sát là ròng rọc và dây nặng. Khi dây vắt trên ròng rọc, nếu bỏ qua ma sát thì mọi điểm trên dây có vận tốc là v có trị số như nhau: $v = r\omega$.

Động năng của hệ là

$$T = \frac{1}{2}J_A\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_A}{r^2} + m\right)\dot{x}^2 \qquad (1)$$

Thế năng của hệ gồm có thế năng của hai phần dây vắt ở hai bên ròng rọc, hai phần dây này có khối lượng tương ứng là m_1 và m_2. Phần dây vắt trên ròng rọc có trọng tâm không đổi, nên khi tính công hoặc thế năng, ta không cần quan tâm. Từ hình (3.20) ta có

$$\Pi = m_1 g x_{C_1} + m_2 g x_{C_2} = m_1 g\frac{a+x}{2} + m_2 g\frac{a-x}{2} \qquad (2)$$

Khối lượng trên một đơn vị dài của dây là

$$\rho = \frac{m}{2a + \pi r} \qquad (3)$$

Từ đó suy ra

$$m_1 = \rho(a - x),\ m_2 = \rho(a + x) \qquad (4)$$

Thế (4) vào (2) ta được

$$\Pi = \rho g\left(a^2 - x^2\right) \qquad (5)$$

Áp dụng định lý bảo toàn cơ năng ta có

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{J_A}{r^2} + m\right)\dot{x}\ddot{x} - 2\rho g x\dot{x} = 0$$

Từ đó suy ra phương trình vi phân

$$\ddot{x} - \frac{2\rho g}{J_A/r^2 + m}x = 0 \qquad (6)$$

Nếu đưa vào ký hiệu

$$k^2 = \frac{2\rho g}{J_A / r^2 + m}, \tag{7}$$

thì từ phương trình vi phân ở trên suy ra

$$\ddot{x} - k^2 x = 0. \tag{8}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (8) được tìm dưới dạng

$$x(t) = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \tag{9}$$

Các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện đầu $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = x_0 \\ \dot{x}(0) = (C_1 - C_2)k = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2} x_0$$

Vậy

$$x(t) = \frac{1}{2} x_0 \left(e^{kt} + e^{-kt} \right) = x_0 \cosh(kt) \tag{10}$$

Mặt khác cũng từ định lý bảo toàn cơ năng

$$T_0 + \Pi_0 = T_1 + \Pi_1$$

ta có

$$\rho g \left(a^2 - x_0^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{J_A}{r^2} + m \right) \dot{x}^2 + \rho g \left(a^2 - x^2 \right) \tag{11}$$

Từ đó suy ra

$$\dot{x} = k \sqrt{x^2 - x_0^2} \tag{12}$$

Chương 4

MỘT SỐ NGUYÊN LÝ CƠ HỌC

Trong các chương trước, xuất phát từ các tiên đề Newton, chúng ta đã khảo sát chuyển động của cơ hệ. Tuy nhiên, cũng có thể xuất phát từ các nguyên lý cơ học khảo sát chuyển động của cơ hệ. Người ta thường sử dụng các nguyên lý cơ học để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Trong chương này giới thiệu một số khái niệm quan trọng trong cơ học các hệ chịu liên kết. Đó là khái niệm di chuyển ảo và khái niệm số bậc tự do của cơ hệ một cách tổng quát. Sau đó trình bày một số nguyên lý cơ học cơ bản và hay được sử dụng. Đó là *Nguyên lý công ảo*, *Nguyên lý d'Alembert*, *Nguyên lý d'Alembert–Lagrange*. Ở cuối chương trình bày việc áp dụng nguyên lý d'Alembert–Lagrange thành lập phương trình Lagrange loại 2.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Liên kết và phân loại liên kết. Cơ hệ tự do và cơ hệ không tự do

a) Liên kết

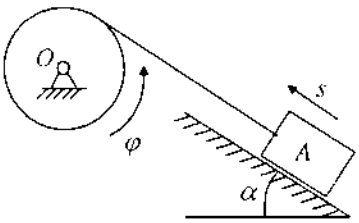
Định nghĩa 1.1. Liên kết là các điều kiện ràng buộc chuyển động của các chất điểm và các vật rắn thuộc hệ.

Các điều kiện ràng buộc này thường được biểu diễn dưới dạng các phương trình hoặc các bất phương trình. Các điều kiện ràng buộc này độc lập với các lực tác dụng lên cơ hệ và các điều kiện đầu của chuyển động.

b) Các thí dụ về thiết lập các phương trình liên kết

Trước hết chúng ta xét hệ gồm tời nâng vật nặng (hình 4.1). Tời O có bán kính r. Khi tời quay quanh O một góc φ thì vật nặng A di chuyển được một đoạn s. Ta có phương trình liên kết

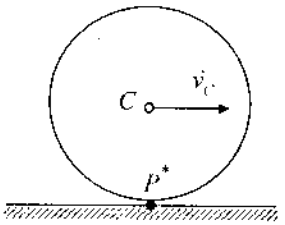
$$f(s,\varphi) = s - r\varphi = 0$$



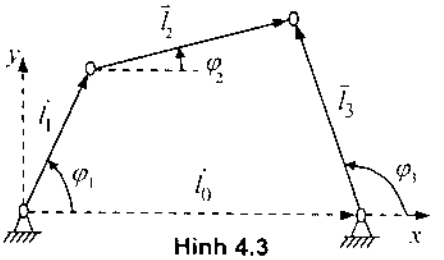
Hình 4.1

Để làm thí dụ thứ hai, xét bánh xe bán kính r lăn không trượt trên đoạn đường thẳng (hình 4.2). Do P^* là tâm vận tốc tức thời ta có hệ thức

$$v_C = r\omega$$



Hình 4.2



Hình 4.3

Tích phân phương trình trên ta được phương trình liên kết

$$f(x_C, \varphi) = x_C - r\varphi = 0$$

Cuối cùng ta xét chuyển động của cơ cấu 4 khâu bản lề (hình 4.3). Từ hình vẽ ta có hệ thức

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_0 + \vec{l}_3$$

Chiếu hệ thức trên lên hai trục toạ độ x và y ta được hai phương trình liên kết

$$f_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 - l_3 \cos\varphi_3 - l_0 = 0$$
$$f_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 - l_3 \sin\varphi_3 = 0$$

Qua các thí dụ trên ta thấy các phương trình liên kết thường có dạng

$$f_k(q_1, q_2, \ldots, q_m) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r) \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.2. Khi các liên kết được biểu diễn dưới dạng các phương trình ràng buộc các toạ độ suy rộng của hệ như các phương trình (1.1) thì liên kết được gọi là liên kết hình học, giữ và dừng.

c) Sự phân loại liên kết

Dựa vào dạng của các phương trình liên kết hoặc các bất phương trình liên kết, người ta phân loại các liên kết như sau

– *Liên kết giữ và liên kết không giữ*: Nếu các điều kiện ràng buộc chuyển động của cơ hệ được thể hiện bằng các phương trình thì liên kết được gọi là liên kết giữ (hay liên kết hai phía). Ngược lại nếu các điều kiện ràng buộc chuyển động cơ hệ được thể hiện bằng các bất phương trình thì liên kết được gọi là liên kết không giữ (hay liên kết một phía).

$$f_s(q_k, \dot{q}_k, t) > 0: \text{ liên kết không giữ}$$
$$f_s(q_k, \dot{q}_k, t) = 0: \text{ liên kết giữ}$$

Dưới đây ta chỉ xét các liên kết giữ.

– *Liên kết hôlômôm* và liên kết không hôlômôm*: Nếu các phương trình liên

* Năm 1894, nhà bác học người Đức Heinrich Herz (1857–1894), sử dụng thuật ngữ hôlônôm lần đầu tiên.

kết không chứa yếu tố vận tốc (hoặc nếu có chứa các yếu tố vận tốc thì có thể tích phân lên làm mất chúng đi) thì liên kết được gọi là liên kết hôlônôm (hoặc liên kết hình học). Nếu các phương trình liên kết có chứa các yếu tố vận tốc mà không thể tích phân làm mất chúng đi thì liên kết được gọi là liên kết không hôlônôm (hoặc liên kết động học).

$f_s(q_k, \dot{q}_k, t) = 0$: liên kết không hôlônôm,

$f_s(q_k, t) = 0$: liên kết hôlônôm.

Dưới đây ta chỉ xét các liên kết hôlônôm.

– *Liên kết dừng và liên kết không dừng*: Nếu phương trình liên kết không chứa rõ biến thời gian thì liên kết được gọi là liên kết dừng. Nếu phương trình liên kết chứa rõ biến thời gian thì liên kết là không dừng.

$f_s(q_k, t) = 0$: liên kết không dừng,

$f_s(q_k) = 0$: liên kết dừng.

***d) Cơ hệ tự do và cơ hệ chịu liên kết** (không tự do)*

Định nghĩa 1.3. Cơ hệ tự do là cơ hệ mà vị trí và vận tốc của các chất điểm và các vật rắn thuộc hệ có thể nhận các giá trị tuỳ ý. Ngược lại, cơ hệ được gọi là cơ hệ chịu liên kết. Đối với cơ hệ chịu liên kết vị trí và vận tốc của các chất điểm và các vật rắn thuộc hệ bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học.

Định nghĩa 1.4. Một cơ hệ không tự do mà chỉ chịu các liên kết hôlônôm được gọi là hệ hôlônôm. Ngược lại, nếu tồn tại ít nhất một liên kết không hôlônôm, cơ hệ được gọi là hệ không hôlônôm.

Trong kỹ thuật ta thường hay gặp các cơ hệ chịu các liên kết hôlônôm (liên kết hình học), giữ và dừng. Trong giáo trình này ta chỉ xét các loại cơ hệ chịu liên kết hôlônôm, giữ và dừng.

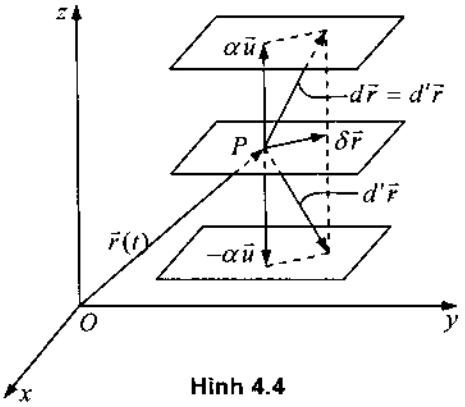
1.2. Di chuyển khả dĩ, di chuyển ảo và số bậc tự do của cơ hệ

a) Di chuyển khả dĩ và di chuyển ảo của chất điểm

Định nghĩa 1.5. Di chuyển khả dĩ của chất điểm là di chuyển vô cùng bé của chất điểm từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận mà phù hợp với liên kết. Ký hiệu $d'\vec{r}$.

Định nghĩa 1.6. Di chuyển ảo của chất điểm là di chuyển vô cùng bé tưởng tượng của chất điểm từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận mà phù hợp với liên kết *tại thời điểm khảo sát*. Ký hiệu $\delta\vec{r}$.

Thí dụ 4.1. Xét một chất điểm P di chuyển trên sàn của một thang máy đang chuyển động lên phía trên với vận tốc $\vec{u}$ (hình 4.4). Ở đây, chất điểm chịu liên kết không dừng (phương trình sàn thang máy).



Hình 4.4

Di chuyển ảo của chất điểm P là các di chuyển nhỏ $\delta\vec{r}$ nằm trên sàn thang máy (tưởng tượng thang máy bị dừng lại tức thời). Di chuyển thực của chất điểm P là tổng hợp hai chuyển động $d\vec{r} = \delta\vec{r} + \alpha\vec{u}$ (α là một hằng số dương). Di chuyển khả dĩ của điểm P là hai di chuyển

$$d\vec{r} = d'\vec{r} = \delta\vec{r} + \alpha\vec{u} \quad \text{và} \quad d'\vec{r} = \delta\vec{r} - \alpha\vec{u}$$

Chú ý:

1) Di chuyển khả dĩ là di chuyển vô cùng bé phù hợp với liên kết, không quan tâm đến nguyên nhân gây nên chuyển động (lực tác dụng), còn di chuyển thực vô cùng bé vừa phù hợp với liên kết vừa bị chi phối bởi lực tác dụng. Như thế di chuyển thực vô cùng bé là trường hợp riêng của di chuyển khả dĩ.

2) Di chuyển ảo là di chuyển vô cùng bé tưởng tượng mà phù hợp với liên kết tại thời điểm khảo sát (nghĩa là trong phương trình liên kết, thời gian t xem là cố định, $\delta t = 0$).

3) Nếu liên kết là dừng (không phụ thuộc hiển vào thời gian) thì các di chuyển ảo sẽ trùng với các di chuyển khả dĩ và khi đó di chuyển thực vô cùng bé là một trường hợp riêng của di chuyển ảo. Nếu liên kết là không dừng thì di chuyển ảo là di chuyển hoàn toàn do tưởng tượng, không thể xảy ra trong thực tế. Trong trường hợp này đó di chuyển thực vô cùng bé không nằm trong tập các di chuyển ảo.

b) Phương trình ràng buộc các thành phần di chuyển ảo của chất điểm

Xét một chất điểm P chuyển động trên một mặt Σ đang chuyển động. Phương trình liên kết có dạng

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{1.2}$$

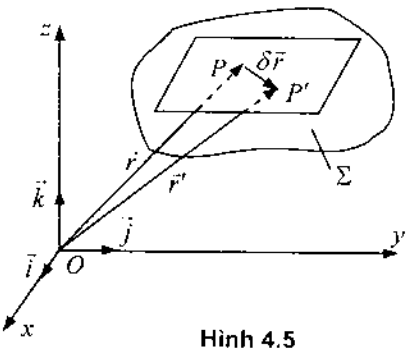
Phương trình (1.2) là phương trình của một mặt Σ di chuyển trong không gian ba chiều x, y, z. Do các toạ độ của chất điểm luôn thoả mãn phương trình (1.2) nên đạo hàm theo thời gian ta được

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{1.3}$$

Nhân hai vế của phương trình (1.3) với dt ta có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 . \qquad (1.4)$$

Di chuyển thực của chất điểm $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ có các thành phần trên các trục toạ độ là dx, dy, dz. Như thế các thành phần dx, dy, dz của di chuyển thực $d\vec{r}$ phải thoả mãn (1.4).



Hình 4.5

Xét tập các vị trí P' của điểm P rất gần với vị trí của P tại thời điểm xác định t và phù hợp với liên kết tại thời điểm này (hình 4.5). Vị trí của điểm P

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

Vị trí của điểm P'

$$\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r} = (x + \delta x)\vec{i} + (y + \delta y)\vec{j} + (z + \delta z)\vec{k} .$$

Trong đó $\delta x, \delta y, \delta z$ là hình chiếu của $\delta\vec{r}$ trên các trục Ox, Oy, Oz

$$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$$

Do toạ độ điểm P' phải thoả mãn phương trình liên kết tại thời điểm t xác định đó, nên ta có phương trình

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = 0 \qquad (1.5)$$

Áp dụng khai triển Taylor

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \cdots = 0$$

Bỏ qua các vô cùng bé bậc cao hơn 1 so với $\delta x, \delta y, \delta z$ ta có phương trình ràng buộc các $\delta x, \delta y, \delta z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \qquad (1.6)$$

Như thế các thành phần $\delta x, \delta y, \delta z$ của di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ phải thoả mãn phương trình (1.6).

Người ta thường gọi di chuyển ảo $\delta\vec{r}$ là biến phân đẳng thời của véctơ $\vec{r}$, còn các hình chiếu của nó $\delta x, \delta y, \delta z$ được gọi là các biến phân đẳng thời của toạ độ. Khi thiết lập biểu thức (1.6) ta coi thời gian t là không đổi ($\delta t = 0$), nên các biến phân $\delta x, \delta y, \delta z$ được gọi là các biến phân đẳng thời.

c) Di chuyển khả dĩ và di chuyển ảo của vật rắn

Do chuyển động của vật rắn có thể phân tích thành thành chuyển động của khối tâm của vật rắn và chuyển động quay tương đối quanh khối tâm của nó, nên di chuyển thực vô cùng bé của vật rắn có thể ký hiệu bằng hai véc tơ $d\vec{r}_C, d\vec{\varphi}$. Trong đó $d\vec{r}_C$ là di chuyển vô cùng bé của khối tâm, còn $d\vec{\varphi}$ là góc quay vô cùng bé của vật rắn quay quanh trục quay tức thời đi qua khối tâm.

Định nghĩa 1.7. Di chuyển khả dĩ của vật rắn là những di chuyển vô cùng bé của vật rắn từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận mà phù hợp với liên kết. Ký hiệu là $d'\vec{r}_C$, $d'\vec{\varphi}$.

Định nghĩa 1.8. Di chuyển ảo của vật rắn là những di chuyển vô cùng bé tưởng tượng của vật rắn từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận mà phù hợp với liên kết tại thời điểm đang xét. Ký hiệu là $\delta\vec{r}_C$, $\delta\vec{\varphi}$.

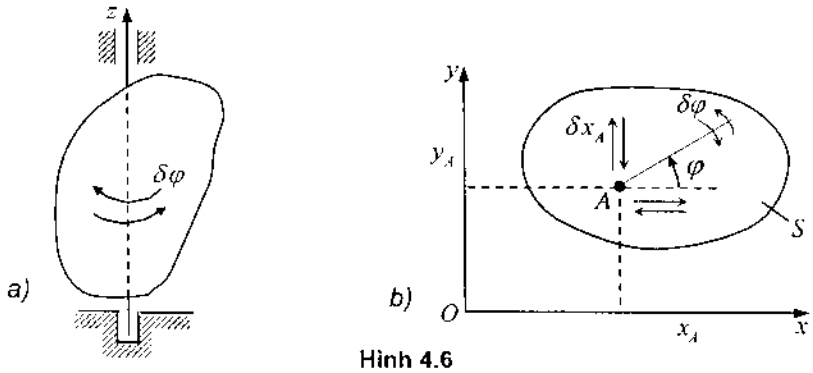
Dưới đây ta chỉ xét chuyển động của các vật rắn chịu các liên kết dừng. Khi đó di chuyển ảo của vật rắn trùng với di chuyển khả dĩ của vật rắn.

Ký hiệu:

– Di chuyển ảo của vật rắn tịnh tiến là $\delta\vec{r}$,

– Di chuyển ảo của vật rắn quay quanh một trục cố định là $\delta\varphi$ (hình 4.6a),

– Di chuyển ảo của hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng của nó là tập $\delta\vec{r}_A, \delta\varphi$ hay $\delta x_A, \delta y_A, \delta\varphi$ (hình 4.6b).



Hình 4.6

d) Di chuyển ảo của cơ hệ

Định nghĩa 1.9. Di chuyển ảo của cơ hệ là những di chuyển vô cùng bé tưởng tượng của các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận mà phù hợp với liên kết tại thời điểm khảo sát.

Khi chỉ khảo sát chuyển động của các cơ hệ gồm các chất điểm và các vật rắn chịu các liên kết dừng, thì di chuyển ảo của cơ hệ sẽ trùng với di chuyển khả dĩ của cơ hệ.

e) Số bậc tự do của cơ hệ

Định nghĩa 1.10. Số bậc tự do của cơ hệ là số tối đa các di chuyển ảo độc lập tuyến tính của cơ hệ.

Chú ý. Đối với hệ chịu các liên kết hôlônôm, số tối đa các toạ độ suy rộng độc lập tuyến tính đủ để xác định vị trí của cơ hệ cũng bằng số tối đa các di chuyển ảo độc lập tuyến tính của cơ hệ (ký hiệu là f). Còn đối với hệ chịu liên kết không hôlônôm, số các toạ độ suy rộng độc lập, đủ để xác định vị trí của cơ hệ có thể lớn hơn số bậc tự do của cơ hệ.

1.3. Công ảo, Liên kết lý tưởng, Lực suy rộng

a) Công ảo

Định nghĩa 1.11. Công của các lực tác dụng lên cơ hệ sinh ra trong một di chuyển ảo của cơ hệ được gọi là công ảo

$$\delta A = \sum \delta A(\vec{F}_k) = \sum \vec{F}_k.\delta\vec{r}_k \ . \tag{1.7}$$

Trong đó $\delta\vec{r}_k$ là di chuyển ảo của điểm đặt lực.

b) Liên kết lý tưởng

Định nghĩa 1.12. Liên kết lý tưởng là các liên kết giữ, mà công ảo của tất cả các phản lực liên kết trong di chuyển ảo bất kỳ của cơ hệ đều bằng không

$$\sum \vec{F}_k^c.\delta\vec{r}_k = 0 \ . \tag{1.8}$$

Chú ý: Sau này ta quy ước xếp các thành phần phản lực liên kết mà không thoả mãn hệ thức (1.8) vào tập các lực hoạt động.

c) Lực suy rộng của các lực hoạt động

Xét một hệ cơ học chịu tác dụng của các lực hoạt động $\vec{F}_1^a, \vec{F}_2^a, \ldots, \vec{F}_N^a$. Khi đó biểu thức công ảo có dạng

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^a.\delta\vec{r}_k \tag{1.9}$$

Giả sử cơ hệ được xác định bởi các toạ độ suy rộng $q_1, q_2, \ldots, q_m$ $(m \geq f)$. Khi đó, vị trí của các điểm đặt lực được xác định bởi các công thức

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_m, t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.10}$$

Từ (1.10) suy ra

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \tag{1.11}$$

Thế (1.11) vào (1.9) ta được

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a.\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = \sum_{i=1}^{m} Q_i.\delta q_i \qquad (1.12)$$

Định nghĩa 1.13. Lực suy rộng Q_i (của hệ các lực hoạt động tác dụng vào cơ hệ) ứng với toạ độ suy rộng q_i được định nghĩa bởi công thức

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^a.\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1.13)$$

d) Các phương pháp xác định lực suy rộng

Trong đoạn này ta đưa ra ba phương pháp để xác định lực suy rộng.

Phương pháp 1: Tính lực suy rộng dựa theo công thức định nghĩa (1.12) hoặc (1.13).

Phương pháp 2: Cho cơ hệ thực hiện các di chuyển ảo đặc biệt $\delta q_i \neq 0$, $\delta q_j = 0$ $(j \neq i)$ khi đó tính được

$$\delta A = [\ldots].\delta q_i \quad \Rightarrow \quad Q_i = [\ldots]$$

Phương pháp 3: Tính lực suy rộng của các lực có thế.

$$\delta A = \sum \vec{F}_k^a.\delta \vec{r}_k = -\delta\Pi \qquad (1)$$

Một mặt ta có

$$\sum \vec{F}_k^a.\delta \vec{r}_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_f\delta q_f \qquad (2)$$

Mặt khác

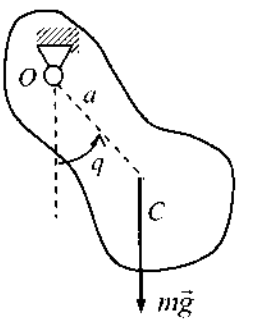
$$-\delta\Pi = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial\Pi}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial\Pi}{\partial q_f}\delta q_f \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$Q_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1.14)$$

e) Các thí dụ minh họa

Thí dụ 4.2. Cho mô hình con lắc vật lý như hình vẽ 4.7. Hãy xác định lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q.



Hình 4.7

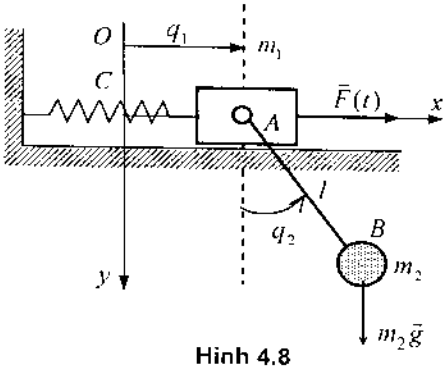
Lời giải. Thế năng của trọng lực là

$$\pi = -mga\cos q\,.$$

Do đó

$$Q = -\frac{\partial\pi}{\partial q} = mga\sin q\,.$$

Thí dụ 4.3. Một con lắc toán học khối lượng m_2, dài l được nối vào con trượt A khối lượng m_1. Con trượt được nối vào tường bằng lò xo với hệ số cứng là c như hình vẽ (4.8). Cho biết con trượt A có thể trượt không ma sát trên nền nhẵn. Hãy tìm các lực suy rộng của hệ.



Hình 4.8

Lời giải. Cho hệ thực hiện di chuyển ảo $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = 0$. Công ảo tương ứng là

$$\delta A = F(t)\delta q_1 \Rightarrow Q_1 = F(t).$$

Cho hệ thực hiện di chuyển ảo $\delta q_1 = 0,\ \delta q_2 \neq 0$.

Từ đó suy ra

$$\delta A = -m_2 gl \sin q_2 \delta q_2 \Rightarrow Q_2 = -m_2 gl \sin q_2.$$

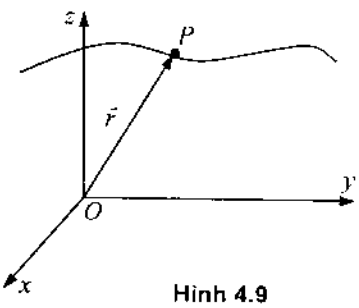
2. NGUYÊN LÝ CÔNG ẢO (NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN ẢO)

Nguyên lý công ảo (hay còn gọi là nguyên lý di chuyển ảo) thiết lập điều kiện cân bằng tổng quát của cơ hệ.

2.1. Khái niệm cơ hệ cân bằng

a) Chất điểm và hệ chất điểm

Định nghĩa 2.1. Một chất điểm ở cân bằng đối với một hệ quy chiếu đã chọn nếu như nó đứng yên đối với hệ quy chiếu đó $\vec{a} \equiv 0, \vec{v} \equiv 0$.



Hình 4.9

Chú ý rằng điều kiện $\vec{a} \equiv 0, \vec{v} \equiv 0$ có thể thay thế bằng điều kiện $\vec{a} \equiv 0, \vec{v}(0) = 0$.

Định nghĩa 2.2. Một hệ n chất điểm ở cân bằng đối với một hệ quy chiếu đã chọn nếu như từng chất điểm của hệ ở cân bằng đối với hệ quy chiếu đó.

$$\vec{a}_k \equiv 0, \quad \vec{v}_k(0) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

b) Vật rắn và hệ các vật rắn

Định nghĩa 2.3. Một vật rắn ở cân bằng đối với một hệ quy chiếu đã chọn nếu như nó đứng yên đối với hệ quy chiếu đó.

$$\vec{a}_C \equiv 0, \quad \vec{v}_C(0) = 0, \quad \vec{\varepsilon} \equiv 0, \quad \vec{\omega}(0) = 0$$

Trong đó, C là khối tâm của vật rắn.

Định nghĩa 2.4. Một hệ p vật rắn ở cân bằng đối với một hệ quy chiếu đã chọn, nếu như từng vật rắn thuộc hệ ở cân bằng đối với hệ quy chiếu đó.

$$\vec{a}_{C_k} = 0, \quad \vec{v}_{C_k}(0) = 0, \quad \vec{\varepsilon}_k = 0, \quad \vec{\omega}_k(0) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p \tag{2.2}$$

2.2. Nguyên lý công ảo (Nguyên lý di chuyển ảo)

Nguyên lý. Điều kiện cần và đủ để cho cơ hệ (gồm n chất điểm và p vật rắn) chịu các liên kết giữ và dừng ở cân bằng tại một vị trí đang xét là tổng công của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ đều triệt tiêu trong mọi di chuyển ảo bất kỳ của cơ hệ từ vị trí đang xét

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k^a . \delta \vec{r}_k = 0 \tag{2.3}$$

Chứng minh. Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp cơ hệ gồm n chất điểm.

Chứng minh điều kiện cần. Giả thiết cơ hệ đang cân bằng ở vị trí đang xét. Xét một chất điểm P_k thuộc cơ hệ chịu tác dụng của lực hoạt động $\vec{F}_k^a$ và lực liên kết lý tưởng $\vec{F}_k^c$. Do cơ hệ cân bằng ta có

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^a + \vec{F}_k^c = 0$$

Nhân vô hướng hai vế của đẳng thức trên với $\delta \vec{r}_k$ và lấy tổng theo tất cả các chất điểm của hệ ta được

$$\sum \vec{F}_k^a . \delta \vec{r}_k + \sum \vec{F}_k^c . \delta \vec{r}_k = 0$$

Do tính chất của các lực liên kết lý tưởng $\sum \vec{F}_k^c . \delta \vec{r}_k = 0$, nên

$$\sum \vec{F}_k^a . \delta \vec{r}_k = 0$$

Chứng minh điều kiện đủ. Ta sẽ chứng minh điều kiện đủ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử cơ hệ đang ở cân bằng $\vec{v}_k(0) = 0$, các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ thoả mãn điều kiện $\sum \vec{F}_k^a . \delta \vec{r}_k = 0$. Do tác dụng của các lực hoạt động, cơ hệ có thể vẫn tiếp tục cân bằng và cũng có thể không ở trạng thái cân bằng nữa, bắt đầu chuyển động. Giả sử cơ hệ không ở cân bằng nữa và bắt đầu chuyển động, theo định lý biến thiên động năng ta có

$$dT = d'A = \sum \vec{F}_k^a . d\vec{r}_k$$

Do $T(0) = \frac{1}{2} \sum m_k v_k^2(0) = 0$ nên $dT = T - T_0 > 0$. Từ đó suy ra

$$\sum \vec{F}_k^a . d\vec{r}_k > 0 \tag{1}$$

Do cơ hệ chịu các liên kết dừng nên di chuyển thực vô cùng bé của hệ $d\vec{r}_k$ thuộc vào tập các di chuyển ảo của hệ. Hệ thức (1) mâu thuẫn với giả thiết. Như thế giả sử của chúng ta về cơ hệ không cân bằng nữa là sai. Vậy cơ hệ vẫn tiếp tục ở cân bằng.

2.3. Các phương trình cân bằng của hệ hôlônôm

Giả sử cơ hệ hôlônôm có f bậc tự do. Vị trí của hệ được xác định bởi f toạ độ suy rộng $q_1, q_2, \ldots, q_f$. Như đã biết, biểu thức công ảo của các lực hoạt động trong toạ độ suy rộng đủ có dạng

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k^a . \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{f} Q_i . \delta q_i$$

Theo nguyên lý công ảo, điều kiện cân bằng của cơ hệ là

$$\delta A = \sum_{i=1}^{f} Q_i . \delta q_i = 0$$

Trong hệ hôlônôm các biến phân δq_i $(i = 1, 2, \ldots, f)$ độc lập với nhau do q_i là các toạ độ suy rộng đủ. Từ đó ta suy ra các phương trình cân bằng của cơ hệ hôlônôm

$$Q_i = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, f) \tag{2.4}$$

Trong trường hợp các lực hoạt động đều là các lực có thế, ta có các phương trình cân bằng của hệ bảo toàn

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, f) \tag{2.5}$$

2.4. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 4.4. Cho cơ cấu culít trong mặt phẳng nằm ngang và chịu tác dụng của các lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ như hình 4.10. Cho biết $OC = R$, $OK = l$. Tìm điều kiện cân bằng của cơ cấu.

Lời giải. Hệ khảo sát là cơ cấu culít. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi góc quay φ. Các lực hoạt động là $\vec{P}$ và $\vec{Q}$. Khâu OC có thể quay quanh O. Khâu AB có thể chuyển động tịnh tiến. Con trượt A chuyển động dọc theo thanh OC. Cho hệ thực hiện một di chuyển ảo $\delta\varphi$. Khi đó di chuyển ảo của các điểm đặt lực ký hiệu là δs_C và δs_B. Từ hình vẽ ta có

$$\delta s_C = R.\delta\varphi\,, \qquad \delta s_B = \delta s_A$$

Do $s_A = l\,\mathrm{tg}\varphi$, suy ra

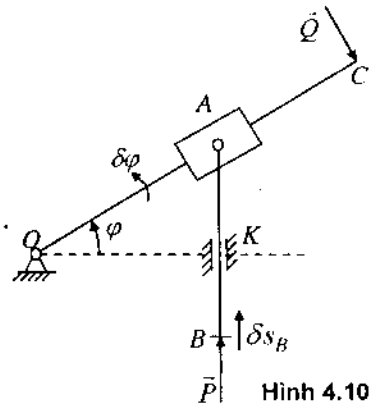
$$\delta s_A = \frac{l}{\cos^2\varphi}\delta\varphi \ .$$

Tổng công ảo của các lực hoạt động là

$$\sum \delta A_k = -Q\delta s_C + P\delta s_B = -QR\delta\varphi + \frac{Pl}{\cos^2\varphi}\delta\varphi \ .$$

Do đó

$$Q = \frac{Pl}{R\cos^2\varphi} \ .$$



Hình 4.10

Qua thí dụ trên thấy rằng sử dụng nguyên lý di chuyển ảo tìm điều kiện cân bằng của cơ cấu tương đối đơn giản.

Bây giờ ta trình bày việc áp dụng nguyên lý di chuyển ảo để xác định các phản lực liên kết. Nguyên tắc chung giải quyết bài toán này là: Giải phóng từng liên kết (hoặc toàn bộ các liên kết), thay liên kết bằng phản lực liên kết, biến lực liên kết lý tưởng cần tìm thành lực hoạt động. Do đó làm tăng số bậc tự do của cơ hệ. Sau đó cho hệ thực hiện những di chuyển ảo thích hợp để tính từng thành phần phản lực liên kết cần tìm.

Thí dụ 4.5. Cho dầm liên tục chịu tác dụng của các lực và có kích thước như hình 4.11a. Hãy xác định các phản lực liên kết tại *A, B, C*.

Lời giải. Hệ khảo sát là dầm ghép *ADC*. Các lực hoạt động là $\vec{P}_1$ và $\vec{P}_2$.

a) Xác định phản lực tại B. Ta giải phóng liên kết ở *B*, thay liên kết bằng phản lực liên kết (hình 4.11b). Cho hệ thực hiện một di chuyển ảo như hình vẽ 4.11c. Ta tính công ảo

$$\delta A = \delta A(\vec{P}_1) + \delta A(\vec{P}_2) + \delta A(\vec{N}_B) = P_1\cos 30^0.a\delta\varphi + P_2.\frac{3a}{2}\delta\varphi - N_B.2a\delta\varphi = 0 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra

$$P_1\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}P_2 - 2N_B = 0\,, \quad N_B = \frac{P_1\sqrt{3} + 3P_2}{4} \qquad (2)$$

b) Xác định phản lực tại C. Ta giải phóng liên kết tại *C*, thay bằng phản lực liên kết φ (hình 4.11d). Cho hệ thực hiện một di chuyển ảo như hình 4.11e, ta có

$$\delta A = \delta A(\vec{P}_2) + \delta A(\vec{N}_C) = P_2.a\delta\varphi - N_C.2a\delta\varphi = 0 \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra $\quad N_C = \frac{1}{2}P_2$. $\qquad (4)$

c) Xác định phản lực liên kết tại A. Giải phóng tất cả các liên kết tại *A, B, C*, thay thế liên kết bằng các phản lực liên kết (hình 4.11f). Cho hệ thực hiện di chuyển ảo δy ta được

$$\delta A = Y_A \delta y - P_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \delta y + N_B \delta y - P_2 \delta y + N_C \delta y = 0 \qquad (5)$$

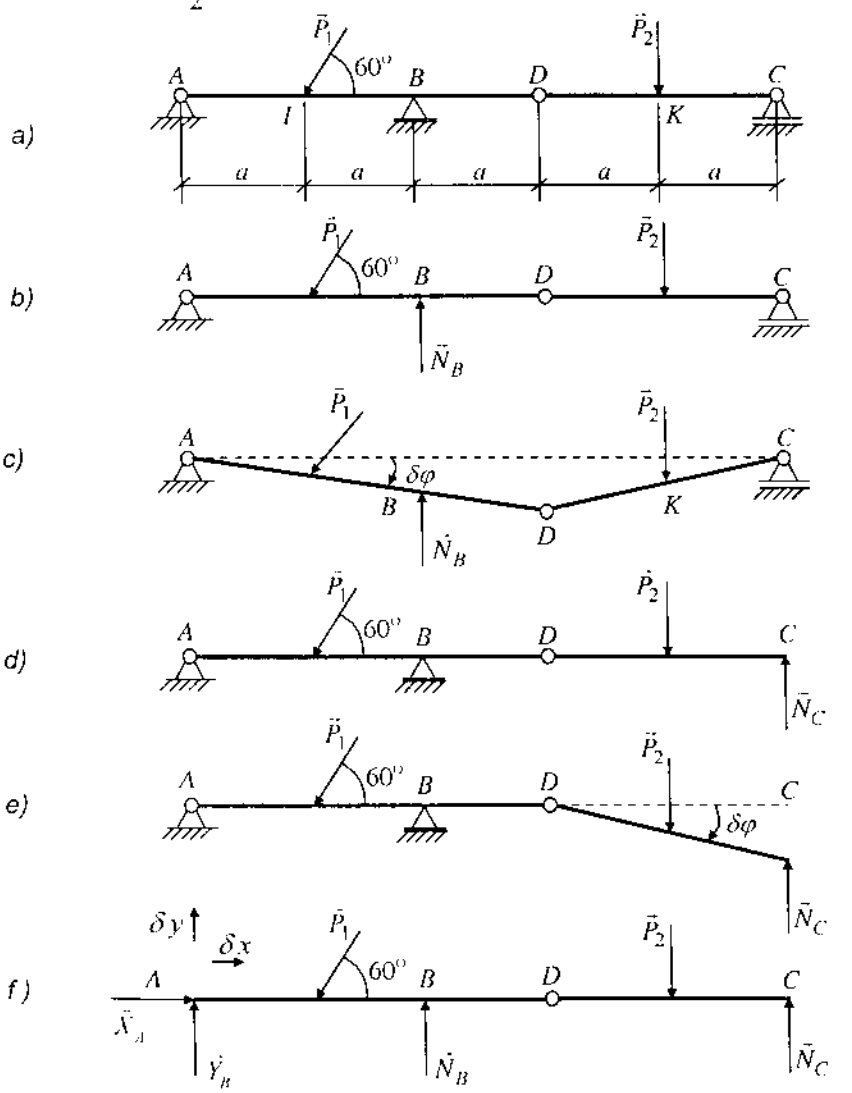
Từ (5) suy ra

$$Y_A = P_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + P_2 - N_B - N_C = \frac{P_1\sqrt{3} - P_2}{4} \qquad (6)$$

Cho hệ thực hiện di chuyển ảo δx ta có

$$\delta A = X_A \delta x - P_1 \cos 60^0 \delta x = 0 \qquad (7)$$

Từ (7) suy ra $X_A = \frac{1}{2} P_1$.



Hình 4.11

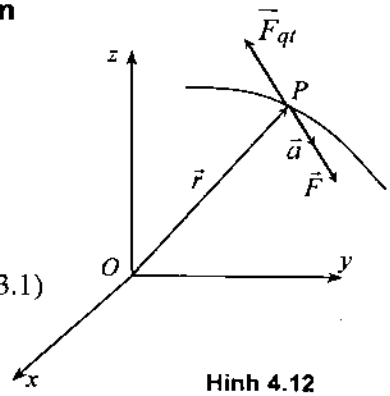
3. NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

3.1. Nguyên lý d'Alembert đối với chất điểm

a) Lực quán tính của chất điểm

Xét chất điểm P có khối lượng m chuyển động với gia tốc $\vec{a}$ ở trong hệ quy chiếu quán tính $Oxyz$, chịu tác dụng của lực tổng hợp $\vec{F}$. Theo tiên đề Newton 2 ta có

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{3.1}$$



Hình 4.12

Phương trình (3.1) có thể biến đổi về dạng

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0 \tag{3.2}$$

Vế trái của phương trình (3.2) là tổng của hai véctơ có cùng thứ nguyên là lực. Để thuận tiện, người ta quy ước xem $(-m\vec{a})$ là một lực gọi là lực quán tính

Định nghĩa 3.1: Lực quán tính d'Alembert của chất điểm là một đại lượng véc tơ cùng phương ngược chiều với gia tốc của chất điểm và có trị số bằng tích số của khối lượng chất điểm với trị số gia tốc của nó

$$\vec{F}_{qt} = -m\vec{a} \tag{3.3}$$

b) Nguyên lý d'Alembert* đối với chất điểm

Với việc đưa vào khái niệm lực quán tính (3.3), phương trình (3.2) có thể viết dưới dạng

$$\vec{F} + \vec{F}_{qt} = 0 \tag{3.4}$$

Phương trình (3.4) là nội dung của nguyên lý d'Alembert đối với chất điểm.

Nguyên lý d'Alembert: Ở mỗi thời điểm hệ lực gồm những lực tác dụng lên chất điểm và lực quán tính của nó là một hệ lực thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học

$$(\vec{F}, \vec{F}_{qt}) \equiv 0 \tag{3.5}$$

c) Chú ý

– Trong hệ quy chiếu quán tính, lực quán tính của chất điểm là lực ảo, không thực sự tác dụng lên chất điểm. Lực quán tính là lực quy ước để đưa bài toán động lực học về bài toán tĩnh học một cách hình thức.

---

* Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) là nhà toán học, nhà triết học và nhà văn người Pháp.

– Trong nguyên lý d'Alembert, ta nói rằng có một hệ lực cân bằng tác dụng lên chất điểm, chứ không nói rằng chất điểm cân bằng dưới tác dụng của hệ lực đó. Thực ra, chất điểm đang chuyển động với gia tốc $\vec{a}$.

– Theo định nghĩa $\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}$, do đó cần chú ý khi xác định lực quán tính bằng phương pháp vẽ và phương pháp giải tích.

Khi vẽ $\vec{F}_{qt}$ ngược chiều với gia tốc $\vec{a}$, trị số $F_{qt} = ma$.

Khi chiếu lên các trục toạ độ:

$$F_x^{qt} = -ma_x = -m\ddot{x},\ F_y^{qt} = -ma_y = -m\ddot{y},\ F_z^{qt} = -ma_z = -m\ddot{z}.$$

3.2. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn

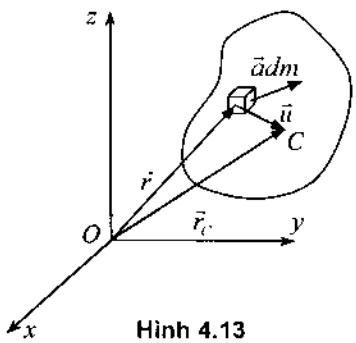
a) Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn

Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn về khối tâm C của nó ta được một lực và một ngẫu lực. Lực được xác định bởi công thức

$$\vec{R}'_{qt} = -\int_B \vec{a}dm = -\int_B \ddot{\vec{r}}dm \qquad (3.6)$$

Ngẫu lực được xác định bởi công thức

$$\vec{M}_C^{qt} = -\int_B \vec{u} \times \vec{a}dm = -\int_B \vec{u} \times \ddot{\vec{r}}dm \qquad (3.7)$$



Hình 4.13

Như đã định nghĩa trong phần Tĩnh học vật rắn, biểu thức (3.6) xác định véctơ chính của hệ lực quán tính của vật rắn, còn biểu thức (3.7) là mômen chính đối với khối tâm C của hệ lực quán tính của vật rắn.

b) Quan hệ giữa véctơ chính, mômen chính của hệ lực quán tính của vật rắn và động lượng, mômen động lượng của vật rắn

Định lý 3.1. Ta có các công thức quan hệ sau

$$\vec{R}'_{qt} = -\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (3.8)$$

$$\vec{M}_C^{qt} = -\frac{d\vec{l}_C}{dt} \qquad (3.9)$$

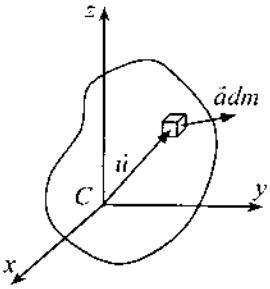
Trong đó $\vec{p}$ là động lượng của vật rắn, $\vec{l}_C$ là mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm C của nó.

Chứng minh: Đạo hàm biểu thức động lượng của vật rắn ta có

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_B \dot{\vec{r}}dm = \int_B \ddot{\vec{r}}dm = -\vec{R}'_{qt}$$

Từ hình 4.14 ta có

$$\vec{l}_C = \int_B \vec{u} \times \vec{v} dm, \quad \vec{M}_C^{qt} = -\int_B \vec{u} \times \vec{a} dm \qquad (1)$$



Hình 4.14

Đạo hàm công thức thứ nhất của (1) theo thời gian ta được

$$\frac{d\vec{l}_C}{dt} = \int_B \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v} dm + \int_B \vec{u} \times \vec{a} dm \qquad (2)$$

Do $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_C$ ta suy ra $\int_B \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v} dm = \int_B \vec{v} \times \vec{v} dm - \vec{v}_C \times \int_B \vec{v} dm = -\vec{v}_C \times m\vec{v}_C = o$.

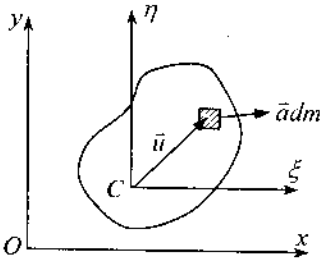
Từ (2) suy ra

$$\frac{d\vec{l}_C}{dt} = \int_B \vec{u} \times \vec{a} dm = -\vec{M}_C^{qt} \qquad (3)$$

c) Biểu thức thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn về khối tâm C của nó

$$\vec{R}'_{qt} = -\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) \Rightarrow \vec{R}'_{qt} = -m\vec{a}_c \qquad (3.10)$$

Như thế véctơ chính của hệ lực quán tính của vật rắn không phụ thuộc vào dạng chuyển động của vật rắn và được xác định bởi công thức (3.10)



Hình 4.15

Véctơ mômen chính đối với khối tâm C của hệ lực quán tính của vật rắn được xác định bởi công thức

$$\vec{M}_C^{qt} = -\int_B \vec{u} \times \vec{a} dm \qquad (3.11)$$

và phụ thuộc vào dạng chuyển động cụ thể của vật rắn.

Vật rắn chuyển động tịnh tiến. Theo (3.11) ta có

$$\vec{M}_C^{qt} = -\left(\int_B \vec{u} dm\right) \times \vec{a}_c = 0, \; do \; \int_B \vec{u} dm = m\vec{u}_c = 0$$

Kết luận 1: Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn chuyển động tịnh tiến về khối tâm C của nó ta được một hợp lực đặt tại khối tâm C

$$\vec{R}_{qt} = -m\vec{a}_C \qquad (3.12)$$

Tấm phẳng chuyển động phẳng. Theo công thức (3.9) suy ra

$$M_{Cz}^{qt} = -\frac{dL_{Cz}}{dt} = -\frac{d}{dt}(J_{Cz}\omega_z) = -J_{Cz}\varepsilon_z \qquad (3.13)$$

Trong đó, Cz là trục vuông góc với tấm phẳng và đi qua khối tâm C của nó.

Kết luận 2: Thu gọn hệ lực quán tính của tấm phẳng chuyển động phẳng về khối tâm C của nó ta được một lực và một ngẫu lực

$$\vec{R}'_{qt} = -m\vec{a}_C \quad , \; M_C^{qt} = -J_{Cz}\varepsilon_z . \tag{3.14}$$

3.3. Nguyên lý d'Alembert đối với cơ hệ

Nguyên lý. Ở mỗi thời điểm nếu ta đặt vào từng chất điểm và từng vật rắn của cơ hệ các lực quán tính thu gọn của nó thì hệ gồm các ngoại lực, nội lực và lực quán tính thu gọn tác dụng lên cơ hệ là một hệ lực thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Chứng minh. Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp hệ gồm n chất điểm. Xét hệ gồm n chất điểm $P_1, P_2, ..., P_n$ chuyển động với các gia tốc $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Ta phân các lực tác dụng lên mỗi chất điểm thành nội lực $\vec{F}_k^i$ và ngoại lực $\vec{F}_k^e$. Theo nguyên lý d'Alembert đối với chất điểm thứ k ta có

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{qt} = 0 \qquad (k = 1, ..., n) \tag{3.15}$$

Xét hệ lực $\left\{\vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i, \vec{F}_k^{qt}\right\}$. Hệ lực này có hai tính chất

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i + \sum \vec{F}_k^{qt} = 0$$

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^{qt}) = 0$$

Vậy hệ lực $\left\{\vec{F}_k^e, \vec{F}_k^i, \vec{F}_k^{qt}\right\}$ là hệ lực thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Do tính chất của hệ nội lực $\sum \vec{F}_k^i = 0$, $\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = 0$ nên

$$\sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^{qt} = 0$$

$$\sum \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^{qt}) = 0$$

Hệ quả. Hệ gồm các ngoại lực và các lực quán tính tác dụng lên cơ hệ là một hệ lực thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học.

3.4. Các thí dụ áp dụng

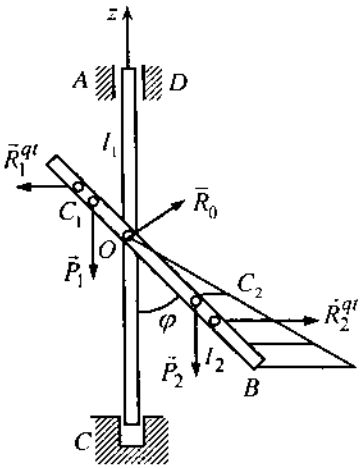
Thí dụ 4.6. Một thanh AB đồng chất được gắn bằng bản lề vào một trục quay thẳng đứng (hình 4.16). Cho biết $OA = a$, $OB = b$. Trục quay đều với vận tốc góc ω, chốt bản lề nằm ngang. Bỏ qua ma sát. Tìm hệ thức giữa góc nghiêng φ giữa trục quay và thanh AB và vận tốc góc ω khi chuyển động quay bình ổn, góc φ là hằng số.

Lời giải. Thu gọn lực quán tính của thanh OB ta được một lực $\vec{F}_2^{qt}$ (do hệ lực quán tính song song cùng chiều). Gọi μ là khối lượng trên một đơn vị dài của thanh, ta có

$$F_2^{qt} = b\mu a_{c_2} = b\mu\frac{b}{2}\sin\varphi.\omega^2$$

Lực $\vec{F}_2^{qt}$ đặt tại điểm I_2 cách B một đoạn là $\frac{b}{3}$. Tương tự, thu gọn hệ lực quán tính của thanh OA ta được

$$F_1^{qt} = a\mu a_{c_1} = a\mu\frac{a}{2}\sin\varphi.\omega^2$$



Hình 4.16

Lực $\vec{F}_1^{qt}$ đặt tại điểm I_1 cách A một đoạn là $\frac{a}{3}$. Theo nguyên lý d'Alembert ta có là lực cân bằng

$$(\vec{R}_0, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}) \equiv 0 \qquad (1)$$

Từ đó ta có

$$\sum m_0(\vec{F}_k) = -P_2\frac{b}{2}\sin\varphi + F_2^{qt}\frac{2b}{3}\cos\varphi + P_1\frac{a}{2}\sin\varphi + F_1^{qt}\frac{2a}{3}\cos\varphi = 0 \quad (2)$$

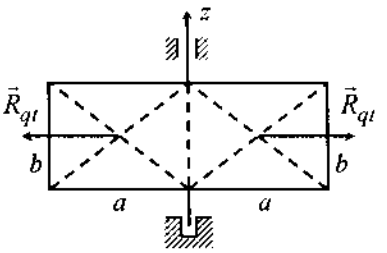
Do $P_1 = a\mu g$, $P_2 = b\mu g$, nên từ (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} -b\mu g\frac{b}{2}\sin\varphi + b\mu\frac{b}{2}\sin\varphi.\omega^2\frac{2b}{3}\cos\varphi + a\mu g\frac{a}{2}\sin\varphi + \\ + a\mu g\frac{a}{2}\sin\varphi + a\mu\frac{a}{2}\sin\varphi.\omega^2\frac{2a}{3}\cos\varphi = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra

$$\cos\varphi = \frac{3g(b-a)}{2(a^2 - ab + b^2)\omega^2} \qquad (4)$$

Thí dụ 4.7. Một tấm hình chữ nhật đồng chất trọng lượng P quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω không đổi. Hãy xác định lực xé tấm theo hướng vuông góc với trục quay trên tiết diện đi qua trục quay (hình 4.17).



Hình 4.17

Lời giải. Lực xé tấm là lực quán tính của tấm quay quanh trục z. Theo lý thuyết thu gọn lực quán tính ta có

$$\vec{R}_{qt} = -m\vec{a}_c$$

Trong thí dụ này ta có $m = \frac{P}{2g}$, $a_c = \frac{a}{2}\omega^2$. Do đó lực xé tấm có độ lớn

$$R_{qt} = \frac{Pa\omega^2}{4g}.$$

4. NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT–LAGRANGE

Nguyên lý d'Alembert – Lagrange* là nguyên lý tổng quát nhất của cơ học. Một số sách ở CHLB Đức và Nga gọi nguyên lý này là nguyên lý d'Alembert trình bày theo quan điểm Lagrange. Một số sách ở Mỹ, CHLB Đức gọi là nguyên lý d'Alembert. Một số sách ở Nga gọi là phương trình tổng quát động lực học.

4.1. Nguyên lý d'Alembert – Lagrange

Nguyên lý. Đối với cơ hệ chịu các liên kết giữ và lý tưởng, tại mỗi thời điểm tổng công của các lực hoạt động và các lực quán tính trong mọi di chuyển ảo của cơ hệ đều bằng không.

a) Mô hình hệ n chất điểm

Ký hiệu là $\vec{F}_k^a$ là hợp của các lực hoạt động tác dụng lên chất điểm P_k, còn hợp của các lực liên kết lý tưởng là $\vec{F}_k^c$, theo nguyên lý d'Alembert ta có

$$\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^{qt} + \vec{F}_k^c = 0 \qquad (k = 1,...,n) \qquad (1)$$

Ta cố định thời điểm t, cho hệ thực hiện một di chuyển ảo tuỳ ý $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, ..., \delta\vec{r}_n$, nhân vô hướng mỗi phương trình (1) với $\delta\vec{r}_k$ rồi cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^{qt} + \vec{F}_k^c).\delta\vec{r}_k = 0 \qquad (2)$$

Do tính chất của liên kết lý tưởng $\sum \vec{F}_k^c.\delta\vec{r}_k = 0$, và chú ý đến định nghĩa lực quán tính $\vec{F}_k^{qt} = -m_k\vec{a}_k$, từ (2) suy ra

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{F}_k^a - m_k\vec{a}_k).\delta\vec{r}_k = 0 \qquad (4.1)$$

Phương trình (4.1) là nguyên lý d'Alembert – Lagrange đối với hệ n chất

---

* Joseph Louis de Lagrange (1736 – 1813) là nhà toán học và cơ học người Pháp

điểm. Người ta còn gọi (4.1) là phương trình tổng quát động lực học hệ n chất điểm. Dưới dạng khai triển theo các toạ độ Descartes, phương trình (4.1) có dạng

$$\sum\left[\left(F_{kx}^{a}-m_k\ddot{x}_k\right)\delta x_k+\left(F_{ky}^{a}-m_k\ddot{y}_k\right)\delta y_k+\left(F_{kz}^{a}-m_k\ddot{z}_k\right)\delta z_k\right]=0 \qquad (4.2)$$

b) Mô hình hệ p vật rắn phẳng

Khái niệm vật rắn phẳng ở đây được hiểu là các hình phẳng chuyển động trong cùng một mặt phẳng và chịu tác dụng của các lực nằm trong cùng một mặt phẳng chứa các hình phẳng. Xét hệ gồm p vật rắn phẳng. Ký hiệu $\vec{F}_k^a$, $\vec{F}_k^c$, M_k^a, M_k^c là véctơ chính và mômen chính đối với khối tâm của các lực hoạt động và các lực liên kết lý tưởng tác dụng lên vật rắn thứ k, $\vec{a}_{Ck}$ là gia tốc khối tâm C_k, ε_k là gia tốc góc của vật rắn thứ k. Ta cố định thời điểm t, cho hệ thực hiện một di chuyển ảo tuỳ ý: $\delta\vec{r}_{C_1}, \delta\varphi_1, \delta\vec{r}_{C_2}$, $\delta\varphi_2, ..., \delta\vec{r}_{C_p}, \delta\varphi_p$. Theo nguyên lý d'Alembert ta có

$$\vec{F}_k^a - m_k\vec{a}_{C_k} + \vec{F}_k^c = 0 \qquad (1)$$

$$M_k^a - J_{C_k}\ddot{\varphi}_k + M_k^c = 0 \qquad (2)$$

Nhân vô hướng phương trình (1) với $\delta\vec{r}_{C_k}$, nhân phương trình (2) với $\delta\varphi_k$ rồi cộng lại ta được

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\left(\vec{F}_k^a - m_k\vec{a}_{C_k}\right)\delta\vec{r}_{C_k} + \left(M_k^a - J_{C_k}\ddot{\varphi}_k\right)\delta\varphi_k\right] = 0\,. \qquad (4.3)$$

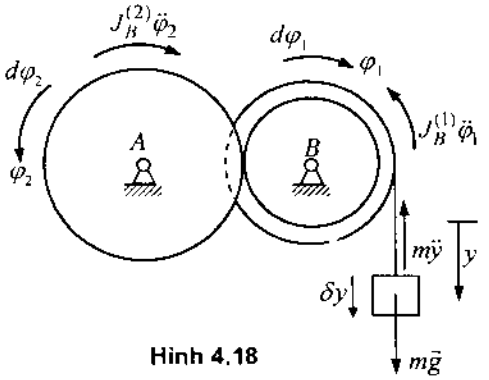
Do $\vec{F}_k^c, M_k^c$ là lực và ngẫu lực liên kết lý tưởng nên

$$\sum_{k=1}^{p}(\vec{F}_k^c.\delta\vec{r}_{Ck} + M_k^c\delta\varphi_k) = 0\,.$$

Phương trình (4.3) là nguyên lý d'Alembert – Lagrange đối với hệ p vật rắn phẳng. Người ta cũng gọi (4.3) là phương trình tổng quát của động lực học của hệ p vật rắn phẳng.

4.2. Thí dụ áp dụng

Thí dụ 4.8. Cho cơ hệ như hình (4.18). Vật nặng có khối lượng m vắt qua ròng rọc hai tầng B có bán kính trong là r_1, bán kính ngoài là R_1. Ròng rọc B ăn khớp với bánh răng A có bán kính r_2. Cho biết các mômen



Hình 4.18

quán tính khối của ròng rọc B và bánh răng A đối với trục quay của nó là $J_B^{(1)}$ và $J_A^{(2)}$. Hãy xác định gia tốc của vật nặng.

Lời giải. Lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ là trọng lượng vật nặng $\vec{P} = m\vec{g}$. Hệ gồm vật nặng và hai bánh xe. Đặt lực quán tính vào vật nặng (chất điểm) và hai bánh xe (vật rắn) như hình vẽ.

Áp dụng nguyên lý d'Alembert – Lagrange

$$(mg - m\ddot{y})\delta y - J_B^{(1)}\ddot{\varphi}_1\delta\varphi_1 - J_A^{(2)}\ddot{\varphi}_2\delta\varphi_2 = 0 \qquad (1)$$

Chú ý đến các liên kết ta có

$$r_2\varphi_2 = r_1\varphi_1 \qquad (2)$$

$$y = R_1\varphi_1 \qquad (3)$$

Từ (3) và (2) suy ra:

$$\varphi_1 = \frac{1}{R_1}y \Rightarrow \delta\varphi_1 = \frac{1}{R_1}\delta y \qquad (4)$$

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{R_1 r_2}y \Rightarrow \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{R_1 r_2}\delta y \qquad (5)$$

Thế (4) và (5) vào (1) ta được

$$\left(mg - m\ddot{y} - \frac{1}{R_1^2}J_B^{(1)}\ddot{y} - \frac{r_1^2}{R_1^2 r_2^2}J_A^{(2)}\ddot{y}\right)\delta y = 0 \qquad (6)$$

Từ (6) suy ra

$$mg = \left[m + \frac{J_B^{(1)}}{R_1^2} + \frac{J_A^{(2)}}{R_1^2}.\frac{r_1^2}{r_2^2}\right]\ddot{y}. \qquad (7)$$

Chú ý. Ta cũng có thể tìm được công thức (7) bằng phương pháp khác, chẳng hạn áp dụng định lý biến thiên động năng.

5. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI 2

Phương trình Lagrange loại hai là phương trình vi phân chuyển động của hệ các chất điểm và các vật rắn hôlônôm. Số phương trình đúng bằng số bậc tự do của hệ.

5.1. Phương trình Lagrange loại hai cho hệ n chất điểm

a) Một vài công thức động học cần thiết

Giả sử vị trí của mỗi chất điểm thuộc hệ là hàm của các tọa độ suy rộng và thời gian

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_m, t), \; q_i = q_i(t) \;\; (i = 1, ..., m) \tag{5.1}$$

Đạo hàm hệ thức (5.1) theo thời gian t ta được

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{v}_k = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \tag{5.2}$$

Do $\vec{v}_k = \vec{v}_k(q_1, ..., q_m, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_m, t)$ và $\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}(q_1, ..., q_n, t)$ nên

$$\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial t}$$

So sánh hai công thức rút ra hệ thức

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial q_j} \tag{5.3}$$

b) Thiết lập phương trình Lagrange loại hai

Xét hệ hôlônôm gồm n chất điểm và có f bậc tự do. Như thế cơ hệ xác định bởi f toạ độ suy rộng đủ: $q_1, q_2, ..., q_f$. Nguyên lý d'Alembert – Lagrange đối với hệ n chất điểm có dạng

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k^a - m_k \vec{a}_k\right).\delta \vec{r}_k = 0 \tag{5.4}$$

Từ (5.1) ta có

$$\delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \tag{5.5}$$

Thế (5.5) vào biểu thức (5.4) được hệ thức

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^a . \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \sum_{i=1}^{f}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} . \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0 \tag{5.6}$$

Theo định nghĩa lực suy rộng ta có

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^a . \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \tag{5.7}$$

Bây giờ biến đổi biểu thức

$$K_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}.\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{r}}_k.\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} - \sum m_k \dot{\vec{r}}_k.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right) \quad (5.8)$$

Chú ý đến các công thức (5.2) và (5.3), biểu thức (5.8) có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \frac{\partial \dot{v}_k}{\partial q_i} \quad (5.9)$$

Các đạo hàm riêng theo $\dot{q}_i$ và q_i của biểu thức động năng $T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k^2$ có dạng

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{v}_k \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}\ ,\quad \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \frac{\partial \dot{v}_k}{\partial q_i} \quad (5.10)$$

Chú ý đến các công thức (5.10), biểu thức (5.9) có dạng

$$K_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (5.11)$$

Thế (5.7) và (5.11) vào phương trình (5.6) ta được

$$\sum_{i=1}^{f}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0 \quad (5.12)$$

Các biến phân $\delta q_i (i = 1,...,f)$ là độc lập nhau, nên

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1,...,f) \quad (5.13)$$

Trong đó Q_i là các lực suy rộng. Nếu phân các lực tác dụng lên cơ hệ thành các lực có thế và các lực không có thế, thì lực suy rộng Q_i được tính theo công thức

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (5.14)$$

Trong đó Q_i^* là lực suy rộng ứng với các lực không thế.

Các phương trình vi phân (5.13) được gọi là phương trình Lagrange loại hai, mô tả chuyển động của các hệ hôlônôm.

Trong trường hợp lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế thì $Q_i^* = 0$. Khi đó phương trình Lagrange loại hai có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\ (i=1,...,f) \tag{5.15}$$

Nếu đưa vào hệ thức

$$L=T(q_1,...,q_f,\dot{q}_1,...,\dot{q}_f,t)-\Pi(q_1,...,q_f)$$

thì phương trình (5.15) có dạng

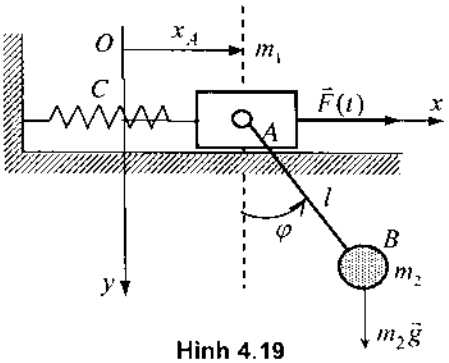
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,...,f) \tag{5.16}$$

5.2. Phương trình Lagrange loại hai cho hệ p vật rắn

Trong trường hợp hệ các vật rắn chịu các liên kết hôlônôm, phương trình Lagrange loại hai vẫn có dạng như (5.13). Ở đây công nhận điều này mà không chứng minh.

5.3. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 4.9. Một con lắc toán học khối lượng m_2, dài l được nối vào con trượt A khối lượng m_1. Con trượt được nối vào tường bằng lò xo với hệ số cứng là c. Cho biết con trượt A có thể trượt không ma sát trên nền nhẵn. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.



Hình 4.19

Lời giải. Hệ khảo sát gồm con trượt A và khối lượng B. Con trượt A có thể chuyển động tịnh tiến thẳng theo phương ngang. Khối lượng B xem như chất điểm và chuyển động tròn tương đối với A. Vị trí của hệ được xác định bởi hoành độ x_A của con trượt (tính từ vị trí cân bằng tĩnh, khi lò xo chưa biến dạng) và góc φ. (hình 4.19). Ta chọn x_A và φ làm các toạ độ suy rộng: $q_1=x_A, q_2=\varphi$ các lực hoạt động gồm lực tác dụng $F(t)$, trọng lượng vật nặng B và lực đàn hồi của lò xo.

Động năng của hệ có dạng

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Vận tốc của con trượt A là $v_1=\dot{x}_A$. Để tính động năng của chất điểm B, các toạ độ của nó được xác định như sau

$$x_B = x_A + l\sin\varphi, \qquad y_B = l\cos\varphi$$

Từ đó suy ra

$$v_2^2 = x_B'^2 + y_B'^2 = \dot{x}_A^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}_A\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Biểu thức động năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{x}_A\dot{\varphi}\cos\varphi \qquad (1)$$

Thế năng của hệ được xác định bởi các lực có thế

$$\Pi = \frac{1}{2}cx_A^2 - m_2 gl\cos\varphi \qquad (2)$$

Cho hệ thực hiện một di chuyển khả dĩ $\delta x_A \neq 0, \delta\varphi \neq 0$ ta có

$$\delta A = F(t)\delta x_A$$

Do đó $\qquad Q_x^* = F(t)\,,\ Q_\varphi^* = 0 \qquad (3)$

Trong thí dụ này, các phương trình Lagrange loại hai có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_A} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_A} + Q_x^* \qquad , \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^* \qquad (4)$$

Từ các biểu thức động năng (1) và thế năng (2) của hệ dễ dàng tính được

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = (m_1 + m_2)\dot{x}_A + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_A + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_A} = 0\,, \frac{\partial \Pi}{\partial x_A} = cx_A\,, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}_A\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}_A\cos\varphi - m_2 l\dot{x}_A\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}_A\dot{\varphi}\sin\varphi\,, \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = m_2 gl\sin\varphi$$

Thế các biểu thức tính được vào (4) ta được các phương trình vi phân chuyển động của hệ

$$\begin{aligned} &(m_1 + m_2)\ddot{x}_A + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cx_A = F(t) \\ &\ddot{x}_A\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

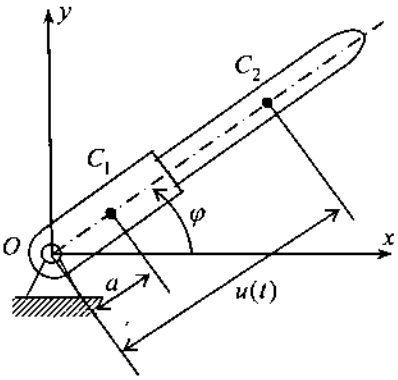
Tuyến tính hoá các phương trình vi phân chuyển động. Trong trường hợp hệ khối lượng – con lắc dao động nhỏ, có thể thay thế gần đúng

$$\sin\varphi \approx \varphi,\ \cos\varphi \approx 1$$

Bỏ qua các số hạng phi tuyến, từ (5) suy ra phương trình dao động tuyến tính hoá

$$\begin{aligned}&(m_1+m_2)\ddot{x}_A + m_2 l\ddot{\varphi} + cx_A = F(t)\\&\ddot{x}_A + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0\end{aligned} \qquad (6)$$

Thí dụ 4.10. Rôbôt tay máy cực chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng như hình 4.20. Khâu 1 có khối lượng là m_1, mômen quán tính đối với khối tâm C_1 của nó là I_1, có thể quay quanh trục O. Khâu 2 có khối lượng m_2, mô men quán tính khối đối với khối tâm C_2 của nó là I_2. Khâu 2 có thể chuyển động tịnh tiến thẳng đối với khâu 1. Tác dụng ngẫu lực điều khiển có mômen $M(t)$ lên khâu quay 1 và lực điều khiển $F(t)$ lên khâu 2. Bỏ qua ma sát và lực cản. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của rô bốt này



Hình 4.20

Lời giải. Hệ khảo sát là rôbốt cực như hình 4.20. Khâu 1 có thể quay quanh trục O cố định. Khâu 2 chuyển động tịnh tiến ở trong lòng khâu 1. Vị trí của hệ được xác định bởi hai tham số $q_1 = \varphi_1, q_2 = u$. Các lực hoạt động gồm ngẫu lực điều khiển $M(t)$, lực điều khiển $\vec{F}(t)$, các trọng lực $\vec{P}_1$ và $\vec{P}_2$. Biểu thức động năng của hệ có dạng

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\left(I_1 + m_1 a^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\varphi}^2$$

Do $x_2 = u\cos\varphi$, $y_2 = u\sin\varphi$ nên

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{u}^2 + u^2\dot{\varphi}^2$$

Thế kết quả này vào biểu thức trên ta được

$$T = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 + m_1 a^2 + m_2 u^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{u}^2 = \frac{1}{2}(I + m_2 u^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{u}^2 \qquad (1)$$

Trong đó ta ký hiệu $I = I_1 + I_2 + m_1 a^2 = const$

Biểu thức thế năng có dạng

$$\Pi = (m_1 a + m_2 u)g\sin\varphi \qquad (2)$$

Cho hệ thực hiện các di chuyển khả dĩ $\delta\varphi$, δu tính được

$$Q_\varphi^* = M(t), \qquad Q_u^* = F(t) \qquad (3)$$

Trong thí dụ này, các phương trình Lagrange loại hai có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}+Q_{\varphi}^{*}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right)-\frac{\partial T}{\partial u}=-\frac{\partial \Pi}{\partial u}+Q_{u}^{*} \qquad (4)$$

Từ các biểu thức động năng (1) và thế năng (2) của hệ dễ dàng tính được

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=(I+mu^2)\dot{\varphi}\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=(I+m_2u^2)\ddot{\varphi}+2m_2u\dot{u}\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0\ ,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi}=(m_1a+m_2u)g\cos\varphi$$

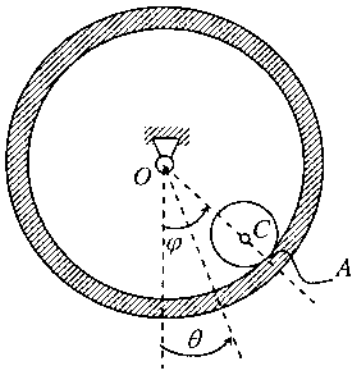
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}=m_2\dot{u}\ ,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right)=m_2\ddot{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u}=m_2u\dot{\varphi}^2\ ,\ \frac{\partial \Pi}{\partial u}=m_2g\sin\varphi$$

Thế các kết quả tính được vào phương trình (4) nhận được các phương trình vi phân chuyển động của rôbốt tay máy cực

$$(I+m_2u^2)\ddot{\varphi}+2m_2u\dot{\varphi}\dot{u}+(m_1a+m_2u)g\cos\varphi=M(t),$$
$$m_2\ddot{u}-m_2u\dot{\varphi}^2+m_2g\sin\varphi=F(t).$$

Thí dụ 4.11. Một hình trụ tròn khối lượng m_2, bán kính r_2 lăn không trượt bên trong một hình trụ rỗng khối lượng m_1, bán kính r_1, trụ này có thể quay quang trục O nằm ngang. Biết rằng mômen quán tính của các trụ đối với trục của nó tương ứng là $\frac{1}{2}m_2r_2^2$ và $m_1r_1^2$. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.



Hình 4.21

Lời giải. Hệ khảo sát gồm hai hình trụ. Hình trụ rỗng O là một vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định. Hình trụ đặc C là vật rắn chuyển động song phẳng. Lực sinh công ở đây là trọng lượng P_2 của trụ nhỏ. Ta chọn các toạ độ suy rộng $q_1=\theta$, $q_2=\varphi$ (hình 4.21). Động năng của hệ có dạng

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}m_1r_1^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m_2v_c^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_2r_2^2)\omega_2^2 \qquad (1)$$

Trong đó, $\dot{\theta}$ là vận tốc góc của trụ rỗng O, ω_2 là vận tốc góc của trụ C, v_c là vận tốc khối tâm C của trụ 2. Do khối tâm C của trụ 2 chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính $r_1 - r_2$ nên

$$v_c = (r_1 - r_2)\dot{\varphi}$$

Trụ 2 chuyển động song phẳng. Theo định lý vận tốc ta có

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}$$

Trong bài toán này $\vec{v}_{AC} // \vec{v}_C // \vec{v}_A$ và $v_A = r_1\dot{\theta}$. Từ đó suy ra

$$v_{AC} = v_A - v_C = r_1\dot{\theta} - (r_1 - r_2)\dot{\varphi} = r_2\omega_2$$

Vậy $$\omega_2 = \frac{r_1\dot{\theta} + (r_2 - r_1)\dot{\varphi}}{r_2}$$

Thế các biểu thức tìm được vào (1) ta được

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 r_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}m_2 r_2^2\frac{[r_1\dot{\theta} + (r_2 - r_1)\dot{\varphi}]^2}{r_2^2} \\ &= \frac{3}{4}m_2(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}(2m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\dot{\varphi}\dot{\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

Thế năng của hệ

$$\Pi = -(r_1 - r_2)m_2 g\cos\varphi \tag{3}$$

Trong thí dụ này phương trình Lagrange loại 2 có dạng

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} &= -\frac{\partial\Pi}{\partial\theta} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} &= -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

Từ các biểu thức động năng và thế năng tính được

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 0\,,\ \frac{\partial\Pi}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m_2(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2}m_2(r_1 - r_2)^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \ , \ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = +(r_1 - r_2)m_2 g \sin\varphi$$

Thế các kết quả vừa tìm được vào phương trình (4) nhận được các phương trình vi phân chuyển động của hệ

$$(2m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\theta} - m_2 r_1(r_1 - r_2)\ddot{\varphi} = 0,$$
$$-m_2 r_1(r_1 - r_2)\ddot{\theta} + 3m_2(r_1 - r_2)^2\ddot{\varphi} + 2m_2 g(r_1 - r_2)\sin\varphi = 0.$$

5.4. Các tích phân đầu của chuyển động

a) Khái niệm tích phân đầu

Để đơn giản ta xét hệ hai phương trình vi phân cấp một

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{5.17}$$

Xét hàm hai biến $u(x_1, x_2)$. Ta đưa vào định nghĩa đạo hàm của hàm vô hướng u theo quỹ đạo của phương trình vi phân (5.17) bởi biểu thức sau

$$L_t u = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} f_2 \tag{5.18}$$

Định nghĩa 5.1. Hàm $u(x_1, x_2)$ được gọi là tích phân đầu của hệ phương trình vi phân (5.17) nếu như

$$L_t u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\dot{x}_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} f_2 = 0 \tag{5.19}$$

Từ định nghĩa trên suy ra tính chất sau: Nếu x_1 và x_2 là một nghiệm của hệ phương trình vi phân (5.17), còn $u(x_1, x_2)$ là một tích phân đầu của (5.17) thì $u(x_1, x_2) = const$.

Chú ý. Trong một số tài liệu người ta dùng tính chất trên làm định nghĩa tích phân đầu của hệ phương trình vi phân.

Để minh họa, xét phương trình vi phân dao động điều hòa $\ddot{x} + x = 0$. Biểu thức

$$u(x_1, x_2) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

là một tích phân đầu của phương trình vi phân dao động điều hòa ở trên. Thật vậy, dễ dàng tính được

$$L_t u = \dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + x) = 0.$$

Bây giờ xét hệ hai phương trình vi phân cấp một mà vế phải phụ thuộc vào thời gian

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Ta xem $x_3 = t$, thì hệ phương trình vi phân trên có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Định nghĩa 5.2. Hàm $u(x_1, x_2, t)$ được gọi là tích phân đầu phụ thuộc thời gian của hệ phương trình vi phân (5.20) nếu như $u(x_1, x_2, x_3)$ là tích phân đầu của hệ phương trình vi phân suy rộng (5.21)

$$L_t u = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}\dot{x}_3 = \frac{\partial u}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}f_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3}f_3 = 0.$$

Trong cơ học người ta hay quan tâm đến hai tích phân đầu của hệ phương trình vi phân mô tả chuyển động của cơ hệ. Đó là tích phân xyclic và tích phân năng lượng.

b) Tích phân xyclic

Xét phương trình Lagrange loại hai dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \qquad (i = 1, \ldots, f) \tag{5.22}$$

Toạ độ suy rộng q_s được gọi là toạ độ xyclic, nếu như các điều kiện sau được thoả mãn

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0, Q_s^* = 0 \tag{5.23}$$

Như thế, tọa độ q_s được gọi là toạ độ xyclic, nếu như nó không có mặt trong các biểu thức động năng, thế năng của cơ hệ và lực suy rộng của các lực hoạt động không có thế bằng không.

Khi q_s là toạ độ xyclic, từ (5.22) suy ra

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0$$

Do đó

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = const \tag{5.24}$$

Hệ thức (5.24) là một tích phân đầu của cơ hệ và được gọi là tích phân xyclic.

c) Tích phân năng lượng

Trong trường hợp các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế, theo định luật bảo toàn cơ năng

$$d(T + \Pi) = 0$$

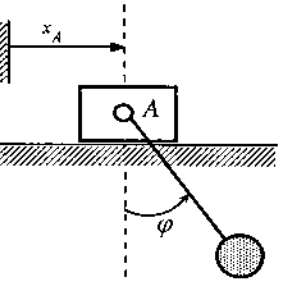
Do đó

$$T + \Pi = const \tag{5.25}$$

Hệ thức (5.25) là một tích phân đầu của cơ hệ và được gọi là tích phân năng lượng.

d) Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 4.12. Một con lắc eliptic gồm con chạy có khối lượng m_1, trượt trên mặt ngang nhẵn và quả cầu nhỏ có khối lượng m_2 được nối vào con chạy bằng dây mềm không giãn, không trọng lượng dài l (hình 4.22). hãy xác định các tích phân đầu của hệ



Hình 4.22

Lời giải. Động năng của hệ (theo thí dụ 4.8)

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{x}_A \dot{\varphi} \cos\varphi$$

Thế năng của hệ

$$\Pi = -m_2 g l \cos\varphi$$

Do cả T và Π đều không chứa x_A nên x_A là toạ độ xyclic. Ta có tích phân xyclic là

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} = (m_1 + m_2)\dot{x}_A + m_2 l \dot{\varphi} \cos\varphi = const \tag{1}$$

Ngoài ra, hệ có tích phân năng lượng

$$T + \Pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{x}_A \dot{\varphi} \cos\varphi - m_2 g l \cos\varphi = const \tag{2}$$

Thí dụ 4.13. Tìm các tích phân đầu của hệ có mô hình như trong thí dụ 4.9

Lời giải. Theo thí dụ 4.9, động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{3}{4}m_2(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}(2m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\dot{\varphi}\dot{\theta} \quad (1)$$

$$\Pi = -(r_1 - r_2)m_2 g\cos\varphi \quad (2)$$

Do các biểu thức động năng và thế năng đều không chứa toạ độ suy rộng θ. Hơn nữa các lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế. Vậy ta có tích phân xyclic

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}(2m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\dot{\varphi} = const \quad (3)$$

Tích phân năng lượng của hệ có dạng

$$\begin{aligned} T + \Pi = {} & \frac{3}{4}m_2(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}(2m_1 + m_2)r_1^2\dot{\theta}^2 + \\ & + \frac{1}{2}m_2 r_1(r_2 - r_1)\dot{\varphi}\dot{\theta} - (r_1 - r_2)m_2 g\cos\varphi = const \end{aligned} \quad (4)$$

Chương 5

ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN KHÔNG GIAN

Trong các chương trước chúng ta đã khảo sát động lực học hệ chất điểm, động lực học vật rắn và hệ vật rắn phẳng. Trong chương này sẽ áp dụng các định lý chuyển động khối tâm, định lý biến thiên mômen động lượng khảo sát động lực học vật rắn chuyển động trong không gian ba chiều. Do tính phức tạp của bài toán, người ta giới hạn xét các vấn đề cơ bản sau: xác định áp lực động của vật rắn không gian quay xung quanh một trục cố định, thiết lập phương trình vi phân chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định, lý thuyết sơ cấp về Gyrôscôp và phương trình vi phân chuyển động của vật rắn tổng quát. Các vấn đề về động lực học hệ nhiều vật rắn tuy rất quan trọng, nhưng quá phức tạp nên không trình bày ở đây. Chú ý rằng, khác với một số chương trước, ở chương này ký hiệu xyz là hệ toạ độ động gắn chặt hoặc gắn vào một điểm của vật rắn, còn $x_0y_0z_0$ là hệ toạ độ cố định.

1. PHẢN LỰC ĐỘNG TẠI CÁC Ổ ĐỠ CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

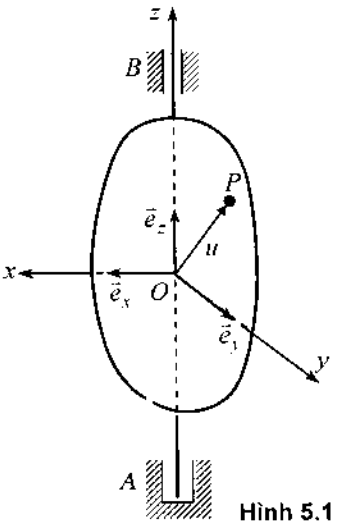
1.1. Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn quay quanh một trục cố định

a) Biểu thức gia tốc một điểm bất kỳ thuộc vật rắn quay quanh một trục cố định

Trên hình 5.1 biểu diễn một vật rắn quay quanh trục z cố định. Chọn O là một điểm bất kỳ trên trục quay z. Dựng hệ toạ độ vuông góc $Oxyz$ gắn chặt vào vật rắn quay, có trục $Oz \equiv Oz_0$. Gọi $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ là các véc tơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Ký hiệu $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$. Trong phần động học đã biết biểu thức tính gia tốc của điểm P

$$\vec{a} = \dot{\vec{\varepsilon}} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{v}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) \quad (1.1)$$

Từ đó suy ra



Hình 5.1

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \omega_z \vec{e}_z \times \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -\left(x\omega^2 + y\varepsilon_z\right)\vec{e}_x - \left(y\omega^2 - x\varepsilon_z\right)\vec{e}_y \qquad (1.2)$$

Trong đó x, y, z là toạ độ véc tơ $\vec{u}$ trong hệ toạ độ Oxyz.

b) Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn về điểm O nằm trên trục quay

Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn về điểm O nằm trên trục quay ta được một véc tơ chính $\vec{R}'_{qt}$ và một véc tơ mômen chính $\vec{M}_O^{qt}$. Véc tơ chính của hệ lực quán tính có dạng

$$\vec{R}'_{qt} = -\int_B \vec{a}dm = -m\vec{a}_C \qquad (1.3)$$

Trong đó, m là khối lượng của vật rắn, $\vec{a}_C$ là gia tốc khối tâm của vật rắn. Mômen chính của hệ lực quán tính của vật rắn đối với điểm O có dạng

$$\overrightarrow{M}_O^{qt} = -\int_B \left(\vec{u} \times \vec{a}\right)dm \qquad (1.4)$$

Bây giờ ta tính các biểu thức này. Từ (1.2) suy ra biểu thức gia tốc khối tâm

$$\vec{a}_C = -\left(x_C\omega^2 + y_C\varepsilon_z\right)\vec{e}_x - \left(y_C\omega^2 - x_C\varepsilon_z\right)\vec{e}_y \qquad (1.5)$$

Trong đó x_C, y_C, z_C là toạ độ véc tơ $\vec{u}_C$ trong hệ quy chiếu động $Oxyz$. Thế (1.5) vào (1.3) ta được

$$\vec{R}'_{qt} = m\left(x_C\omega^2 + y_C\varepsilon_z\right)\vec{e}_x + m\left(y_C\omega^2 - x_C\varepsilon_z\right)\vec{e}_y. \qquad (1.6)$$

Chú ý đến biểu thức (1.2)

$$-\vec{u} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ \omega^2 x + \varepsilon_z y & \omega^2 y - \varepsilon_z x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\varepsilon_z xz - \omega^2 yz)\vec{e}_x + (\varepsilon_z yz + \omega^2 xz)\vec{e}_y - \varepsilon_z(x^2 + y^2)\vec{e}_z \qquad (1.7)$$

Thế (1.7) vào (1.4) ta được

$$\overrightarrow{M}_O^{qt} = \left(\varepsilon_z J_{xz} - \omega^2 J_{yz}\right)\vec{e}_x + \left(\varepsilon_z J_{yz} + \omega^2 J_{xz}\right)\vec{e}_y - \varepsilon_z J_z \vec{e}_z \qquad (1.8)$$

Trong đó ta sử dụng các định nghĩa mô men quán tính khối

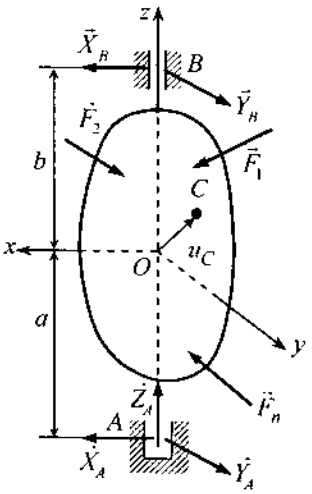
$$J_{xz} = \int_B xzdm, \quad J_{yz} = \int_B yzdm, \quad J_z = \int_B \left(x^2 + y^2\right)dm.$$

Kết luận: Thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn quay quanh một trục cố định về điểm O nằm trên trục quay ta được một lực $\vec{R}'_{qt}$ và một ngẫu lực $\vec{M}_O^{qt}$. Lực quán tính chính $\vec{R}'_{qt}$ được xác định bởi công thức (1.6), còn ngẫu lực quán tính chính đối với điểm O, $\vec{M}_O^{qt}$, được xác định bởi công thức (1.8).

1.2. Các phương trình xác định phản lực động tại hai ổ đỡ

Cho một vật rắn quay quanh trục z_0 cố định $z_0 \equiv z$ và chịu tác dụng của các ngoại lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ (hình 5.2). Tại thời điểm khảo sát vật rắn có vận tốc góc ω, gia tốc góc ε. Hãy xác định phản lực tại các ổ đỡ A và B. Áp dụng nguyên lý d'Alembert, ta có hệ lực sau đây tác dụng lên vật rắn thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{R}'_{qt}, \vec{M}_O^{qt}\right) \equiv 0$$



Hình 5.2

Sáu phương trình cân bằng của hệ lực trên là

$$\sum_{k=1}^{n} X_k + X_A + X_B + mx_c\omega^2 + my_c\varepsilon_z = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k + Y_A + Y_B + my_c\omega^2 - mx_c\varepsilon_z = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k + Z_A = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x\left(\vec{F}_k\right) + Y_A a - Y_B b - J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\varepsilon_z = 0 \qquad (1.9)$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_y\left(\vec{F}_k\right) - X_A a + X_B b + J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon_z = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F}_k\right) - J_z\varepsilon_z = 0$$

Chú ý rằng, do $Oxyz$ gắn liền vào vật rắn, nên x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz}, J_z là các hằng số. Phương trình cuối cùng của hệ phương trình (1.9) không chứa phản lực động. Nó chính là phương trình vi phân chuyển động của vật rắn quay quanh một trục z_0 cố định. Do $z_0 = z$ nên

$$J_z\varepsilon_z = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k}\right) \tag{1.10}$$

Phương trình thứ ba của hệ phương trình (1.9) cho biết thành phần dọc theo trục z của phản lực động tại các ổ đỡ A

$$Z_A = -\sum_{k=1}^{n} Z_k\,. \tag{1.11}$$

Các lực quán tính của vật rắn không ảnh hưởng gì đến Z_A. Do kết cấu các ổ đỡ nên $Z_B = 0$. Bốn phương trình thứ nhất, thứ hai, thứ tư và thứ năm cho phép ta xác định các thành phần phản lực động X_A, Y_A, X_B, Y_B. Các thành phần phản lực đó không chỉ phụ thuộc vào các ngoại lực $\overrightarrow{F_1},...,\overrightarrow{F_n}$ mà còn phụ thuộc cả vào vận tốc góc ω, gia tốc góc ε của vật rắn quay. Thành phần của phản lực chỉ phụ thuộc vào ω và ε được gọi là thành phần phản lực động phụ. Từ các phương trình (1.9) ta suy ra hệ các phương trình xác định các thành phần phản lực động phụ

$$\begin{aligned}
&X_A^d + X_B^d + mx_C\omega^2 + my_C\varepsilon_z = 0\\
&Y_A^d + Y_B^d + my_C\omega^2 - mx_C\varepsilon_z = 0\\
&Y_A^d a - Y_B^d b - J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\varepsilon_z = 0\\
&-X_A^d a + X_B^d b + J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon_z = 0
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Từ các phương trình (1.12) suy ra điều kiện để cho các thành phần phản lực động phụ ở hai ổ đỡ triệt tiêu là

$$\begin{aligned}
&mx_C\omega^2 + my_C\varepsilon_z = 0\\
&my_C\omega^2 - mx_C\varepsilon_z = 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

và

$$\begin{aligned}
&J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon_z = 0\\
&-J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\varepsilon_z = 0
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Các điều kiện (1.13) sẽ luôn thoả mãn với mọi ω và ε nếu $x_C = y_C = 0$. Tương tự, các điều kiện (1.14) sẽ thoả mãn với mọi ω và ε nếu $J_{XZ} = J_{YZ} = 0$.

Kết luận: Nếu trục quay của vật rắn là trục quán tính chính trung tâm, thì các thành phần phản lực động phụ ở hai ổ đỡ sẽ triệt tiêu với ω và ε tuỳ ý.

1.3. Khái niệm cân bằng tĩnh và khái niệm cân bằng động của rôto cứng

Rôto cứng là vật rắn quay quanh một trục cố định. Từ các biểu thức của véc tơ chính và mô men chính đối với tâm O của hệ lực quán tính của rôto cứng (1.6) và (1.8) suy ra

$$R_x^{'qt} = m\left(x_c\omega^2 + y_c\varepsilon_z\right), \quad R_y^{'qt} = m\left(y_c\omega^2 - x_c\varepsilon_z\right) \tag{1.15}$$

$$M_{0x}^{qt} = J_{xz}\varepsilon_z - J_{yz}\omega^2, \quad M_{0y}^{qt} = J_{yz}\varepsilon_z + J_{xz}\omega^2 \tag{1.16}$$

a) Khái niệm cân bằng tĩnh. Một rôto cứng quay quanh trục z được gọi là cân bằng tĩnh, nếu như vec tơ chính của lực quán tính của rôto bằng không

$$R_x^{'qt} = R_y^{'qt} = 0 \tag{1.17}$$

Từ công thức (1.15) thấy rằng, khi $x_C = y_C = 0$ thì $R_x^{'qt} = R_y^{'qt} = 0$. Vậy khi khối tâm của rôto nằm trên trục quay của nó thì rôto cứng được cân bằng tĩnh. Nội dung của bài toán cân bằng tĩnh rôto là tìm cách đắp thêm khối lượng hoặc giảm bớt khối lượng của rôto một cách thích hợp sao cho khối tâm của nó nằm trên trục quay.

Khi $x_C = y_C = 0$, từ hệ phương trình (1.12) suy ra

$$X_A^d + X_B^d = 0 \quad \text{hay} \quad X_A^d = -X_B^d$$

$$Y_A^d + Y_B^d = 0 \quad \text{hay} \quad Y_A^d = -Y_B^d$$

Như thế, nếu một rôto cứng được cân bằng tĩnh, thì phản lực động phụ của nó ở hai ổ đỡ sẽ tạo thành một ngẫu lực.

b) Khái niệm cân bằng động. Một rôto cứng quay quanh trục z được gọi là cân bằng động nếu véc tơ chính và mô men chính đối với một tâm O bất kỳ của hệ lực quán tính của rôto triệt tiêu

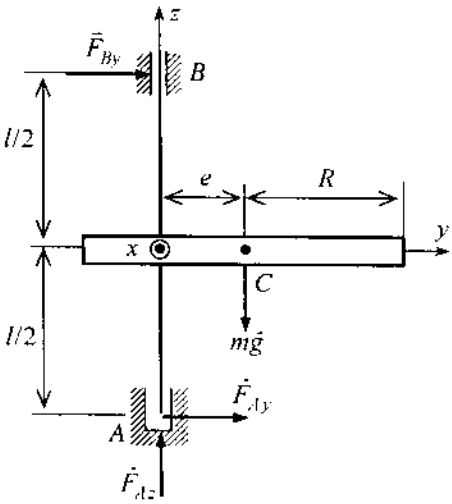
$$R_x^{'qt} = R_y^{'qt} = M_{0x}^{qt} = M_{0y}^{qt} = 0 \tag{1.18}$$

Từ các công thức (1.15) và (1.16) suy ra điều kiện cân bằng động. Khi

$$x_C = y_C = 0 \quad \text{và} \quad J_{xz} = J_{yz} = 0$$

thì rôto cứng được cân bằng động. Như thế nếu trục quay của rôto là trục quán tính chính trung tâm thì rôto được cân bằng động. Khi các điều kiện (1.18) được thoả mãn, thì từ hệ phương trình (1.12) suy ra

$$X_A^d = X_B^d = Y_A^d = Y_B^d = 0 \tag{1.19}$$



Hình 5.3

Vậy, nếu rôto cứng được cân bằng động thì các thành phần phản lực động phụ ở hai ổ đỡ đều triệt tiêu.

Chú ý rằng, đối với vật quay mỏng, khối lượng của vật xem như tập trung

trong một mặt phẳng vuông góc với trục quay z của nó. Do đó ta chỉ cần tiến hành cân bằng tĩnh các vật quay mỏng. Đối với các vật quay không mỏng ta phải tiến hành cân bằng động.

1.4. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.1. Một đĩa lệch tâm khối lượng m quay đều quanh trục AB thẳng đứng với số vòng quay n không đổi (hình 5.3). Cho biết m, R, e, l, n. Hãy xác định phản lực ở hai gối đỡ A và B.

Lời giải. Vị trí trọng tâm của đĩa trong hệ quy chiếu động gắn liền vào đĩa là

$$x_C = 0,\ y_C = e,\ z_C = 0$$

Các ngoại lực và mômen ngoại lực

$$G_x = 0,\ G_y = 0,\ G_z = -mg$$

$$M_x^e = -mge,\ M_y^e = 0,\ M_z^e = 0$$

Ta tính các mômen quán tính và mômen tích quán tính cho thí dụ này

$$J_z = \frac{m}{2}R^2 + me^2, \qquad J_y = \frac{m}{4}R^2$$

$$J_{yz} = 0,\ J_{xz} = 0 \text{ (do z=0).}$$

Ngoài ra

$$a = \frac{l}{2},\quad b = \frac{l}{2},\quad \omega_z = \omega = \pi n/30,\quad \varepsilon_z = 0$$

Thế vào phương trình (1.9) ta được

$$F_{Ax} + F_{Bx} = 0,\quad F_{Ay} + F_{By} = -me\omega^2,\quad F_{Az} = mg,$$

$$-mge + F_{Ay}\frac{l}{2} - F_{By}\frac{l}{2} = 0,\quad F_{Bx}\frac{l}{2} - F_{Ax}\frac{l}{2} = 0$$

Từ đó suy ra

$$F_{Ax} = 0,\quad F_{Ay} = me\left(\frac{g}{l} - \frac{\omega^2}{2}\right),\quad F_{Az} = mg$$

$$F_{Bx} = 0,\quad F_{By} = -me\left(\frac{g}{l} + \frac{\omega^2}{2}\right)$$

Thí dụ 5.2. Một khối trụ tròn đồng chất khối lượng m, bán kính r, chiều dài $2l$, quay quanh trục z đi qua khối tâm C của nó với vận tốc góc ω không đổi. Trục quay z lệch với trục đối xứng ζ của hình trụ một góc α không đổi. Hãy xác định phản lực động ở các gối đỡ A và B (hình 5.4). Cho biết $AC = BC = h$.

Lời giải. Lấy gốc O của hệ toạ độ động $Oxyz$ tại khối tâm C của trụ. Áp dụng các phương trình (1.12) để xác định các phản lực động ở các gối A và B.

Do $x_C = y_C = 0$, $\varepsilon = 0$, $\omega = const$, $J_{xz} = 0$ (vì trục x vuông góc với mặt phẳng đối xứng của hình trụ) nên từ (1.12) suy ra

$$X_A^d + X_B^d = 0,\ Y_A^d + Y_B^d = 0 \qquad (1)$$

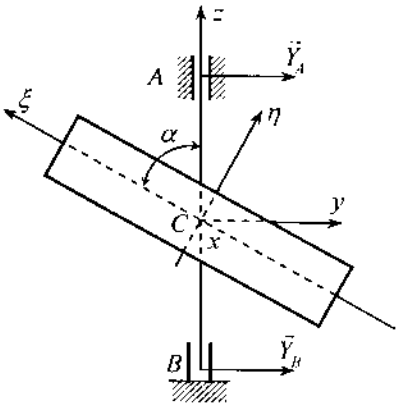
$$Y_A^d h - Y_B^d h - J_{yz}\omega^2 = 0,\ \ -X_A^d h + X_B^d h = 0 \qquad (2)$$

Từ các phương trình (1) và (2) suy ra

$$X_A^d = X_B^d = 0,\quad Y_A^d = -Y_B^d = \frac{J_{yz}\omega^2}{2h} \qquad (3)$$

Khó khăn trong bài toán này là tính J_{yz}. Trong thí dụ này y, z không phải là các trục quán tính chính, mà η, ζ mới là các trục quán tính chính. Theo định nghĩa ta có

$$J_{yz} = \int_B yz\,dm \qquad (4)$$



Hình 5.4

Từ hình vẽ 5.4 ta có

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

Do đó

$$\begin{aligned} y &= \eta\cos\alpha - \zeta\sin\alpha \\ z &= \eta\sin\alpha + \zeta\cos\alpha \end{aligned} \qquad (5)$$

Thế (5) vào (4) ta được

$$J_{yz} = \int_B (\eta\cos\alpha - \zeta\sin\alpha)(\eta\sin\alpha + \zeta\cos\alpha)dm$$

$$= \sin\alpha\cos\alpha\int_B \eta^2 dm + \cos^2\alpha\int_B \eta\zeta\,dm - \sin^2\alpha\int_B \eta\zeta\,dm - \sin\alpha\cos\alpha\int_B \zeta^2 dm$$

Do ζ là trục đối xứng của hình trụ nên là trục quán tính chính của nó. Nên

$$J_{\eta\zeta} = \int_B \eta\zeta\,dm = 0$$

Vì vậy $J_{yz} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \int_B (\eta^2 - \zeta^2)dm = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left[\int_B (\xi^2 + \eta^2)dm - \int_B (\xi^2 + \zeta^2)dm\right]$

Đối với hình trụ tròn

$$J_\zeta = \int_B \left(\xi^2 + \eta^2\right) dm = \frac{1}{2} m r^2$$

$$J_\eta = \int_B \left(\xi^2 + \zeta^2\right) dm = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

Do đó $J_{yz} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \left[\frac{1}{2} m r^2 - m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)\right] = \frac{1}{2} m \left(\frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3}\right)\sin 2\alpha$ (6)

Thế (6) vào (3) ta được

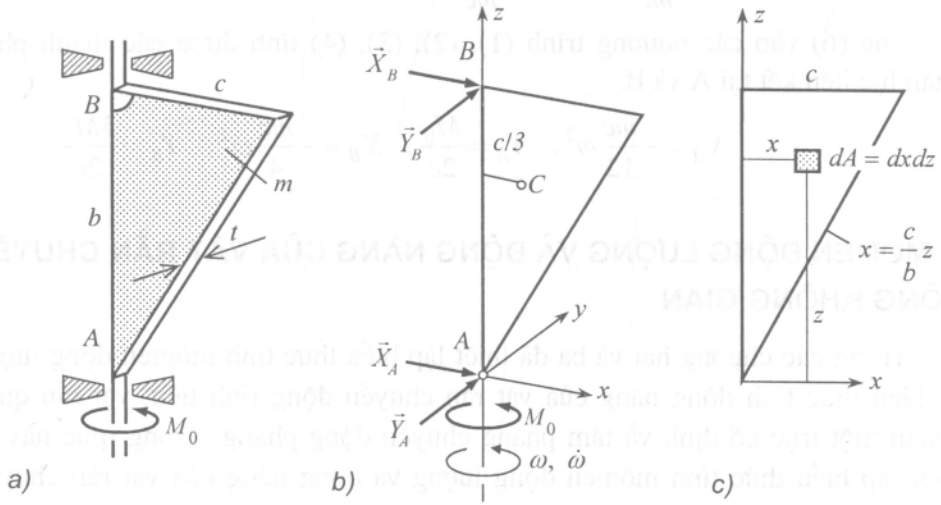
$$-Y^d{}_A = Y^d{}_B = \frac{m}{4h}\left(\frac{l^2}{3} - \frac{r^2}{4}\right)\omega^2 \sin 2\alpha$$

Thí dụ 5.3. Một tấm mỏng đồng chất hình tam giác khối lượng m có thể quay quanh trục AB thẳng đứng như hình 5.5, do tác dụng của ngẫu lực có mômen M_0 không đổi. Hãy tìm phương trình chuyển động và các thành phần phản lực động.

Lời giải. Hệ khảo sát là tấm hình tam giác. Chọn hệ toạ độ động như hình vẽ. Hệ trục động $Axyz$ có trục z là trục quay, Axz nằm trong mặt phẳng tấm. Toạ độ trọng tâm của tấm là

$$x_C = \frac{1}{3}c, \quad y_C = 0, \quad z_C = \frac{2}{3}b$$

Khoảng cách từ gốc toạ độ đến điểm B là b.



Hình 5.5

Ta tính các mômen quán tính (μ là khối lượng đơn vị diện tích).

$$J_z = \int_B x^2 dm = \mu \int x^2 dA = \mu \int_0^b \left[\int_0^{cz/b} x^2 dx \right] dz = \frac{1}{6} mc^2$$

$$J_{xz} = \int_B xzdm = \mu \int xzdA = \mu \int_0^b \left[\int_0^{cz/b} xdx \right] zdz = \frac{mcb}{4}$$

$$J_{yz} = 0$$

Theo các phương trình (1.9) ta có

$$X_A + X_B + mx_c\omega^2 = 0 \Rightarrow X_A + X_B = \frac{mc\omega^2}{3} \qquad (1)$$

$$Y_A + Y_B - mx_c\varepsilon = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B = \frac{mc\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

$$-Y_B b = -J_{xz}\varepsilon = -\frac{mcb}{4}\varepsilon \qquad (3)$$

$$-X_B b = -J_{xz}\omega^2 = -\frac{mcb}{4}\omega^2 \qquad (4)$$

$$J_z\dot{\omega} = M_0 \qquad (5)$$

Nếu tại thời điểm ban đầu ($t = 0$) ta có $\omega(0) = 0$, thì từ phương trình (5) tính được

$$\dot{\omega} = \frac{6M_0}{mc^2} \Rightarrow \omega = \frac{6M_0}{mc^2} t \qquad (6)$$

Thế (6) vào các phương trình (1), (2), (3), (4) tính được các thành phần phản lực liên kết tại A và B.

$$X_A = -\frac{mc}{12}\omega^2, \quad Y_A = \frac{M_0}{2c}, \quad X_B = -\frac{mc}{4}\omega^2, \quad Y_B = \frac{3M_0}{2c}.$$

2. MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỘNG NĂNG CỦA VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG KHÔNG GIAN

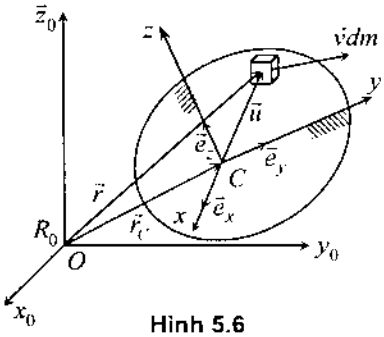
Trong các chương hai và ba đã thiết lập biểu thức tính mômen động lượng và biểu thức tính động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến, vật rắn quay quanh một trục cố định và tấm phẳng chuyển động phẳng. Trong mục này sẽ thiết lập biểu thức tính mômen động lượng và động năng của vật rắn chuyển động không gian.

2.1. Mômen động lượng của vật rắn chuyển động tùy ý trong không gian

a) Mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm của nó

Xét vật rắn B chuyển động trong hệ quy chiếu cố định R_O. Gắn chặt vào khối tâm của vật rắn hệ quy chiếu Cxyz (hình 5.6). Mômen động lượng của vật rắn B đối với khối tâm C của nó được xác định bởi công thức

$$\vec{l}_C = \int_B \vec{u} \times \vec{v} dm \qquad (2.1)$$



Hình 5.6

Theo phần Động học, vận tốc $\vec{v}$ có biểu diễn

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{u} \qquad (2.2)$$

Thế (2.2) vào (2.1) ta được

$$\vec{l}_C = \int [\vec{u} \times (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{u})] dm = m\vec{u}_C \times \vec{v}_C + \int [\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})] dm \qquad (2.3)$$

Trong đó $\vec{u}$ là khoảng cách từ phần tử dm đến khối tâm C của vật rắn B. Từ hình vẽ 5.6 thấy rằng $\vec{u}_C$ =0. Do đó

$$\vec{l}_C = \int [\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})] dm \qquad (2.4)$$

Bây giờ ta tính tích phân ở trong vế phải của biểu thức (2.4). Ký hiệu $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ là các véc tơ đơn vị trên các trục của hệ toạ độ Cxyz, x, y, z là các toạ độ của véc tơ $\vec{u}$, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ là các hình chiếu của $\vec{\omega}$ lên các trục của hệ toạ độ đó. Ta có

$$\vec{u} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad (2.5)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z \qquad (2.6)$$

Chú ý đến định nghĩa của tích véc tơ kép của ba véc tơ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ ta có

$$\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = u^2\vec{\omega} - (\vec{u}.\vec{\omega})\vec{u}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) &= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(\omega_x\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z\right) \\
&\quad - \left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z\right)\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) \\
&= \left[\left(y^2 + z^2\right)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z\right]\vec{e}_x \\
&\quad + \left[\left(z^2 + x^2\right)\omega_y - yx\omega_x - yz\omega_z\right]\vec{e}_y \qquad (2.7) \\
&\quad + \left[\left(x^2 + y^2\right)\omega_z - zx\omega_x - zy\omega_y\right]\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Từ (2.7) suy ra

$$\vec{l}_C = \int_B \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm = \left[\omega_x \int_B \left(y^2 + z^2\right) dm - \omega_y \int_B xydm - \omega_z \int_B xzdm \right] \vec{e}_x +$$

$$\left[-\omega_x \int_B yxdm + \omega_y \int_B \left(z^2 + x^2\right) dm - \omega_z \int_B yzdm \right] \vec{e}_y +$$

$$\left[-\omega_x \int_B zxdm - \omega_y \int_B zydm + \omega_z \int_B \left(x^2 + y^2\right) dm \right] \vec{e}_z$$

Theo các định nghĩa khái niệm mômen quán tính khối trong chương 2 ta có

$$J_x = \int_B \left(y^2 + z^2\right) dm, \quad J_{xy} = \int_B xydm$$

$$J_y = \int_B \left(z^2 + x^2\right) dm, \quad J_{yz} = \int_B yzdm$$

$$J_z = \int_B \left(x^2 + y^2\right) dm, \quad J_{zx} = \int_B zxdm$$

Do đó mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm C của nó có dạng

$$\begin{aligned} \vec{l}_C &= \left(J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z\right)\vec{e}_x \\ &+ \left(J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z - J_{yx}\omega_x\right)\vec{e}_y + \left(J_z\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y\right)\vec{e}_z \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nếu chọn Cxyz là hệ trục quán tính chính thì $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$. Khi đó

$$\vec{l}_C = \left(J_x\omega_x\right)\vec{e}_x + \left(J_y\omega_y\right)\vec{e}_y + \left(J_z\omega_z\right)\vec{e}_z \tag{2.9}$$

b) Mô men động lượng của vật rắn đối với điểm O tùy ý

Từ hình vẽ (5.6) ta có

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{u}$$

Do đó

$$\vec{l}_O = \int_B \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_B (\vec{r}_C + \vec{u}) \times \vec{v} dm = \vec{r}_C \times \int_B \vec{v} dm + \int_B \vec{u} \times \vec{v} dm$$

$$\vec{l}_O = \vec{l}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C \tag{2.10}$$

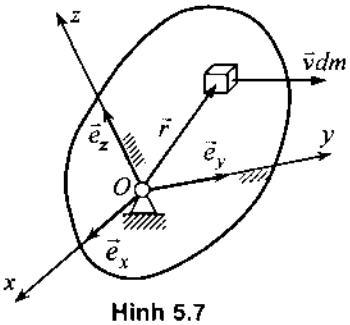
2.2. Mômen động lượng của vật rắn quay quanh một điểm cố định

Trong trường hợp vật rắn quay quanh một điểm cố *O* định (hình 5.7), theo định nghĩa

$$\vec{l}_O = \int_B \vec{r} \times \vec{v} dm \qquad (2.11)$$

Do $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ nên

$$\vec{l}_O = \int \left[\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right] dm \qquad (2.12)$$



Hình 5.7

Chọn $Oxyz$ là hệ toạ độ gắn liền vào vật rắn B. Từ hình vẽ thấy rằng

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \qquad (2.13)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{e}_x + \omega_y \vec{e}_y + \omega_z \vec{e}_z \qquad (2.14)$$

Tính toán tương tự như trên ta có

$$\begin{aligned} l_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z \\ l_y &= J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z - J_{yx}\omega_x \\ l_z &= J_z\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Trong đó $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$ là các hằng số. Nếu chọn Ox, Oy, Oz là các trục quán tính chính thì $J_{xy} = 0$, $J_{yz} = 0$, $J_{zx} = 0$. Để phân biệt, ta ký hiệu các mômen quán tính chính là J_1, J_2, J_3 (hoặc J_I, J_{II}, J_{III}). Từ (2.15) ta suy ra

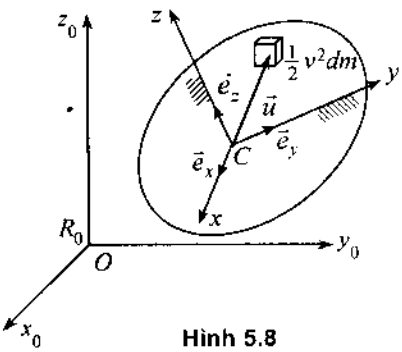
$$\vec{l}_O = J_1\omega_1\vec{e}_1 + J_2\omega_2\vec{e}_2 + J_3\omega_3\vec{e}_3 \qquad (2.16)$$

2.3. Động năng của vật rắn

a) Mô hình vật rắn chuyển động tổng quát

Xét vật rắn B chuyển động trong không gian (hình 5.8). Theo định nghĩa biểu thức động năng của vật rắn có dạng

$$T = \frac{1}{2}\int_B v^2 dm = \frac{1}{2}\int_B \vec{v}.\vec{v} dm \quad (2.17)$$



Hình 5.8

Từ công thức tính vận tốc

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

Suy ra $$\vec{v}.\vec{v} = v_C^2 + 2\vec{v}_C.(\vec{\omega} \times \vec{u}) + (\vec{\omega} \times \vec{u}).(\vec{\omega} \times \vec{u}) \qquad (2.18)$$

Sử dụng công thức tích hỗn hợp của ba véc tơ $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \times \vec{a})$, ta có

$$(\vec{\omega} \times \vec{u}).(\vec{\omega} \times \vec{u}) = \vec{\omega}.\left[\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})\right] \qquad (2.19)$$

Thế (2.18) và (2.19) vào (2.17) tính được

$$T = \frac{1}{2}\int_B v_C^2 dm + \vec{v}_C.(\vec{\omega} \times \int_B \dot{u}\, dm) + \frac{1}{2}\vec{\omega}.\int_B [\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})] dm$$

Theo công thức (2.4) $\vec{l}_C = \int_B [\vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u})] dm$ và chú ý đến định nghĩa khối tâm $\int \dot{u} dm = m\vec{u}_C = 0$, ta có công thức tính động năng của một vật rắn chuyển động trong không gian ba chiều

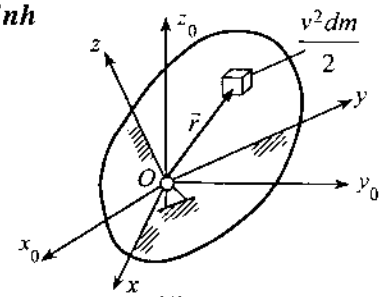
$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{l}_C = \frac{1}{2}\vec{v}_C.\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{l}_C \qquad (2.20)$$

Trong đó, $\vec{l}_C$ là mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm C của nó và được xác định bởi công thức (2.9).

b) Mô hình vật rắn quay quanh một điểm cố định

Trong trường hợp vật rắn quay quanh một điểm O cố định (hình 5.9), do $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, nên ta có

$$\vec{v}.\dot{v} = \vec{v}.(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}.(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (2.21)$$



Hình 5.9

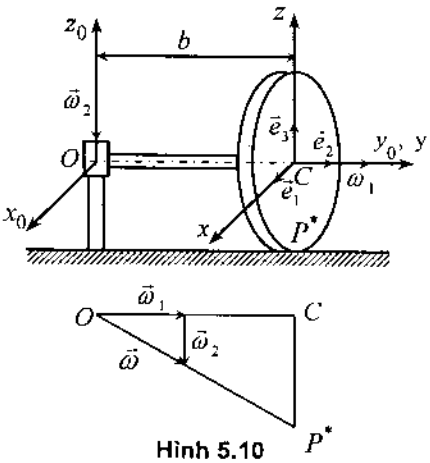
Biểu thức động năng của vật rắn quay quanh một điểm O cố định có dạng

$$T = \frac{1}{2}\int_B v^2 dm = \frac{1}{2}\int_B \vec{v}.\vec{v}\, dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\int_B \vec{r} \times \vec{v}\, dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{l}_O \qquad (2.22)$$

Trong đó $\vec{l}_O$ là mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O cố định.

2.4. Thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.4. Một đĩa tròn đồng chất khối lượng m, bán kính r, được lắp vào tay quay nằm ngang $OC = b$. Đĩa chuyển động tương đối quanh trục OC với vận tốc góc ω_1 (hình 5.10). Trục OC quay quanh trục thẳng đứng Oz_0 làm cho đĩa lăn không trượt trên nền ngang E cố định. Hãy xác định véc tơ mômen động lượng của đĩa đối với khối tâm C của nó và đối với điểm O cố định và động năng của đĩa.



Hình 5.10

Lời giải. Chọn đĩa tròn B làm vật rắn khảo sát. Chuyển động của đĩa là chuyển động quay quanh điểm O cố định. Chọn các trục quán tính chính của đĩa là Cx, Cy, Cz, ta có

$$J_x = J_z = \frac{1}{4}mr^2\ ;\ J_y = \frac{1}{2}mr^2 \qquad (1)$$

Ký hiệu $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ lần lượt là các véc tơ đơn vị trên các trục của hệ động Cxyz gắn chặt vào đĩa. Từ hình vẽ ta có $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{e}_2$, $\vec{v}_C = \omega_2 b\vec{e}_1$.

– Mômen động lượng: Do $\vec{v}_{P^*} = 0$ nên OP^* là trục quanh tức thời. Vì vậy

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{b}{r} \Rightarrow \omega_2 = \frac{r}{b}\omega_1,\ \vec{\omega}_2 = -\frac{r}{b}\omega_1\vec{e}_3$$

Vận tốc góc tuyệt đối của đĩa là

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1\vec{e}_2 - \frac{r}{b}\omega_1\vec{e}_3 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra:

$$\omega_x = 0,\ \omega_y = \omega_1,\ \omega_z = -\frac{r}{b}\omega_1 \qquad (3)$$

Theo công thức (2.9)

$$l_{Cx} = J_x\omega_x = 0\ ,\ l_{Cy} = J_y\omega_y = \frac{1}{2}mr^2\omega_1$$

$$l_{Cz} = J_z\omega_z = -\frac{1}{4}mr^2\frac{r}{b}\omega_1 = -\frac{mr^3}{4b}\omega_1\ ,$$

Vậy ta có $\vec{l}_C = \dfrac{mr^2}{2}\omega_1\vec{e}_2 - \dfrac{mr^3}{4b}\omega_1\vec{e}_3$ (4)

Theo công thức (2.10)

$$\vec{l}_O = \vec{l}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C \qquad (5)$$

Trước hết ta tính

$$\vec{r}_C \times m\vec{v}_C = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & b & 0 \\ m\omega_2 b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -mb^2\omega_2\vec{e}_3 \qquad (6)$$

Kết hợp (4) và (6) suy ra

$$\vec{l}_O = \frac{mr^2}{2}\omega_1\vec{e}_2 - \frac{mr^3}{4b}\omega_1\vec{e}_3 - mb^2\omega_2\vec{e}_3 = \frac{mr^2}{2}\omega_1\vec{e}_2 - \frac{mr}{b}\left(\frac{r^2}{4} + b^2\right)\omega_1\vec{e}_3 \qquad (7)$$

Động năng: Để tính động năng của đĩa, thế (2) và (7) vào (2.22) ta được

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{l}_O = \frac{1}{2}\left(l_{Ox}\omega_x + l_{Oy}\omega_y + l_{Oz}\omega_z\right)$$

$$T = \frac{mr^2}{4}\omega_1^2 + \frac{mr}{2b}\left(\frac{r^2}{4} + b^2\right)\omega_1 \frac{r}{b}\omega_1 = \frac{mr^2}{8}(6 + \frac{r^2}{b^2})\omega_1^2 \qquad (8)$$

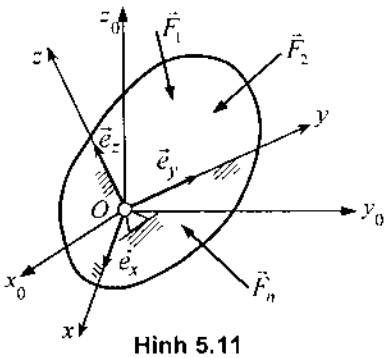
3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

3.1. Thiết lập các phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định

Cho vật rắn B quay quanh điểm O cố định, chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của vật rắn.

Giả sử hệ quy chiếu $R_0 = Ox_0y_0z_0$ là hệ quy chiếu cố định, hệ quy chiếu $R = Oxyz$ là hệ quy chiếu động gắn chặt vào vật rắn B. Theo công thức (3.4) chương 3, phần động học, về quan hệ giữa đạo hàm tuyệt đối và đạo hàm tương đối, ta có

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{l}_O}{dt} = \frac{{}^{R}d\vec{l}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{l}_O \qquad (3.1)$$



Hình 5.11

Trong đó, $\vec{l}_O$ là mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O, $\vec{\omega}$ là véc tơ vận tốc góc của vật rắn.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{l}_O}{dt} = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right) \qquad (3.2)$$

Thế (3.2) vào (3.1) ta được phương trình

$$\frac{{}^{R_0}d\vec{l}_O}{dt} = \frac{{}^{R}d\vec{l}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{l}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (3.3)$$

Nếu chọn Ox, Oy, Oz là các trục quán tính chính và ký hiệu là I, II, III, thì J_I, J_{II}, J_{III} là các hằng số. Theo (2.16) suy ra

$$\frac{{}^{R}d\vec{l}_O}{dt} = J_I\dot{\omega}_I\vec{e}_I + J_{II}\dot{\omega}_{II}\vec{e}_{II} + J_{III}\dot{\omega}_{III}\vec{e}_{III} \qquad (3.4)$$

Mặt khác theo định nghĩa tích véc tơ của hai véc tơ ta có

$$\vec{\omega}\times\vec{l}_O=\begin{bmatrix}\vec{e}_I & \vec{e}_{II} & \vec{e}_{III}\\ \omega_I & \omega_{II} & \omega_{III}\\ l_I & l_{II} & l_{III}\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{l}_O=(\omega_{II}l_{III}-\omega_{III}l_{II})\vec{e}_I+(\omega_{III}l_I-\omega_I l_{III})\vec{e}_{II}+(\omega_I l_{II}-\omega_{II}l_I)\vec{e}_{III}$$

Do đó từ phương trình véc tơ (3.3) suy ra hệ ba phương trình vi phân chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định.

$$\begin{aligned}
&J_I\frac{d\omega_I}{dt}-(J_{II}-J_{III})\omega_{II}\omega_{III}=\sum m_I\left(\vec{F}_k\right)=M_I^e\\
&J_{II}\frac{d\omega_{II}}{dt}-(J_{III}-J_I)\omega_{III}\omega_I=\sum m_{II}\left(\vec{F}_k\right)=M_{II}^e\\
&J_{III}\frac{d\omega_{III}}{dt}-(J_I-J_{II})\omega_I\omega_{II}=\sum m_{III}\left(\vec{F}_k\right)=M_{III}^e
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Hệ các phương trình (3.6) là hệ các phương trình vi phân chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định. Chúng được gọi là các phương trình động lực Euler*. Trong đó, J_I, J_{II}, J_{III} là các mô men quán tính chính của vật rắn tại O, ω_I, ω_{II}, ω_{III} là hình chiếu vận tốc góc $\vec{\omega}$ của vật rắn lên các trục quán tính chính I, II, III gắn chặt vào vật rắn. Các phương trình động lực Euler là hệ 3 phương trình vi phân phi tuyến cấp một đối với ω_I, ω_{II}, ω_{III} Việc tìm nghiệm giải tích của hệ các phương trình này nói chung là bài toán khó về mặt toán học. Ngày nay xu thế chung là sử dụng các phương pháp số để giải các phương trình này. Sử dụng các phương pháp số, các phương trình (3.6) được giải khá dễ dàng.

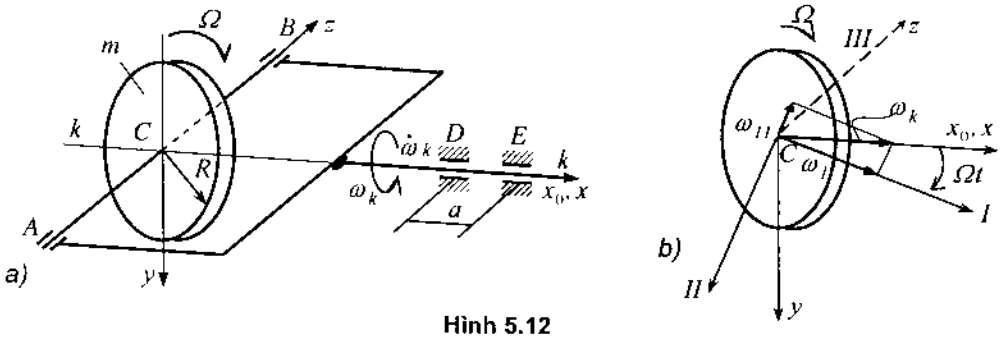
3.2. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 5.5. Một đĩa tròn mỏng khối lượng m, bán kính R, quay quanh trục quay AB của nó với vận tốc góc Ω không đổi. Trục AB và khung quay quanh trục DE với vận tốc góc ω_k, gia tốc góc $\dot{\omega}_k$ (hình 5.12a). Cho m, R, Ω, ω_k, $\dot{\omega}_k$ và a. Hãy xác định mô men M_k cần thiết để khung có thể quay DE được và các phản lực liên kết động phụ tại các ổ đỡ D và E khi khung quay.

Lời giải. Chọn các trục quán tính chính của đĩa là các trục I, II, III như hình vẽ (5.12b). Ta có

$$J_I=J_{II}=\frac{m}{4}R^2,\qquad J_{III}=\frac{1}{2}mR^2$$

* Euler (1707–1783), nhà toán học và cơ học Thuỵ Sĩ. Ông làm việc nhiều năm ở St. Petersburg (Nga) và Berlin (Đức).



Hình 5.12

Do $\dot{\Omega}$ nằm trên trục III vuông góc với mặt phẳng chứa các trục I và II, nên hình chiếu của $\dot{\omega} = \vec{\Omega} + \overrightarrow{\omega_k}$ lên các trục quán tính chính có dạng

$$\omega_I = \omega_k \cos\Omega t\,, \qquad \omega_{II} = -\omega_k \sin\Omega t\,, \quad \omega_{III} = \Omega = const$$

Đạo hàm theo thời gian các biểu thức trên

$$\dot{\omega}_I = \dot{\omega}_k \cos\Omega t - \omega_k\Omega\sin\Omega t\,, \quad \dot{\omega}_{II} = -\dot{\omega}_k \sin\Omega t - \omega_k\Omega\cos\Omega t\,, \quad \dot{\omega}_{III} = 0$$

Thế các biểu thức này vào phương trình động lực Euler (3.5) ta được

$$M_I = J_I\left(\dot{\omega}_k \cos\Omega t - \omega_k\Omega\sin\Omega t\right) - \left(J_{III} - J_{II}\right)\omega_k\Omega\sin\Omega t$$

$$M_{II} = J_{II}\left(-\dot{\omega}_k \sin\Omega t - \omega_k\Omega\cos\Omega t\right) + \left(J_I - J_{III}\right)\omega_k cos\Omega t$$

$$M_{III} = J_{III}.0 + \left(J_{II} - J_I\right).\omega_I\omega_{II}$$

hay

$$M_I = J_I\dot{\omega}_k \cos\Omega t - J_{III}\omega_k\Omega\sin\Omega t$$

$$M_{II} = -J_{II}\dot{\omega}_k \sin\Omega t - J_{III}\omega_k\Omega\cos\Omega t$$

$$M_{III} = 0$$

Chiếu véc tơ mômen $\vec{M}_O(M_I, M_{II})$ lên hệ toạ độ $Oxyz$ suy ra

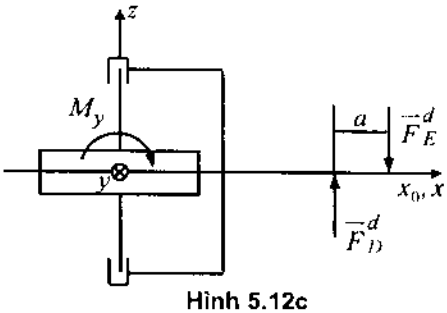
$$M_x = M_I \cos\Omega t - M_{II}\sin\Omega t = J_I\dot{\omega}_k$$

$$M_y = M_I \sin\Omega t + M_{II}\cos\Omega t = -J_{III}\omega_k\Omega$$

$$M_z = M_{III} = 0$$

Do $M_z = 0$, nên chỉ còn M_y là ngẫu lực của các phản lực động phụ tại tác dụng lên các ổ đỡ tại D và E tác dụng lên vật rắn, do đó gây nên chuyển động của khung. Từ hình vẽ (5.12c) ta có

$$F_D^d = F_E^d = \frac{M_y}{a} = -\frac{J_{III}\omega_k\Omega}{a}$$

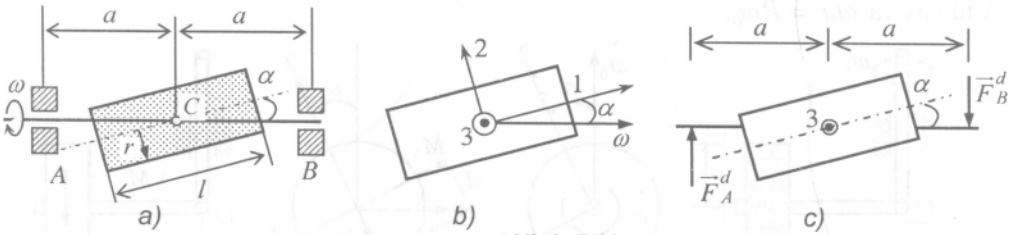


Hình 5.12c

Thí dụ 5.6. Một trụ tròn đồng nhất, khối lượng m, bán kính r, dài l, quay quanh một trục cố định với vận tốc góc ω không đổi. Trục quay nghiêng một góc α với trục đối xứng của hình trụ (hình 5.13a). Trọng tâm C của hình trụ nằm trên trục quay. Hãy xác định phản lực động phụ ổ các ổ đỡ.

Lời giải. Trọng tâm C của trụ nằm trên trục quay nên $\vec{r}_c = 0$. Do đó véc tơ chính của các phản lực gối đỡ phải triệt tiêu. Thật vậy

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e = 0 \Rightarrow \vec{F}_A^d + \vec{F}_B^d = 0, \quad \text{vì} \quad \vec{F}_A^t + \vec{F}_B^t + \vec{P} = 0.$$



Hình 5.13

Áp dụng các phương trình động lực Euler (3.6) xác định mômen của phản lực ổ đỡ. Ta vẽ các trục chính như hình (5.13). Các mômen quán tính chính (tra bảng) có dạng

$$J_1 = \frac{1}{2}mr^2, \qquad J_2 = J_3 = \frac{m}{12}\left(l^2 + 3r^2\right)$$

Chiếu véc tơ $\vec{\omega}$ lên các trục quán tính chính ta được (hình 5.13b)

$$\omega_1 = \omega\cos\alpha, \quad \omega_2 = -\omega\sin\alpha, \quad \omega_3 = 0.$$

Do $\omega = const$,từ đó suy ra $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Theo phương trình động lực Euler (3.6) ta có

$$M_1 = 0, \; M_2 = 0$$

$$M_3 = -\left(J_1 - J_2\right)\omega_1\omega_2 = \left[\frac{m}{2}r^2 - \frac{m}{12}\left(l^2 + 3r^2\right)\right]\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$= -\frac{m}{24}\left(l^2 - 3r^2\right)\omega^2 \sin 2\alpha$$

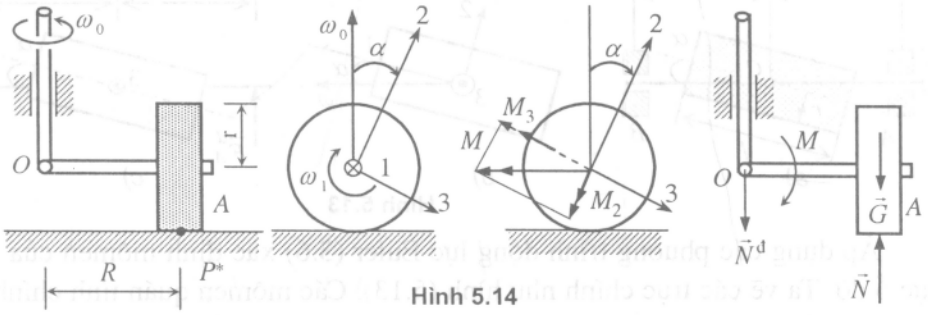
Như thế các phản lực động phụ tại các gối đỡ sinh ra do mômen đối với trục chính 3 là M_3. Theo hình vẽ 5.12c, ta có $F_A^d = F_B^d$. Từ đó xác định được

$$M_3 = -aF_A^d - aF_B^d = -2aF_A^d \Rightarrow F_A^d = F_B^d = \frac{m\left(l^2 - 3r^2\right)\omega^2}{48a}\sin 2\alpha$$

Thí dụ 5.7. Xét chuyển động lăn không trượt của một bánh xe của máy nghiền (hình 5.14). Trục mang bánh xe quay đều quanh trục thẳng đứng với vận

tốc ω_0. Cho biết các mômen quán tính chính của bánh xe J_1, $J_2 = J_3$, bán kính bánh xe là r, khoảng cách OA là R. Bỏ qua khối lượng của trục OA. Tìm áp lực của bánh xe lên nền.

Lời giải. Bánh xe tham gia hai chuyển động quay quanh hai trục giao nhau tại O. Chuyển động theo của bánh xe là chuyển động quay quanh trục thẳng đứng cùng trục OA với vận tốc góc $\omega_e = \omega_0$. Chuyển động tương đối của bánh xe là chuyển động quay quanh trục OA với vận tốc góc là ω_1, góc quay là α. Điểm P^* là điểm bánh xe tiếp xúc với mặt đường. Do đó ta có $\vec{v}_P^* = 0$. Xét điểm A ta suy ra $\omega_1 r = R\omega_0$.



Hình 5.14

Từ hình 5.14 suy ra các thành phần của véc tơ vận tốc góc của bánh xe

$$\omega_1 = \dot{\alpha} = \frac{R}{r}\omega_0\,,\ \dot{\omega}_1 = 0\,,$$

$$\omega_2 = \omega_0 \cos\alpha\,,\ \dot{\omega}_2 = -\omega_0\dot{\alpha}\sin\alpha = \omega_1\omega_3 \qquad (1)$$

$$\omega_3 = -\omega_0 \sin\alpha\,,\ \dot{\omega}_3 = -\omega_0\dot{\alpha}\cos\alpha = -\omega_1\omega_2$$

Phương trình động lực Euler đối với chuyển động của bánh xe có dạng

$$M_1 = J_1\frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3$$

$$M_2 = J_2\frac{d\omega_2}{dt} + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 \qquad (2)$$

$$M_3 = J_3\frac{d\omega_3}{dt} + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2$$

Thế (1) vào (2) tính được biểu thức xác định mômen của các ngoại lực tác dụng lên bánh xe

$$M_1 = 0$$

$$M_2 = (J_1 + J_2 - J_3)\omega_1\omega_3 = -J_1\omega_0^2\frac{R}{r}\sin\alpha \qquad (3)$$

$$M_3 = (-J_3 + J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = -J_1\omega_0^2\frac{R}{r}\cos\alpha$$

Từ (3) suy ra ngẫu lực tác dụng lên bánh xe có độ lớn

$$M = \sqrt{M_2^2 + M_3^2} = J_1\omega_0^2 \frac{R}{r} \qquad (4)$$

Ngẫu lực này nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục OA của bánh xe và song song với mặt phẳng mà bánh xe lăn trên đó. Ngẫu lực này tạo nên phản lực động phụ ở khớp O và áp lực lên mặt đường. Do đó áp lực động của bánh xe lên mặt đường là

$$N^d = \frac{M}{R} = \frac{J_1\omega_0^2}{r}$$

Áp lực toàn phần là

$$N = G + \frac{J_1\omega_0^2}{r} \qquad (5)$$

Trong đó, G là trọng lượng bánh xe.

4. CHUYỂN ĐỘNG GYRÔSCÔP

4.1. Khái niệm Gyrôscôp và sự phân loại

Định nghĩa. Một vật rắn có một trục đối xứng quay quanh một điểm cố định nằm trên trục đối xứng được gọi là Gyrôscôp.

Nếu ký hiệu các trục quán tính chính Ox là trục I, Oy là trục II, Oz là trục III, thì các phương trình động lực Euler (3.6) có dạng

$$\begin{aligned} J_I\dot{\omega}_I - (J_{II} - J_{III})\omega_{II}\omega_{III} &= M_I \\ J_{II}\dot{\omega}_{II} - (J_{III} - J_I)\omega_{III}\omega_I &= M_{II} \\ J_{III}\dot{\omega}_{III} - (J_I - J_{II})\omega_I\omega_{II} &= M_{III} \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Căn cứ theo tính chất của các mômen quán tính khối, người ta phân loại Gyroscôp như sau

Gyrôscôp cầu	$J_I = J_{II} = J_{III}$
Gyrôscôp đối xứng	$J_I = J_{II}, J_I \neq J_{III}$
Gyrôscôp đối xứng ngắn	$J_I = J_{II} > J_{III}$
Gyrôscôp đối xứng dài	$J_I = J_{II} < J_{III}$.

Căn cứ vào vị trí trọng tâm người ta phân ta phân loại Gyroscôp như sau

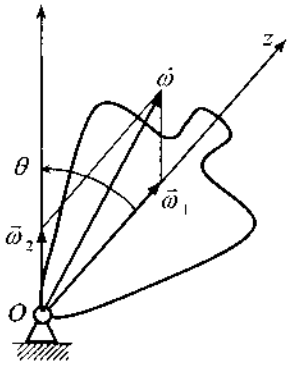
– Gyrôscôp không chịu tác dụng của trọng lực: khi trọng tâm và điểm cố định trùng nhau, ngoài trọng lực không có ngoại lực nào khác.

– Gyrôscôp nặng: khi trọng tâm nằm ngoài điểm cố định, trọng lực tạo thành mômen tác dụng lên vật rắn.

Chỉ trong trường hợp Gyrôscôp nặng, đối xứng mới có thể tìm được nghiệm giải tích.

4.2. Lý thuyết sơ cấp về Gyrôscôp

Ta xét các Gyrôscôp có một trục z đối xứng vật chất và điểm O cố định nằm trên trục đối xứng đó. Trục đối xứng này được gọi là trục đối xứng động lực của Gyrôscôp. Giả sử Gyrôscôp quay quanh trục đối xứng động lực của nó với vận tốc góc ω_1 không đổi, trục đối xứng động lực lại quay quanh một trục z_O đối xứng khác với vận tốc góc $\omega_2 << \omega_1$ (hình 5.15).



Hình 5.15

Theo các giả thiết trên suy ra

$$J_x = J_y,\ J_z \neq 0,\ J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0,$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 .$$

a) Phương trình cơ bản của lý thuyết sơ cấp Gyrôscôp

Theo giả thuyết trên ta có

$$\vec{l}_O \approx J_z \vec{\omega}_1 \tag{4.2}$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng cho chuyển động của Gyroscôp

$$\frac{d\vec{l}_O}{dt} = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) \tag{4.3}$$

Từ công thức liên hệ đạo hàm của véc tơ trong các hệ quy chiếu khác nhau, suy ra

$$\frac{{}^{R_0}d\left(J_z\vec{\omega}_1\right)}{dt} = \frac{{}^{R}d\left(J_z\vec{\omega}_1\right)}{dt} + \vec{\omega}\times J_z\vec{\omega}_1 \tag{4.4}$$

Do giả thiết $\vec{\omega}_1$ là véc tơ không đổi trong chuyển động tương đối nên

$$\frac{{}^{R}d\left(J_z\vec{\omega}_1\right)}{dt} = 0$$

Ngoài ra

$$\vec{\omega}\times J_z\vec{\omega}_1 = \left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right)\times J_z\vec{\omega}_1 = J_z\left(\vec{\omega}_2\times\vec{\omega}_1\right)$$

Nếu đưa vào ký hiệu

$$\dot{M}_O^e = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right) \tag{4.5}$$

thì phương trình (4.3) có dạng

$$J_z\left(\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1\right) = \dot{M}_O^e \tag{4.6}$$

Phương trình (4.6) được gọi là phương trình cơ bản của lý thuyết sơ cấp về Gyrôscôp.

b) Mômen Gyrôscôp và hiệu ứng Gyrôscôp

Giả sử Gyrôscôp quay quanh trục đối xứng động lực của nó với vận tốc góc $\vec{\omega}_1$, trục này lại quay quanh trục khác với vận tốc $\vec{\omega}_2$, mà $\omega_2 \ll \omega_1$. Hai trục quay giao nhau tại điểm O (hình 5.15).

Thu gọn hệ lực quán tính về điểm O cố định ta được một véc tơ chính và một mômen chính $\vec{M}_0^{qt}$. Theo nguyên lý d'Alembert thì tổng mômen chính của các ngoại lực và mômen chính các lực quán tính của Gyrôscôp phải bằng không

$$\dot{M}_0^e + \vec{M}_0^{qt} = 0. \tag{4.7}$$

Định nghĩa 4.1. Mômen chính của hệ lực quán tính của Gyrôscôp đối với tâm O cố định của nó được gọi là mômen Gyrôscôp.

Từ công thức (4.6) và (4.7) suy ra

$$\dot{M}_{gy} = \vec{M}_0^{qt} = -\vec{M}_0^e = J_z\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2\right) \tag{4.8}$$

$$M_{gy} = J_z\omega_1\omega_2 \sin\theta \tag{4.9}$$

với θ là góc giữa hai véc tơ $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$

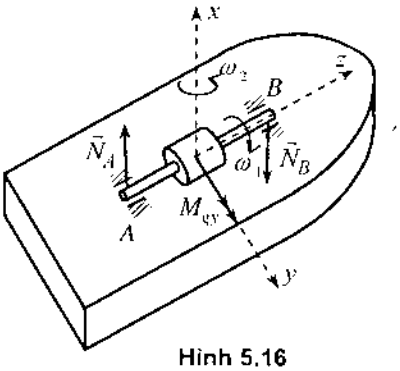
Theo công thức (4.8) thấy rằng, các véc tơ $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{M}_{gy}$ lập thành một hệ thuận. Từ đó khi biết hướng của $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ dễ dàng xác định hướng của $\vec{M}_{gy}$.

Định nghĩa 4.2. Sự xuất hiện mômen Gyrôscôp được gọi là hiệu ứng Gyrôscôp.

Như thế, hiệu ứng Gyrôscôp xảy ra khi có sự biến đổi về hướng của trục đối xứng động lực của vật quay. Xét một vài thí dụ minh hoạ. Khi ô tô chạy trên đoạn đường vòng, mỗi cặp bánh xe cùng với trục mang chúng là một Gyrôscôp. Do trục của cặp bánh xe đổi hướng nên xuất hiện mômen Gyrôscôp. Các trục máy quay nhanh trong các gối đỡ, do có độ hở nhất định giữa gối đỡ và trục, nên trục máy cũng là một Gyrôscôp. Mômen Gyrôscôp, tức là mômen quán tính của trục máy, gây nên áp lực động phụ ở các gối đỡ. Các áp lực động phụ này được gọi là các áp lực Gyrôscôp.

c) Các thí dụ

Thí dụ 5.8. Rôto của tuabin tầu thủy có trục quay song song với trục dọc của tầu (hình 5.16). Rôto có khối lượng $m = 3500$ *kg*, bán kính quán tính của rôto đối với trục quay của nó là $\rho = 0,6$ *m*, vận tốc góc của rôto $n = 3000$ *vòng/phút*. Hãy xác định áp lực lớn nhất ở hai ổ trục *A* và *B* do hiệu ứng Gyroscôp gây ra khi tầu thủy bị chòng chành quay quanh trục thẳng đứng với biên độ $\varphi_0 = 9^0$, chu kỳ $T = 15$ *s*. Cho biết khoảng cách giữa hai trục *AB* là $l = 2$ *m*.



Hình 5.16

Lời giải. Vật khảo sát là rôto của tuabin. Khi tầu chòng chành chuyển động của rôto phân thành hai thành phần : chuyển động quay quanh trục z của nó với vận tốc góc ω_1, chuyển động dao động quanh trục x do tầu chòng chành với vận tốc góc ω_2 ($\omega_1 << \omega_2$). Do đó khi tàu chòng chành, rôto của nó là một Gyroscôp. Theo đầu bài quy luật chòng chành của tàu thủy là

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \quad \text{(rad)} \qquad (1)$$

Vận tốc góc của chuyển động chòng chành này là

$$\omega_2 = \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T}\varphi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) \quad \text{(rad/s)} \qquad (2)$$

Giá trị lớn nhất của vận tốc góc này là $\omega_{2\max} = \dfrac{2\pi}{T}\varphi_0$. Như vậy mômen Gyrôscôp lớn nhất của rôto theo công thức (4.9) là

$$M_{gy\max} = J_z\omega_1\omega_{2\max}\sin 90^0 \qquad (3)$$

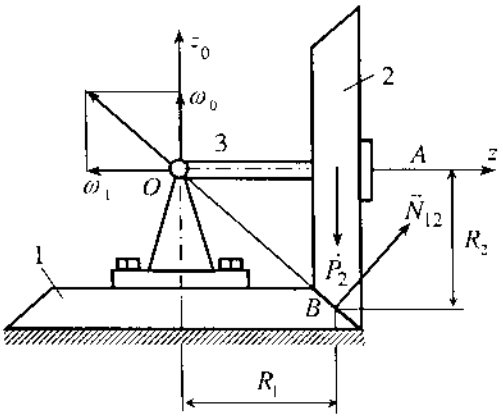
Do $(\vec{N}_A^d, \vec{N}_B^d) = \vec{M}_O^e = -\vec{M}_{gy}$, nên áp lực lớn nhất ở hai ổ đỡ *A* và *B* do hiệu ứng Gyrôscôp gây ra là

$$N_{A\max}^d = N_{B\max}^d = \frac{J_z\omega_1\omega_{2\max}}{l} = \frac{m\rho^2\dfrac{n\pi}{30}\cdot\dfrac{2\pi}{T}\varphi_0}{l} \qquad (4)$$

Thay số vào công thức trên ta được

$$N_{A\max}^d = N_{B\max}^d = \frac{3500\times(0,6)^2\times 3000.\pi\times 2\pi\times 9\pi}{2\times 30\times 15\times 180} = 13022,636N$$

Thí dụ 5.9. Cho cơ cấu hành tinh nón như hình 5.17. Bánh răng hình nón 1 có bán kính R_1 cố định. Bánh răng hình nón 2 có bán kính R_2 lăn không trượt trên bánh răng 1 nhờ tay quay 3 (OA). Tay quay OA quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω_0. Cho biết bán kính quán tính của bánh răng 2 đối với trục của nó là ρ. Coi ma sát là không đáng kể và bỏ qua khối lượng tay quay. Xác định phản lực tĩnh và phản lực động phụ của bánh răng 1 tác dụng lên bánh răng 2.



Hình 5.17

Lời giải. Chọn hệ khảo sát là cơ cấu hành tinh như hình vẽ 5.17. Bánh răng 1 cố định, tay quay OA chuyển động quay quanh một trục cố định. Bánh răng nón 2 chuyển động quay quanh điểm O cố định.

Trước hết ta xác định phản lực tĩnh N^t_{12}. Ta xét hệ lực tĩnh cân bằng. Phương trình mômen đối với tâm O có dạng

$$\sum m_0\left(\vec{F}_k\right) = N^t_{12}.OB - P_2.OA = 0$$

Từ đó suy ra

$$N^t_{12} = P_2\frac{OA}{OB} = \frac{P_2R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \qquad (1)$$

Bây giờ chuyển sang xác định phản lực động phụ N^d_{12}. Do điểm B là tâm vận tốc tức thời ta có

$$v_A = R_1.\omega_0 = R_2.\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_0 \qquad (2)$$

Bánh xe 2 trong trường hợp này xem gần đúng là một Gyroscôp. Từ công thức (4.9) suy ra

$$N^d_{12} = \frac{J_z\omega_2\omega_o\sin 90^0}{OB} = \frac{P_2\rho^2R_1\omega_0^2}{gR_2\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) nhận được

$$\frac{N^d_{12}}{N^t_{12}} = \frac{\rho^2\omega_0^2}{gR_2} \qquad (4)$$

4.3. Sự ổn định chuyển động của Gyrôscôp tự do

Như đoạn trên đã viết, Gyrôscôp là một vật rắn có trục đối xứng có thể quay tùy ý quanh điểm O cố định nằm trên trục đối xứng. Xét trường hợp điểm O cố định trùng với khối tâm C của vật rắn. Nếu véc tơ chính mômen của các ngoại lực tác dụng lên Gyrôscôp triệt tiêu, Gyrôscôp khi đó được gọi là Gyrôscôp không có ngẫu lực ngoài tác dụng, hoặc Gyrôscôp tự do. Do $M_i = 0$ ($i = 1,2,3$), từ các phương trình động lực Euler (3.6) suy ra:

$$\begin{aligned} &J_1\dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 = 0 \\ &J_2\dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 = 0 \\ &J_3\dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Giả sử $\omega_1 = \omega_0 = const$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Từ các phương trình (4.10) suy ra $\dot{\omega}_2 = 0$, $\dot{\omega}_3 = 0$. Khi đó trục 1 là trục quay cố định. Bài toán thực tế được đặt ra như sau: giả sử có một nhiễu động nhỏ tác dụng vào Gyrôscôp, làm ảnh hưởng đến ω_2 và ω_3, khi đó chuyển động của Gyrôscôp sẽ thay đổi như thế nào?

Đạo hàm phương trình thứ hai của (4.10) theo thời gian ta được

$$J_2\ddot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\omega_0\dot{\omega}_3$$

Thế $\dot{\omega}_3$ từ phương trình thứ ba của (4.10) vào phương trình trên suy ra

$$J_2J_3\ddot{\omega}_2 = -(J_1 - J_3)(J_1 - J_2)\omega_0^2\omega_2$$

hay $$\ddot{\omega}_2 + a^2\omega_2 = 0$$

Trong đó ký hiệu

$$a^2 = \frac{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}{J_2J_3}\omega_0^2 \tag{4.11}$$

Khi $a^2 > 0$, nghiệm của phương trình trên có dạng

$$\omega_2(t) = A_1\cos at + A_2\sin at$$

Khi $t \to \infty$, $\omega_2(t)$ giới nội. Chuyển động của Gyrôscôp ổn định.

Khi $a^2 < 0$, ta đặt $b^2 = -a^2 > 0$, nghiệm của phương trình (4.11) có dạng

$$\omega_2(t) = B_2e^{bt} + B_2e^{-bt} \quad (b > 0)$$

Khi $t \to \infty$, $\omega_2(t) \to \infty$. Chuyển động của Gyrôscôp không ổn định.

Vậy khi $J_1 > J_2$ và $J_1 > J_3 \to a^2 > 0$, chuyển động của Gyrôscôp ổn định

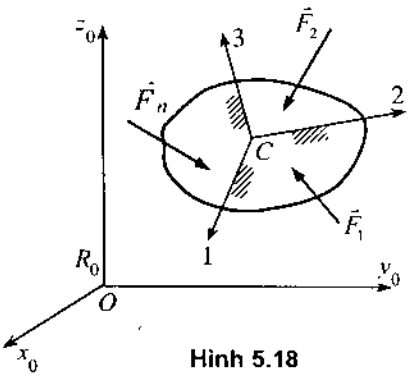
Khi $J_1 < J_2$ và $J_1 > J_3$ hoặc $J_1 > J_2$ và $J_1 < J_3$, chuyển động của Gyrôscôp sẽ không ổn định.

Kết luận: Sự ổn định của Gyrôscôp tự do phụ thuộc vào sự phân bố khối lượng của nó. (Khái niệm ổn định chuyển động sẽ được trình bày kỹ hơn ở chương 8).

5. CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN TRONG KHÔNG GIAN

5.1. Các phương trình vi phân chuyển động của vật rắn trong không gian

Cho vật rắn B chuyển động tùy ý đối với hệ quy chiếu cố định $R_O = \{Ox_0y_0z_0\}$. Gắn chặt vào khối tâm C của vật rắn B hệ quy chiếu quán tính chính (hình 5.18). Vị trí của vật rắn B đối với hệ quy chiếu cố định R_O được xác định bởi vị trí của khối tâm C và hướng quay của của nó. Giả sử vật rắn chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có phương trình vi phân chuyển động của khối tâm C



Hình 5.18

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C^{(o)} &= \sum F_{kx}^{(0)} \\ m\ddot{y}_C^{(o)} &= \sum F_{ky}^{(0)} \\ m\ddot{z}_C^{(o)} &= \sum F_{kz}^{(0)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Trong đó, m là khối lượng của vật thể, $x_c^{(0)}, y_c^{(0)}, z_c^{(0)}$ là toạ độ khối tâm C trong hệ quy chiếu cố định $R_O = Ox_0y_0z_0$, $F_{kx}^{(0)}, F_{ky}^{(0)}, F_{kz}^{(0)}$ là hình chiếu của các lực $\vec{F}_k$ trên các trục Ox_0, Oy_0, Oz_0.

Áp dụng định lý biến thiên động lượng suy ra các phương trình động lực Euler

$$\begin{aligned} J_1\frac{d\omega_1}{dt} - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 &= \sum m_1\left(\vec{F}_k\right) = M_1 \\ J_2\frac{d\omega_2}{dt} - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 &= \sum m_2\left(\vec{F}_k\right) = M_2 \\ J_3\frac{d\omega_3}{dt} - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 &= \sum m_3\left(\vec{F}_k\right) = M_3 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Trong đó J_1, J_2, J_3 là mômen quán tính của vật rắn đối với các trục quán

tính chính đi qua khối tâm C của vật rắn, ω_1, ω_2, ω_3 là hình chiếu của véc tơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ lên các trục quán tính chính $C1$, $C2$, $C3$ của vật rắn B, $m_1\left(\vec{F}_k\right)$, $m_2\left(\vec{F}_k\right)$, $m_3\left(\vec{F}_k\right)$ là mômen của lực $\vec{F}_k$ đối với trục $C1$, $C2$, $C3$.

Các phương trình (5.1) và (5.2) được gọi là các phương trình vi phân chuyển động của vật rắn trong không gian ba chiều.

5.2. Các góc Euler và các phương trình vi phân chuyển động quay

Khi sử dụng các góc Euler để xác định hướng quay của vật rắn, theo chương 5 phần động học ta có ba phương trình động học Euler

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\
\omega_2 &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\
\omega_3 &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Đạo hàm các phương trình (5.3) theo thời gian ta được

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_1}{dt} &= \ddot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \\
&\quad + \ddot{\theta}\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\
\frac{d\omega_2}{dt} &= \ddot{\psi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad - \ddot{\theta}\sin\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi \\
\frac{d\omega_3}{dt} &= \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta + \ddot{\varphi}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Thế các phương trình (5.3) và (5.4) vào các phương trình (5.2) nhận được hệ ba phương trình vi phân cấp hai mô tả chuyển động quay quanh khối tâm của vật rắn không gian

$$\begin{aligned}
M_1 &= J_1(\ddot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \ddot{\theta}\cos\varphi \\
&\quad + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi) \\
&\quad - (J_2 - J_3)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \\
M_2 &= J_2(\ddot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \ddot{\theta}\sin\varphi \\
&\quad + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi - \dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi) \\
&\quad - (J_3 - J_1)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \\
M_3 &= J_3(\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) \\
&\quad - (J_1 - J_2)(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Các phương trình (5.1) và (5.5) tạo thành một hệ sáu phương trình vi phân cấp hai mô tả chuyển động của vật rắn trong không gian ba chiều. Trong đó sáu ẩn là x_C, y_C, z_C (ba toạ độ suy rộng định vị), ψ, θ, φ (ba toạ độ suy rộng định hướng). Nếu biết thêm 12 điều kiện đầu thì ta có thể giải hệ phương trình vi phân chuyển động của vật rắn tổng quát một cách dễ dàng bằng phương pháp số.

Các phương trình (5.1) và (5.5) được gọi là hệ các phương trình Newton–Euler. Người ta thường sử dụng hệ các phương trình vi phân này để thiết lập hệ các phương trình vi phân chuyển động của vệ tinh, máy bay, rôbôt dưới nước, ...

Chương 6

VA CHẠM CỦA CÁC VẬT RẮN

Va chạm là một hiện tượng cơ học hay gặp trong kỹ thuật. Có những hiện tượng va chạm có hại ta không mong muốn (chẳng hạn sự va chạm của hai ô tô) nhưng cũng có những hiện tượng va chạm có lợi, được sử dụng trong kỹ thuật (búa đóng cọc, các máy va rung, con lắc xác định vận tốc viên đạn). Qua va chạm xuất hiện các gia tốc lớn của các điểm của vật rắn và sự biến dạng ở các vùng tiếp xúc.

Trong 30 năm cuối của thế kỷ XX, bài toán tiếp xúc động lực học đã được nhiều nhà cơ học quan tâm nghiên cứu. Các quy luật phi tuyến của va chạm, ma sát, sự tương tác giữa va chạm, ma sát và dao động, ổn định là những nội dung cơ bản của lý thuyết tiếp xúc động lực học. Tuy nhiên, đây là những vấn đề khó, vượt ra ngoài nội dung giáo trình này. Ở đây, chỉ trình bày lý thuyết sơ cấp về va chạm, trong đó sử dụng định luật gần đúng của Newton và Poison về va chạm và chỉ xét mô hình va chạm của hai vật rắn phẳng.

1. CÁC GIẢ THIẾT GẦN ĐÚNG, CÁC ĐỊNH LUẬT NEWTON VÀ POISSON VỀ VA CHẠM

1.1. Định nghĩa va chạm

Va chạm của các vật rắn là sự tiếp xúc bất thình lình của các vật rắn, gây nên sự thay đổi các đặc trưng cơ học của các vật thể này như vận tốc các điểm và vận tốc góc của các vật rắn va nhau thay đổi một lượng hữu hạn trong một khoảng thời gian rất ngắn.

1.2. Các đặc điểm của quá trình va chạm

a) Thời gian va chạm. Trong quá trình va chạm giữa các vật rắn, thời gian va chạm rất ngắn. Ký hiệu t_1 là thời điểm đầu va chạm, t_2 là thời điểm cuối va chạm, $\Delta t = t_2 - t_1$ rất nhỏ.

b) Sự biến dạng và khôi phục khi va chạm. Trong quá trình va chạm, các vật rắn va nhau bị biến dạng ở vùng tiếp xúc. Mức độ và trạng thái biến dạng phụ thuộc vào bản chất đàn hồi của hai mặt va chạm vào nhau. Quan sát các vật thể va chạm ta thấy rằng, ban đầu các vật thể bị biến dạng ở vùng tiếp xúc, sau

đó do tính chất đàn hồi của vật liệu, chúng khôi phục lại dần hình dáng cũ. Căn cứ vào tính chất đàn hồi của vật liệu, người ta phân loại va chạm như sau:

– Va chạm mềm (hay va chạm dẻo lý tưởng): không có giai đoạn khôi phục.

– Va chạm đàn hồi: có giai đoạn khôi phục.

– Va chạm tuyệt đối đàn hồi: các vật thể khôi phục lại đúng hình dáng cũ.

c) Lực va chạm và xung lực va chạm. Khi hai vật rắn va nhau, các lực liên kết xuất hiện ở các vật va nhau trong thời gian va chạm được gọi là các lực va chạm. Các loại lực hoạt động khác tác dụng lên các vật rắn va chạm được gọi là các lực thông thường. Ký hiệu lực va chạm là $\vec{R}(t)$.

Do quá trình va chạm xảy ra trong khoảng thời gian rất nhỏ, vận tốc các điểm thay đổi một lượng hữu hạn, cho nên các lực va chạm có trị số rất lớn và biến thiên rất nhanh. Vì vậy người ta thường đánh giá tác dụng của lực va chạm qua xung lượng của chúng.

Định nghĩa. Xung lượng của lực va chạm trong thời gian va chạm $\Delta t = t_2 - t_1$ được gọi là xung lực va chạm

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}(t)dt \tag{1.1}$$

1.3. Các giả thiết gần đúng

Trong lý thuyết sơ cấp về va chạm của các vật rắn, chúng ta công nhận các giả thiết gần đúng sau:

a) Vùng tiếp xúc biến dạng của các vật rắn là một vùng nhỏ so với diện tích bề mặt của các vật rắn va chạm vào nhau. Do đó ta có thể sử dụng mô hình hai vật rắn tiếp xúc điểm khi tính toán va chạm của các vật rắn.

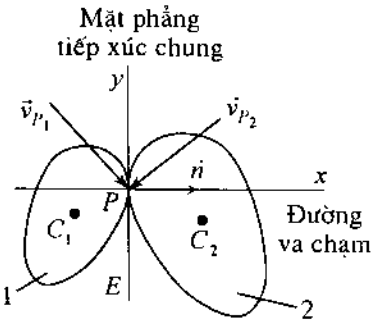
b) Trong quá trình va chạm, do thời gian va chạm Δt rất bé, sự thay đổi vị trí của các vật thể va nhau là nhỏ. Do đó ta có thể bỏ qua dịch chuyển trong quá trình va chạm.

c) Các lực va chạm lớn tới mức có thể bỏ qua tác dụng của các lực thông thường (trọng lượng, sức đẩy của gió, lực cản không khí, ...) trong thời gian va chạm.

1.4. Mô hình cơ học của hai vật rắn phẳng va chạm

Xét hai vật rắn 1 và 2. Trong thời gian va chạm chúng tiếp xúc với nhau tại điểm P (hình 6.1). Ký hiệu P_1 là điểm thuộc vật rắn 1, P_2 là điểm thuộc vật rắn 2, mà tại thời điểm va chạm chúng trùng nhau tại P.

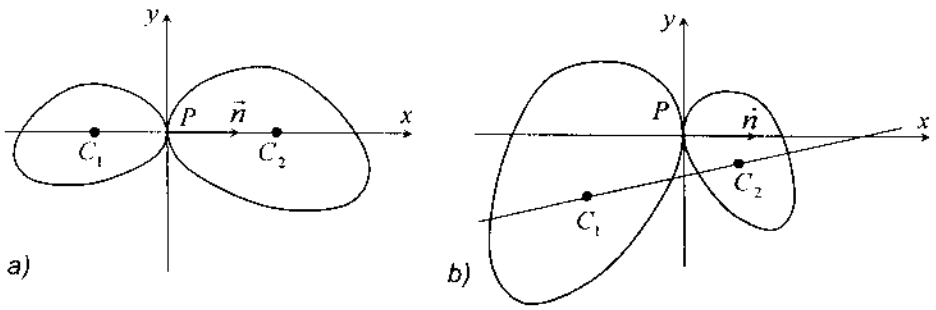
a) Mặt phẳng tiếp xúc và đường va chạm. Chúng ta giả thiết khi hai vật rắn chạm vào nhau, ở điểm tiếp xúc P, chúng có chung một mặt phẳng tiếp tuyến E. Mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng tiếp xúc. Đường pháp tuyến chung với mặt phẳng tiếp xúc tại điểm tiếp xúc P được gọi là đường va chạm. Ký hiệu đường va chạm là Pn hoặc Px (hình 6.1).



Hình 6.1

b) Sự phân loại va chạm

Va chạm xuyên tâm và va chạm không xuyên tâm. Gọi đường thẳng nối hai khối tâm C_1 và C_2 của hai vật rắn va nhau là đường xuyên tâm. Khi đường xuyên tâm trùng với đường va chạm thì va chạm được gọi là va chạm xuyên tâm (hình 6.2a). Ngược lại khi đường xuyên tâm không trùng với đường va chạm, thì va chạm được gọi là va chạm không xuyên tâm (hình 6.2b).

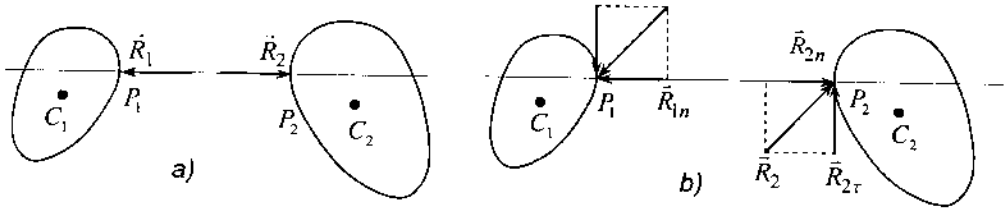


Hình 6.2

a) Va chạm xuyên tâm; b) Va chạm không xuyên tâm

Va chạm thẳng và va chạm xiên. Nếu vận tốc ở điểm tiếp xúc P dọc theo phương đường va chạm, thì va chạm được gọi là va chạm thẳng. Ngược lại khi vận tốc ở điểm tiếp xúc P không trùng với phương của đường va chạm thì va chạm được gọi là va chạm xiên. Trên hình 6.1, $\vec{v}_{P_1}$ khác phương $\vec{v}_{P_2}$, va chạm là va chạm xiên.

Va chạm nhẵn (không có ma sát) và va chạm không nhẵn (có ma sát). Va chạm gọi là nhẵn nếu lực va chạm giữa hai vật thể dọc theo phương của đường va chạm (hình 6.3a). Ngược lại, khi lực va chạm có thành phần tiếp tuyến khác không, va chạm được gọi là không nhẵn (có ma sát) (hình 6.3b).



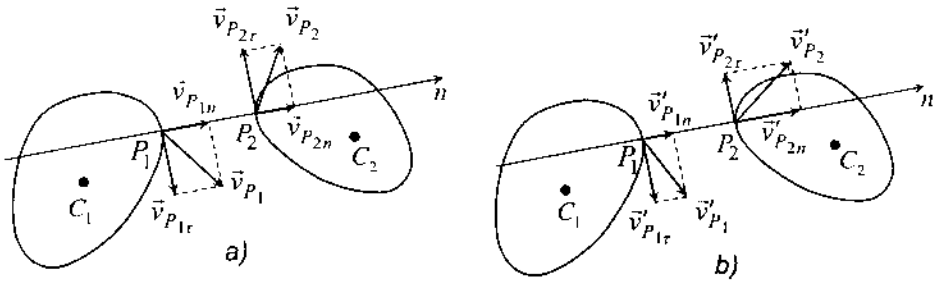
Hình 6.3

a) Nhẵn $\vec{R}_1 = -\vec{R}_2$; b) Không nhẵn $\vec{R}_{1n} = -\vec{R}_{2n}$, $\vec{R}_{1\tau} = -\vec{R}_{2\tau}$

1.5. Định luật Newton và định luật Poisson về va chạm

Trong lý thuyết sơ cấp về va chạm, chúng ta công nhận định luật Newton về va chạm (hay còn gọi là giả thiết Newton về va chạm) hoặc định luật Poisson về va chạm (hay còn gọi là giả thiết Poisson về va chạm).

Giả sử hai vật rắn va chạm tiếp xúc nhau tại điểm P (hình 6.4). Ký hiệu điểm tiếp xúc thuộc vật rắn 1 là P_1, thuộc vật rắn 2 là P_2. Vận tốc các điểm này trước và sau va chạm là $\vec{v}_{P_i}$ và $\vec{v}'_{P_i}$ $(i = 1, 2)$. Hình chiếu của chúng trên đường va chạm Pn là v_{P_in} và v'_{P_in} (hình 6.4a và 6.4b).



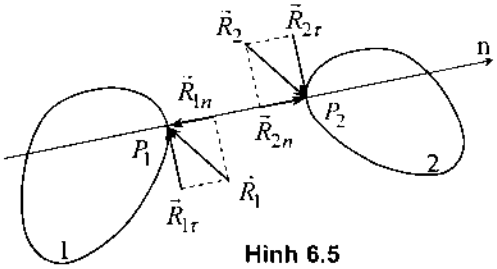
Hình 6.4

Định luật Newton về va chạm: Tỷ số giữa hình chiếu trên đường va chạm của các vận tốc tương đối của điểm va chạm sau và trước va chạm là một hằng số

$$e = -\frac{v'_{P_2n} - v'_{P_1n}}{v_{P_2n} - v_{P_1n}} \tag{1.2}$$

Hằng số e được gọi là hệ số va chạm Newton (hoặc hệ số khôi phục). Hệ số này phụ thuộc vào tính chất của vật liệu của các vật va chạm và thường được xác định bằng thực nghiệm. Như thế, định luật Newton về va chạm chính là giả thiết tuyến tính về quan hệ vận tốc tương đối trước và sau va chạm. Định luật va chạm Newton là một định luật động học, vì nó đưa ra quan hệ vận tốc tương đối tại điểm tiếp xúc sau và trước va chạm. Định luật này không cho ta mối quan hệ về lực.

Bằng cách tư duy khác, Poisson đã xây dựng mối quan hệ giữa xung lực va chạm trong pha biến dạng và trong pha khôi phục. Khi hai vật rắn va chạm, lực va chạm xuất hiện ở điểm tiếp xúc P của hai vật rắn và được ký hiệu bằng $\vec{R}_1$ và $\vec{R}_2$. Ta phân tích các lực $\vec{R}_1$ và $\vec{R}_2$ thành hai thành phần theo phương của đường va chạm và theo phương vuông góc với đường va chạm (hình 6.5).



Hình 6.5

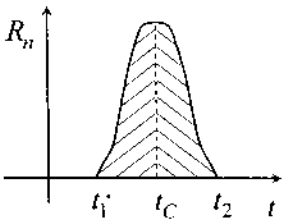
Thời gian va chạm được chia thành hai pha: pha biến dạng ($t_1 \le t \le t_C$) và pha khôi phục ($t_C \le t \le t_2$). Đồ thị thành phần phản lực va chạm pháp tuyến $R_n(t)$ của lực $\vec{R}_1$ (hoặc $\vec{R}_2$) trong thời gian va chạm có dạng như hình 6.6. Không giảm tổng quát ta ký hiệu $\vec{R}_1$ là $\vec{R}$.

Ký hiệu $\vec{S}_1$ là xung lực va chạm trong giai đoạn biến dạng, $\vec{S}_2$ là xung lực va chạm trong giai đoạn khôi phục

$$\vec{S}_1 = \int_{t_1}^{t_C} \vec{R}(t)dt, \qquad \vec{S}_2 = \int_{t_C}^{t_2} \vec{R}(t)dt \qquad (1.3)$$

Khi đó hình chiếu của chúng trên đường va chạm là

$$S_{1n} = \int_{t_1}^{t_C} R_n(t)dt, \quad S_{2n} = \int_{t_C}^{t_2} R_n(t)dt \qquad (1.4)$$



Hình 6.6

Định luật Poisson về va chạm: Tỷ số giữa độ lớn của xung lực va chạm trong pha khôi phục và pha biến dạng là một hằng số

$$\bar{e} = \frac{S_2}{S_1} \qquad (1.5)$$

Hằng số $\bar{e}$ này được gọi là hệ số va chạm Poisson (hoặc hệ số khôi phục) và thường được xác định bằng thực nghiệm.

Khi va chạm giữa hai vật rắn là va chạm nhẵn (không ma sát), từ (1.5) suy ra

$$\bar{e} = \frac{S_{2n}}{S_{1n}} = \frac{\int_{t_C}^{t_2} R_n(t)dt}{\int_{t_1}^{t_C} R_n(t)dt} \qquad (1.6)$$

Khi đó, người ta chứng minh được, định luật va chạm Newton và định luật va chạm Poisson là trùng nhau ($e \equiv \bar{e}$).

Sau này nếu không có chú ý gì đặc biệt, sử dụng ký hiệu e để chỉ hệ số va chạm Newton cũng như Poisson. Hệ số va chạm e luôn thoả mãn điều kiện $0 \le e \le 1$ và được xác định bằng thực nghiệm. Trong một số tài liệu kỹ thuật, người ta cho biết giá trị của hệ số này. Thí dụ:

Cặp vật liệu	Hệ số va chạm (e)
Gỗ – gỗ	0,5
Thép – thép	0,8
Ngà voi – ngà voi	0,89
Thủy tinh – thủy tinh	0,98

Như thế, khi $e = 0$: va chạm mềm,

khi $e = 1$: va chạm tuyệt đối đàn hồi,

khi $0 < e < 1$: va chạm đàn hồi.

Chú ý:

1) Trong khi giải các bài tập nếu đã sử dụng định luật Poisson về va chạm, thì không sử dụng định luật Newton về va chạm và ngược lại.

2) Trong các thí dụ sau sẽ thấy sự giống nhau của định luật Newton về va chạm và định luật Poisson về va chạm trong bài toán va chạm của hai vật rắn không ma sát.

2. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG VÀ ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG TRONG QUÁ TRÌNH VA CHẠM

Khi giải các bài toán cơ học có quá trình va chạm, ta hay sử dụng các định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng dạng hữu hạn.

2.1. Định lý biến thiên động lượng

Theo chương 2, định lý biến thiên động lượng trong khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ có dạng

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \sum \vec{S}_k^e \tag{2.1}$$

Trong đó $\vec{S}_k^e$ là xung lượng của ngoại lực $\vec{F}_k^e$

$$\vec{S}_k^e = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e dt \tag{2.2}$$

Trong quá trình va chạm, do bỏ qua các lực thông thường, nên biểu thức $\sum \vec{S}_k^e$ trong (2.1) là tổng của tất cả các xung lực va chạm ngoài trong khoảng thời gian va chạm Δt. Một dạng khác của định lý biến thiên động lượng là định lý chuyển động khối tâm. Trong quá trình va chạm định lý này có dạng

$$m\vec{v}_C(t_2) - m\vec{v}_C(t_1) = \sum \vec{S}_k^e \tag{2.3}$$

Trong đó m là khối lượng cả hệ, $\vec{v}_C(t_1)$ và $\vec{v}_C(t_2)$ lần lượt là vận tốc khối tâm trước và sau va chạm, t_1 là thời điểm bắt đầu va chạm, t_2 là thời điểm kết thúc va chạm.

2.2. Định lý biến thiên mômen động lượng

Theo chương 2, định lý biến thiên mômen động lượng trong khoảng thời gian $\Delta t = t_2 - t_1$ có dạng

$$\vec{l}_O(t_2) - \vec{l}_O(t_1) = \sum \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e\right) dt \tag{2.4}$$

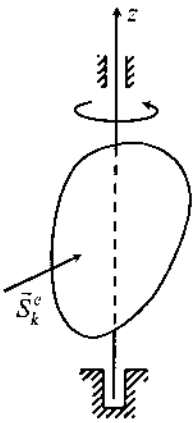
Trong đó O là một điểm cố định.

Do giả thiết bỏ qua dịch chuyển các điểm của vật thể trong thời gian va chạm, ta có

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e\right) dt = \vec{r}_k \times \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^e dt = \vec{r}_k \times \vec{S}_k^e = \vec{m}_O\left(\vec{S}_k^e\right) \tag{2.5}$$

Thế (2.5) vào (2.4) ta được định lý biến thiên mômen động lượng trong thời gian va chạm

$$\vec{l}_O(t_2) - \vec{l}_O(t_1) = \sum \vec{m}_O\left(\vec{S}_k^e\right) \tag{2.6}$$



Hình 6.7

Nếu O không phải là điểm cố định mà là khối tâm của hệ, thì công thức (2.6) vẫn đúng và có dạng

$$\vec{l}_C(t_2) - \vec{l}_C(t_1) = \sum \vec{m}_C\left(\vec{S}_k^e\right) \tag{2.7}$$

Đối với bài toán vật rắn quay quanh trục z cố định (hình 6.7), từ định lý (2.6) suy ra

$$J_z\bar{\omega}(t_2) - J_z\bar{\omega}(t_1) = \sum m_z\left(\vec{S}_k^e\right) \tag{2.8}$$

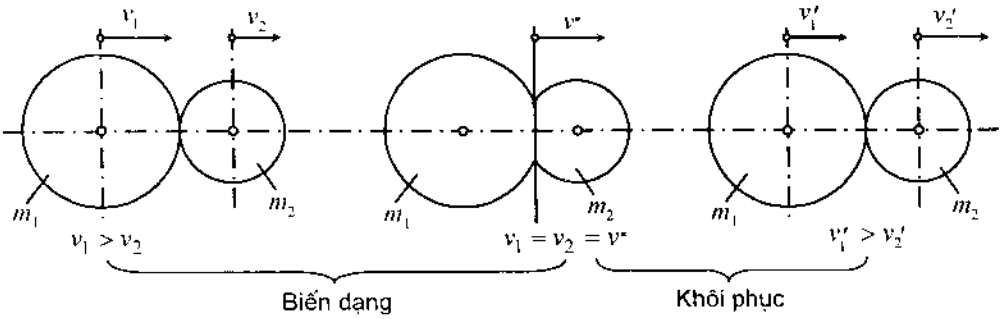
Trong đó, J_z là mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay z, $\bar{\omega}(t_1)$ và $\bar{\omega}(t_2)$ là vận tốc góc của vật rắn trước và sau va chạm.

3. VA CHẠM THẲNG XUYÊN TÂM CỦA HAI VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật rắn chuyển động tịnh tiến là bài toán đơn giản nhất của lý thuyết va chạm các vật rắn. Tuy nhiên, đây lại là bài toán có nhiều áp dụng kỹ thuật quan trọng. Trong mục này, ta tìm cách xác định sự thay đổi vận tốc và sự thay đổi năng lượng của hai vật rắn chuyển động tịnh tiến va chạm nhau.

3.1. Mô hình cơ học và quá trình tính toán

Xét hai quả cầu đồng chất khối lượng m_1 và m_2. Chúng chuyển động tịnh tiến theo đường thẳng xuyên tâm với các vận tốc $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ ($v_1 \geq v_2$) và va chạm nhau. Cho biết hệ số khôi phục là e. Tìm các vận tốc sau va chạm $\vec{v}_1'$ và $\vec{v}_2'$ và lượng mất động năng ΔT qua va chạm của hai quả cầu (hình 6.8a).



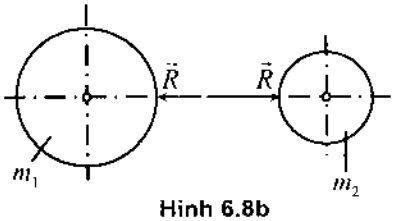
Hình 6.8a

a) Xác định vận tốc khối tâm của các vật rắn khi kết thúc quá trình va chạm

Áp dụng định lý biến thiên động lượng cho mỗi quả cầu trong pha biến dạng, ta có

$$m_2: \quad \Delta p_{bd} = \int_{t_1}^{t_C} R(t)dt = m_2 v^* - m_2 v_2 \qquad (1)$$

$$m_1: \quad -\Delta p_{bd} = -\int_{t_1}^{t_C} R(t)dt = m_1 v^* - m_1 v_1 \qquad (2)$$



Hình 6.8b

Trong đó v^* là vận tốc chung của hai quả cầu ở cuối pha biến dạng. Từ hai phương trình (1) và (2) suy ra

$$v^* = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.1)$$

$$\Delta p_{bd} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{3.2}$$

Áp dụng định lý biến thiên động lượng cho mỗi quả cầu trong pha khôi phục, ta có

$$m_2: \qquad \Delta p_{kp} = \int_{t_C}^{t_2} R(t)dt = m_2 v_2' - m_2 v^* \tag{3}$$

$$m_1: \qquad -\Delta p_{kp} = -\int_{t_C}^{t_2} R(t)dt = m_1 v_1' - m_1 v^* \tag{4}$$

Ở đây ta có hai phương trình (3) và (4) với ba ẩn v_1', v_2' và Δp_{kp}. Vì vậy, cần phải sử dụng thêm một phương trình bổ sung là định luật Poisson và va chạm

$$e = \frac{\Delta p_{kp}}{\Delta p_{bd}} \tag{3.3}$$

Từ (3.2) và (3.3) suy ra

$$\Delta p_{kp} = e\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{3.4}$$

Thế các biểu thức (3.1), (3.4) vào các phương trình (3) và (4) ta được

$$v_1' = v_1 - (1+e)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{3.5}$$

$$v_2' = v_2 + (1+e)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{3.6}$$

Do ta đã sử dụng định luật Poisson về va chạm nên từ các công thức (3.5) và (3.6) dễ dàng suy ra định luật Newton về va chạm

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \tag{3.7}$$

Như thế, nếu biết được các vận tốc của hai vật rắn trước và sau thời gian va chạm tính được hệ số khôi phục e theo (3.7).

b) Xác định lượng mất động năng qua va chạm

Biểu thức động năng của hệ gồm hai quả cầu trước và sau va chạm là

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \tag{5}$$

Từ đó suy ra lượng mất động năng qua va chạm

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(v_2^2 - v_2'^2\right) \tag{6}$$

Thế các biểu thức (3.5), (3.6) vào (6) ta được

$$\Delta T = \frac{1-e^2}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)^2 \tag{3.8}$$

Công thức (3.8) biểu diễn lượng mất động năng qua va chạm.

Đại lượng

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_1} \tag{3.9}$$

được gọi là hệ số hiệu dụng va chạm.

Xét trường hợp riêng khi $v_2 = 0$ (vật rắn thứ hai đứng yên). Khi đó biểu thức (3.8) có dạng

$$\Delta T = \frac{1-e^2}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_1^2, \quad T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

Từ đó suy ra

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_1} = (1-e^2)\frac{m_2}{m_1+m_2} \tag{3.10}$$

Trên cơ sở công thức (3.10) ta rút ra một số kết luận ứng dụng quan trọng như sau:

1) Khi m_1 (khối lượng vật va chạm) >> m_2 (khối lượng vật bị va chạm)

$$\frac{m_2}{m_1+m_2} << 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta T \text{ nhỏ}$$

Kết luận 1: Khi đóng cọc, đóng đinh,... khối lượng búa phải lớn hơn khối lượng của cọc, của đinh nhiều lần để giảm năng lượng bị tiêu hao vào biến dạng.

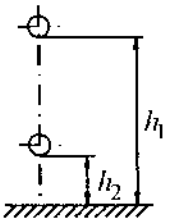
2) Khi m_1 (khối lượng vật va chạm) << m_2 (khối lượng vật bị va chạm)

$$\frac{m_2}{m_1+m_2} \approx 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta T \text{ lớn}$$

Kết luận 2: Khi rèn cắt, khối lượng đe phải lớn hơn khối lượng búa nhiều lần để tăng năng lượng tiêu hao sử dụng vào biến dạng.

3.2. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 6.1. Một quả cầu rơi từ độ cao h_1. Cho biết hệ số khôi phục giữa quả cầu và mặt nền là e. Xác định độ cao h_2 mà quả cầu nảy lên sau va chạm lần thứ nhất (hình 6.9).



Hình 6.9

Lời giải. Áp dụng định lý biến thiên động năng (hoặc định lý bảo toàn cơ năng) ta dễ dàng xác định được vận tốc quả cầu trước khi va chạm

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh_1} \qquad (1)$$

Vận tốc của mặt nền trước và sau va chạm là $v_2 = 0, v_2' = 0$.

Theo công thức (3.7) ta có

$$v_1' = -ev_1 = -e\sqrt{2gh_1} \qquad (2)$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng sau va chạm, ta xác định được độ cao h_2

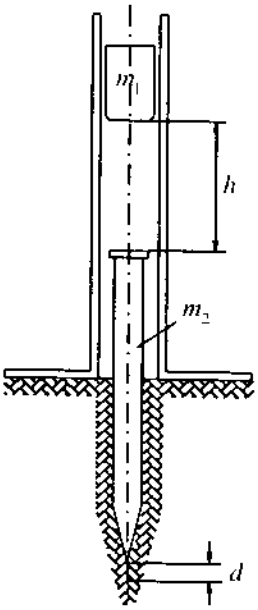
$$-\frac{1}{2}mv_1'^2 = -mgh_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{1}{2}\frac{v_1'^2}{g} = e^2h_1 \qquad (3)$$

Chú ý: Từ (3) suy ra công thức thực nghiệm xác định hệ số khôi phục

$$e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \qquad (4)$$

Thí dụ 6.2. Để gia cố nền móng, người ta dùng búa đóng cọc xuống nền đất. Búa có khối lượng m_1, rơi không có vận tốc ban đầu từ độ cao h so với đầu cọc. Cọc có khối lượng m_2. Cứ sau mỗi lần va đập, cọc đi xuống một đoạn là d. Tìm lực cản trung bình của đất tác dụng lên cọc. Giả thiết va chạm giữa búa và cọc là va chạm mềm (hình 6.10).

Lời giải. Mô hình khảo sát là va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật rắn chuyển động tịnh tiến. Quá trình va chạm bắt đầu khi búa đập vào đầu cọc và kết thúc ngay sau đó. Quá trình búa rơi từ độ cao h xuống đến đầu cọc và quá trình cọc di chuyển một đoạn d rồi dừng lại là quá trình không va chạm.



Hình 6.10

Áp dụng định lý biến thiên động năng xác định vận tốc của búa trước khi va chạm, ta được

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Vận tốc ban đầu của cọc là $v_2 = 0$. Khi kết thúc quá trình va chạm, vận tốc chung của búa và cọc là $v^* = v_2'$. Theo công thức (3.1) suy ra

$$v_2' = v^* = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Sau va chạm, cọc di chuyển được một đoạn là d. Khi đó trên cọc chịu tác dụng của lực cản môi trường $\vec{F}_c$ (giả thiết bỏ qua tác dụng của trọng lượng). Áp dụng định lý biến thiên động năng ta có

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2'^2 = -\int_0^d F_c ds = -F_c^{tb} d \qquad (3)$$

Trong đó F_c^{tb} là lực cản trung bình của đất. Từ (2) và (3) ta suy ra

$$F_c^{tb} = g\frac{m_1^2}{m_1+m_2}\frac{h}{d} \qquad (4)$$

Thí dụ 6.3. Đầu búa khối lượng $m_1 = 500kg$ được xem như một chất điểm rơi tự do từ độ cao h so với mặt đe (hình 6.11). Khối lượng của đe và phôi cần dập là $m_2 = 10.000kg$. Cho biết $h = 2m$, hệ số khôi phục $e = 0,65$. Hãy xác định:

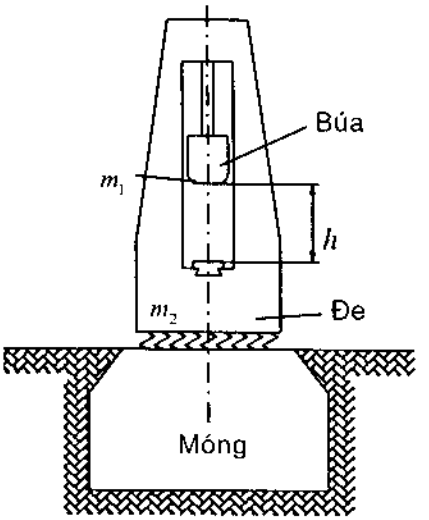
a) Vận tốc của búa ngay trước khi đập vào đe,

b) Công hữu ích làm biến dạng phôi,

c) Hệ số hiệu dụng va chạm khi rèn dập,

d) Vận tốc của đầu búa cuối giai đoạn biến dạng và vận tốc của búa và đe sau va chạm,

e) Độ cao nảy lên của búa.



Hình 6.11

Lời giải. Áp dụng định lý biến thiên động năng trong chuyển động rơi tự do của búa, ta có

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1gh \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

Thay số tính được

$$v_1 = \sqrt{2.9,81.2} = 6,26\,m/s$$

Công hữu ích làm biến dạng vật liệu rèn là lượng mất động năng của búa qua va chạm. Theo công thức (3.8) ta có (do $v_2 = 0$)

$$A_{hi} = \Delta T = \frac{1}{2}\left(1-e^2\right)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-0,65^2\right)\cdot\frac{0,5.10}{0,5+10}\cdot 10^3\cdot(6,26)^2 = 5,39kNm$$

Theo công thức (3.10) ta tính được hệ số hiệu dụng khi dập sắt là

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_1} = \left(1 - e^2\right)\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \left(1 - e^2\right)\frac{1}{1 + m_1/m_2}$$

$$= \left(1 - 0,65^2\right)\frac{1}{1 + 0,5/10} = 0,55 = 55\,\%$$

Vận tốc chung của búa và đe ở cuối pha biến dạng là (do $v_2 = 0$)

$$v^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0,5}{10 + 0,5} \cdot 6,25 = 0,298\, m/s$$

Vận tốc của búa và đe sau va chạm là

$$v_1' = v_1 - (1 + e)\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -3,65\, m/s\,,$$

$$v_2' = v_2 + (1 + e)\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 0,492\, m/s$$

Dấu trừ trong bài toán v_1' chứng tỏ búa nảy lên trên. Áp dụng định lý biến thiên động năng trong quá trình búa nảy lên, ta có

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = m_1 g h_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{1}{2g} v_1'^2 = 0,653 m\,.$$

4. VA CHẠM XIÊN CỦA HAI VẬT RẮN PHẲNG VÀ VA CHẠM CỦA VẬT RẮN QUAY

Khi các vận tốc $\vec{v}_{P_1}$ và $\vec{v}_{P_2}$ tại điểm tiếp xúc của hai vật rắn va chạm không trùng với hướng của đường va chạm thì va chạm được gọi là va chạm xiên. Trong đoạn này trình bày một số bài toán va chạm xiên của hai vật rắn phẳng có cùng một mặt phẳng đối xứng động lực, và va chạm của vật rắn quay quanh một trục cố định.

4.1. Va chạm xiên không ma sát của hai vật rắn phẳng

Trên hình 6.12a là mô hình cơ học bài toán va chạm xiên của hai vật rắn phẳng. Hình 6.12b là bài toán va chạm nhẵn (không ma sát) còn hình 6.12c là bài toán va chạm không nhẵn (có ma sát). Ở đây ta giới hạn xét bài toán va chạm nhẵn. Ký hiệu vận tốc khối tâm các vật rắn trước va chạm là $\vec{v}_1, \vec{v}_2$, sau va chạm là $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$, vận tốc góc của các vật rắn trước va chạm là ω_1, ω_2, sau va chạm là ω_1', ω_2'.

Áp dụng định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng trong thời gian va chạm (các công thức (2.3) và (2.7)) đối với vật rắn thứ 1 ta có (hình 6.12b)

$$\rightarrow : \quad m_1\left(v'_{1x} - v_{1x}\right) = -S_x \qquad (1)$$

$$\uparrow : \quad m_1\left(v'_{1y} - v_{1y}\right) = 0 \qquad (2)$$

$$C_1 \circlearrowleft : \quad J_1(\bar{\omega}'_1 - \bar{\omega}_1) = a_1 S_x \qquad (3)$$

và đối với vật rắn thứ 2 (hình 6.12b)

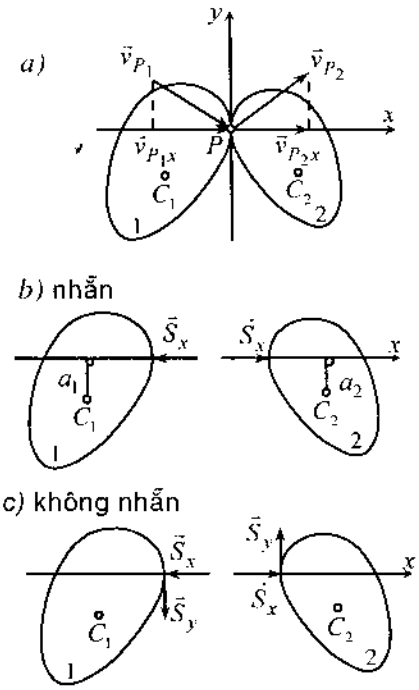
$$\rightarrow : \quad m_2\left(v'_{2x} - v_{2x}\right) = S_x \qquad (4)$$

$$\uparrow : \quad m_2\left(v'_{2y} - v_{2y}\right) = 0 \qquad (5)$$

$$C_2 \circlearrowleft : \quad J_2(\bar{\omega}'_2 - \bar{\omega}_2) = -a_2 S_x \qquad (6)$$

Trong đó J_1, J_2 lần lượt là mômen quán tính của vật rắn thứ nhất và thứ hai đối với khối tâm của chúng. Ngoài ra, do bỏ qua ma sát khi va chạm, định luật va chạm Newton có dạng

$$e = -\frac{v'_{P_2x} - v'_{P_1x}}{v_{P_2x} - v_{P_1x}} \qquad (7)$$



Hình 6.12

Từ động học vật rắn chuyển động song phẳng ta có các hệ thức

$$v_{P_1x} = v_{1x} - a_1\bar{\omega}_1, \qquad v_{P_2x} = v_{2x} - a_2\bar{\omega}_2 \qquad (8)$$

$$v'_{P_1x} = v'_{1x} - a_1\bar{\omega}'_1, \qquad v'_{P_2x} = v'_{2x} - a_2\bar{\omega}'_2 \qquad (9)$$

Như thế, khi cho biết hệ số khôi phục e, ta có một hệ 7 phương trình để xác định 7 ẩn là: S_x, v'_{1x}, v'_{2x}, v'_{1y}, v'_{2y}, $\bar{\omega}'_1$ và $\bar{\omega}'_2$. Từ các phương trình (1) đến (9) ở trên, giải ra ta được

$$S_x = (1+e)\frac{v_{1x} - v_{2x} - a_1\bar{\omega}_1 + a_2\bar{\omega}_2}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \dfrac{a_1^2}{J_1} + \dfrac{a_2^2}{J_2}} \qquad (3.1)$$

Sau đó, từ các phương trình (1) đến (6) dễ dàng tính được

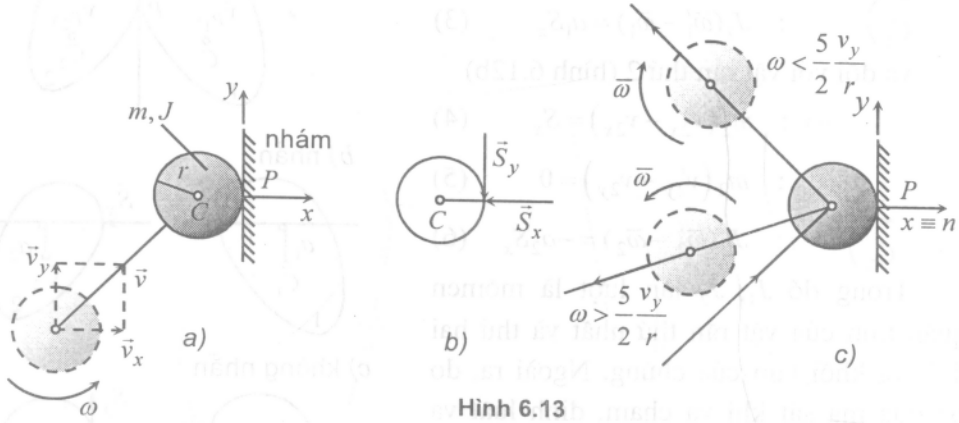
$$v'_{1x} = v_{1x} - \frac{S_x}{m_1}, \quad v'_{1y} = v_{1y}, \quad \bar{\omega}'_1 = \bar{\omega}_1 + \frac{a_1 S_x}{J_1} \qquad (3.2)$$

$$v'_{2x} = v_{2x} + \frac{S_x}{m_2}, \quad v'_{2y} = v_{2y}, \quad \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_2 - \frac{a_2 S_x}{J_2} \qquad (3.3)$$

4.2. Va chạm của quả cầu vào bức tường nhám

Mô hình quả cầu đồng chất bán kính r va chạm vào bức tường nhám thẳng

đứng cho trên hình 6.13. Ký hiệu vận tốc khối tâm quả cầu (sử dụng mô hình phẳng) và vận tốc góc của nó trước va chạm là $\vec{v}$ và $\vec{\omega}$, sau va chạm là $\vec{v}'$ và $\vec{\omega}'$. Ta cần xác định $\vec{v}'$ và $\vec{\omega}'$.



Hình 6.13

Áp dụng định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng trong quá trình va chạm đối với hình tròn lớn trong mặt phẳng thẳng đứng của quả cầu ta có

$$\rightarrow : \quad m\left(v'_x - v_x\right) = -S_x \tag{1}$$

$$\uparrow : \quad m\left(v'_y - v_y\right) = -S_y \tag{2}$$

$$C \circlearrowleft : \quad J(\vec{\omega}' - \vec{\omega}) = -rS_y \tag{3}$$

Do $\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{v}_{PC}$ ta suy ra $v_{Px} = v_x$, $v'_{Px} = v'_x$ ($v_{P2} = v'_{P2} = 0$). Từ đó ta có

$$e = -\frac{v'_{Px}}{v_{Px}} = -\frac{v'_x}{v_x} \tag{4}$$

Sau khi va chạm vào tường, điều kiện để đĩa lăn không trượt có dạng

$$v'_{Py} = v'_y + r\vec{\omega}' = 0 \tag{5}$$

Từ các phương trình (1) đến (5) và chú ý $J = \frac{2}{5}mr^2$, suy ra công thức xác định vận tốc khối tâm và vận tốc góc của quả cầu sau va chạm

$$v'_x = -ev_x \tag{6}$$

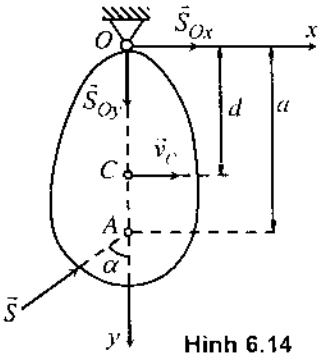
$$v'_y = \frac{v_y - r\vec{\omega}\dfrac{J}{mr^2}}{1 + \dfrac{J}{mr^2}} = \frac{5}{7}v_y - \frac{2}{7}r\vec{\omega} \tag{7}$$

$$\vec{\omega}' = -\frac{v'_y}{r} = \frac{2}{7}\vec{\omega} - \frac{5}{7r}v_y \tag{8}$$

Chú ý. Từ (7) suy ra: Khi $\bar{\omega} > \frac{5}{2}\frac{v_y}{r}$ thì $v'_y < 0$. Do đó khi $\bar{\omega} < \frac{5}{2}\frac{v_y}{r}$ thì $\bar{\omega}'$ có dấu ngược với dấu của $\bar{\omega}$ (xem hình 6.13c).

4.3. Va chạm của chất điểm vào vật rắn quay quanh một trục cố định, tâm va chạm

Một vật rắn phẳng có thể quay quanh trục z đi qua O như hình 6.14. Va chạm của một chất điểm vào vật rắn được đặc trưng bởi tác dụng của xung lực $\vec{S}$ tại điểm tiếp xúc. Tìm xung phản lực động tại trục quay O. Giả thiết lúc chưa va chạm vật rắn đứng yên $(\omega = 0)$.



Hình 6.14

Áp dụng các định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng trong thời gian va chạm, ta có

$$\rightarrow \quad : \quad mv'_{Cx} = S\sin\alpha + S_{Ox} \qquad (1)$$

$$\uparrow \quad : \quad mv'_{Cy} = -S\cos\alpha + S_{Oy} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft O \quad : \quad J_O\bar{\omega}' = aS\sin\alpha \qquad (3)$$

Từ phương trình (2) ta suy ra $S_{Oy} = S\cos\alpha$. Để cho $S_{Oy} = 0$ thì $\alpha = \pi/2$. Như thế, xung lực $\vec{S}$ phải vuông góc với trục Oy (đi từ O qua khối tâm C). Khi $\alpha = \pi/2$ thì $\sin\alpha = 1$. Từ (3) suy ra

$$\bar{\omega}' = \frac{aS}{J_0} \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) ta được

$$S + S_{Ox} = mv'_{Cx} = md\bar{\omega}' = \frac{mad}{J_0}S \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra điều kiện để cho $S_{Ox} = 0$ là

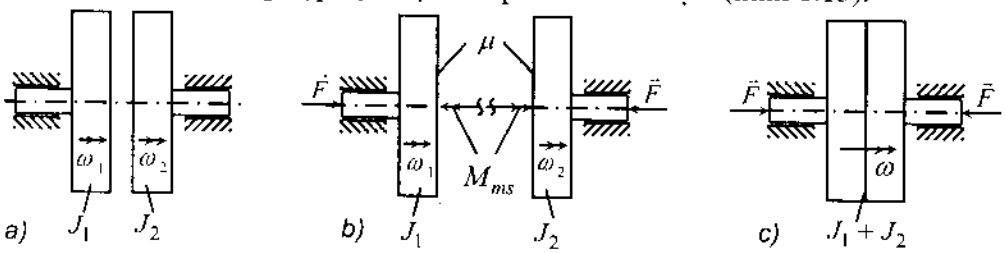
$$\frac{mad}{J_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{J_0}{md} \qquad (6)$$

Kết luận. Điều kiện để không xuất hiện xung phản lực va đập ở trục quay $(S_{Ox} = S_{Oy} = 0)$ khi vật rắn chịu tác dụng của xung lực va chạm $\vec{S}$ là: xung lực va chạm $\vec{S}$ phải vuông góc với đường OC và điểm A cách O một đoạn $a = OA = J_0/md$.

Định nghĩa: Điểm A trên đường OC mà $OA = a = J_0/md$ được gọi là tâm va chạm của vật rắn quay.

4.4. Va chạm của hai vật rắn quay quanh một trục cố định

Quá trình nối trục bằng ma sát của hai rôto quay quanh một trục cố định có thể xem là một trường hợp đặc biệt của quá trình va chạm (hình 6.15).



Hình 6.15

a) Trước va chạm; b) Trong quá trình nối trục; c) Sau va chạm

Cho biết vận tốc góc trước khi nối trục của rôto 1 là ω_1, của rôto 2 là ω_2, mômen quán tính của rôto đối với trục quay tương ứng là J_1 và J_2. Lực nối trục $\vec{F}$ tác dụng vào hai rôto dọc theo đường trục như hình vẽ. Hãy xác định vận tốc góc chung sau khi hai rôto nối lại với nhau và sự hao hụt năng lượng khi nối trục.

Quá trình nối trục có thể xem như bài toán va chạm mềm, bởi vì khi kết thúc quá trình nối trục hai rôto quay với cùng một vận tốc góc chung ω. Áp dụng định lý bảo toàn mômen động lượng đối với trục quay, ta có

$$l_1(t_1) + l_2(t_1) = l(t_2) \qquad (1)$$

Trong đó $l_1(t_1) = J_1\omega_1$, $l_2(t_1) = J_2\omega_2$, $l(t_2) = (J_1 + J_2)\omega$. Thế các kết quả này vào (1) suy ra

$$\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2} \qquad (2)$$

Áp dụng công thức tính động năng vật rắn quay quanh một trục cố định ta có

$$T(t_1) = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 \qquad (3)$$

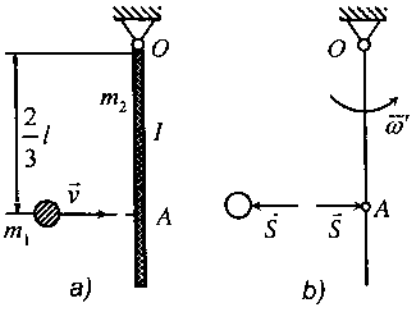
$$T(t_2) = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 \qquad (4)$$

Lượng hao hụt động năng

$$\Delta T = T(t_1) - T(t_2) = \frac{1}{2}\left[J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 - \frac{(J_1\omega_1 + J_1\omega_1)^2}{J_1 + J_2}\right] \qquad (5)$$

4.5. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 6.4. Một chất điểm khối lượng m_1 chuyển động thẳng với vận tốc $\vec{v}$ va chạm vào một thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi dài l, một đầu gắn bản lề như hình 6.16. Khối lượng của thanh là m_2. Cho biết lúc đầu thanh đứng yên. Hãy xác định vận tốc góc của thanh sau va chạm. Cho biết $m_2 = 2m_1$



Hình 6.16

Lời giải. Theo định nghĩa tâm va chạm ta có

$$a = OA = J_0/md = \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\Big/\frac{1}{2}ml = \frac{2}{3}l$$

Vậy xung lượng $\vec{S}$ tác dụng vào tâm va chạm. Do đó $\vec{S}_O = 0$. Áp dụng định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng suy ra

$\rightarrow$: $$m_1(v' - v) = -S \qquad (1)$$

$\circlearrowleft O$: $$J_O\omega' = \frac{2}{3}lS \qquad (2)$$

Do vận tốc điểm A của thanh sau va chạm là $v'_{A2} = 2l\omega'/3$, nên định luật Newton về va chạm có dạng

$$e = -\frac{v'_A - v'}{0 - v} = -\frac{\frac{2}{3}l\omega' - v'}{v} \qquad (3)$$

Từ các phương trình (1), (2), (3) và chú ý đến $J_0 = \frac{1}{3}m_2l^2$, tính được ba ẩn S, v' và ω'.

$$v' = \frac{1}{5}v(2 - 3e), \quad \omega' = \frac{3}{5}\frac{v}{l}(1 + e) \qquad (4)$$

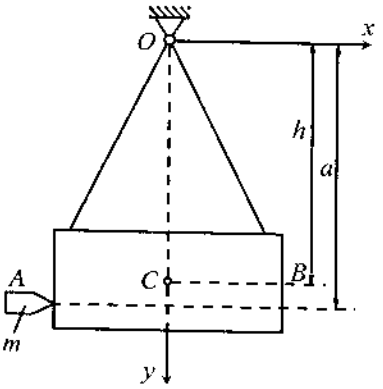
Khi $e = 0$ (va chạm mềm) từ (4) ta có $v' = \frac{2}{5}v$, $\omega' = \frac{3}{5}\frac{v}{l}$

Khi $e = 1$ (va chạm tuyệt đối đàn hồi), từ (4) suy ra

$$v' = -\frac{1}{5}v, \qquad \omega' = \frac{6}{5}\frac{v}{l}$$

Thí dụ 6.5. Con lắc thử đạn gồm có khối trụ AB được treo vào trục O (hình 6.17). Khối trụ AB chứa đầy cát và có khối lượng M. Một viên đạn có khối lượng m

được bắn vào khối trụ và xuyên vào cát, làm cho khối trụ AB quay quanh O một góc α. Khoảng cách từ đường va chạm đến trục quay O là a. Giả thiết xung phản lực va chạm tại O bằng không ($ah = \rho^2$). Hãy xác định vận tốc viên đạn theo góc lệch α của con lắc.



Hình 6.17

Lời giải. Hệ khảo sát gồm viên đạn và con lắc AB. Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng của hệ trong thời gian va chạm, ta có

$$l_O(t_2) = l_O(t_1) \tag{1}$$

Trong đó $l_O(t_1) = mva$, $l_O(t_2) = (M\rho^2 + ma^2)\omega'$ (2)

Thế (2) vào (1) ta được

$$mva = (M\rho^2 + ma^2)\omega' \tag{3}$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng của hệ sau thời gian va chạm ta được

$$\frac{1}{2}(M\rho^2 + ma^2)\omega'^2 = g(Mh + ma)(1 - \cos\alpha) \tag{4}$$

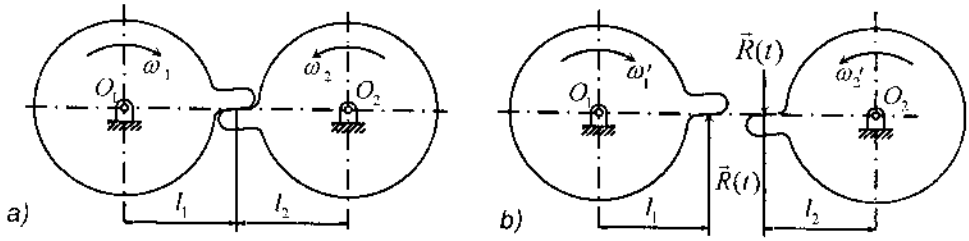
Chú ý đến công thức lượng giác $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, từ (3) và (4) suy ra

$$v = \frac{M\rho^2 + ma^2}{ma}\omega' = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{g(Mh + ma)(M\rho^2 + ma^2)}}{ma} \tag{5}$$

Do giả thiết $ah = \rho^2$, từ (5) ta suy ra công thức xác định vận tốc viên đạn dạng khá đơn giản

$$v = 2\left(1 + \frac{Mh}{ma}\right)\sqrt{ga}\sin\frac{\alpha}{2} \tag{6}$$

Thí dụ 6.6. Hai vật rắn quay quanh hai trục song song, va chạm vào nhau (hình 6.18a). Cho biết mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay của nó lần lượt là J_1 và J_2. Trước khi va chạm vận tốc góc của chúng là ω_1 và ω_2. Xác định vận tốc góc của các vật rắn sau va chạm. Cho biết hệ số khôi phục là e.



Hình 6.18

Lời giải. Hệ khảo sát là hai vật rắn quay quanh hai trục song song. Ký hiệu vận tốc góc của các bánh răng sau va chạm là ω_1' và ω_2'.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng trong thời gian va chạm ta có

$$J_1(\omega_1' - \omega_1) = -l_1 \int_{t_1}^{t_2} R(t)dt = -l_1 S \tag{1}$$

$$J_2(\omega_2' - \omega_2) = l_2 \int_{t_1}^{t_2} R(t)dt = l_2 S \tag{2}$$

Từ (1) và (2) khử S ta được

$$\frac{J_1}{l_1^2}\omega_1 l_1 + \frac{J_2}{l_2^2}\omega_2 l_2 = \frac{J_1}{l_1^2}\omega_1' l_1 + \frac{J_2}{l_2^2}\omega_2' l_2 \tag{3}$$

Chú ý rằng $v_{1n} = \omega_1 l_1$, $v_{2n} = \omega_2 l_2$, $v_{1n}' = \omega_1' l_1$, $v_{2n}' = \omega_2' l_2$. Định luật Newton về va chạm có dạng

$$e = -\frac{v_{2n}' - v_{1n}'}{v_{2n} - v_{1n}} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\omega_1' = \omega_1 - \frac{(\omega_1 - \omega_2 . l_2 / l_1)(1+e)\left(J_2 / l_2^2\right)}{J_1 / l_1^2 + J_2 / l_2^2} \tag{5}$$

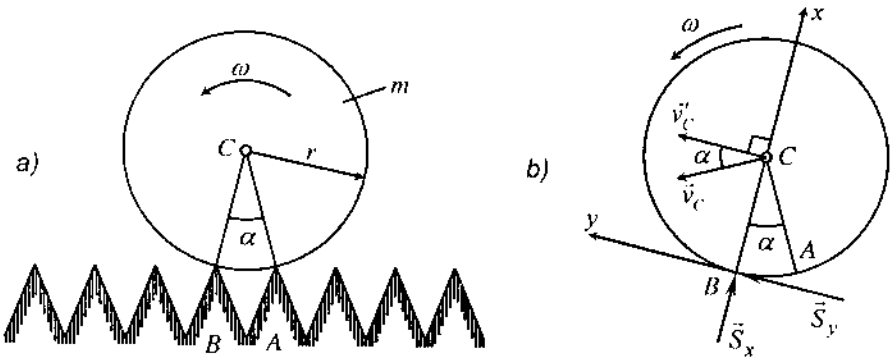
$$\omega_2' = \omega_2 - \frac{(\omega_1 . l_1 / l_2 - \omega_2)(1+e)\left(J_1 / l_1^2\right)}{J_1 / l_1^2 + J_2 / l_2^2} \tag{6}$$

Thí dụ 6.7. Một con lăn đồng chất khối lượng m, bán kính r chuyển động lăn không trượt trên một mặt phẳng răng cưa như hình 6.19a. Khi con lăn qua đỉnh nhọn A sẽ va chạm vào đỉnh nhọn B tiếp theo. Giả thiết va chạm là va chạm mềm ($e = 0$). Vận tốc góc của con lăn trước khi va chạm là ω. Cho biết α, r, m và ω.

a) Tìm vận tốc góc con lăn ω' ngay sau khi va chạm.

b) Xác định sự hao tán năng lượng sau mỗi lần va chạm.

c) Xác định công suất trung bình của động cơ, sao cho con lăn có thể lăn trên mặt phẳng răng cưa với vận tốc góc trung bình là ω.



Hình 6.19

Lời giải. Hệ khảo sát là con lăn hình đĩa tròn. Trước khi va chạm con lăn quay quanh điểm A cố định. Vận tốc khối tâm C là

$$v_C = \omega r \tag{1}$$

Sau khi va chạm vào điểm B, con lăn lại quay quanh điểm cố định B. Ta có

$$v'_C = \omega' r \tag{2}$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng trong thời gian con lăn va chạm vào điểm B

$$l_B(t_2) - l_B(t_1) = \sum \overline{m}_B\left(\vec{S}_k^e\right) = 0 \tag{3}$$

Chú ý đến hình 6.19b dễ dàng tính được

$$l_B(t_2) = J_C\omega' + mv'_C r \tag{4}$$

$$l_B(t_1) = J_C\omega + m(v_C\cos\alpha)r \tag{5}$$

Thế (4), (5) vào (3) và chú ý đến các mối quan hệ động học (1), (2) ta được

$$\omega' = \frac{J_C + mr^2\cos\alpha}{J_C + mr^2}\omega \tag{6}$$

Do $J_C = \frac{1}{2}mr^2$, nên biểu thức (6) có dạng

$$\omega' = \frac{1 + 2\cos\alpha}{3}\omega \tag{7}$$

Biểu thức hao tán năng lượng qua một lần va chạm là

$$\Delta T = T(t_1) - T(t_2) = \frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}J_C\omega'^2 - \frac{1}{2}mv_C'^2 \qquad (8)$$

Thế các biểu thức (1), (2) và (7) vào (8) ta được sự thay đổi năng lượng thực hiện sau mỗi lần va chạm

$$\Delta T = \frac{3}{4}mr^2\omega^2\left[1 - \frac{(1+2\cos\alpha)^2}{9}\right] \qquad (9)$$

Giữa hai va chạm, con lăn chuyển động quay trong khoảng thời gian $\Delta t = \frac{\alpha}{r}$ và quay được một góc α. Do đó công suất trung bình của động cơ là

$$N_{tb} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{4}mr^2\frac{\omega^3}{\alpha}\left[1 - \frac{(1+2\cos\alpha)^2}{9}\right] \qquad (10)$$

Thí dụ 6.8. Va chạm của một đĩa tròn vào một khung hình chữ thập.

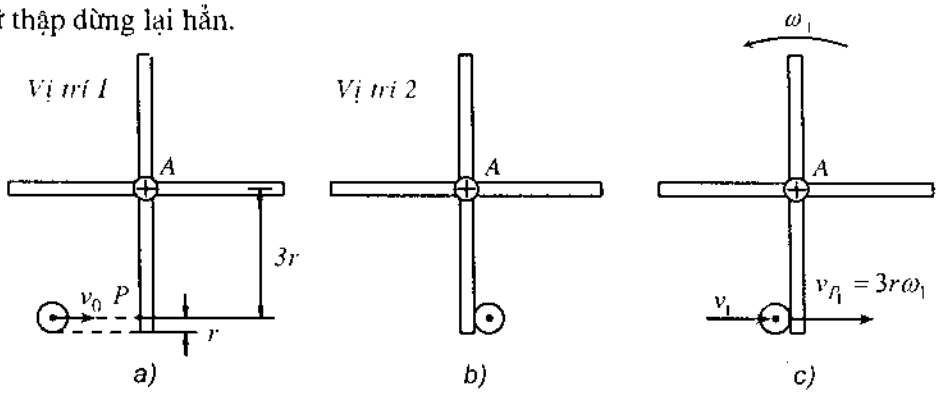
Một khung hình chữ thập đặt trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn và có thể quay quanh trục A (hình 6.20). Mỗi thanh của khung chữ thập có khối lượng m_1 và chiều dài $4r$. Một đĩa tròn bán kính r, khối lượng m chuyển động tịnh tiến thẳng đều với vận tốc $\vec{v}_0$ đến va chạm vào điểm P của khung ở vị trí 1 như hình vẽ. Cho biết hệ số khôi phục là e và va chạm không ma sát. Hãy xác định:

a) Vận tốc góc ω_1 của khung chữ thập và vận tốc khối tâm đĩa $\vec{v}_1$ sau khi va chạm,

b) Tỷ số m_1/m sao cho khi khung quay một góc 90° đến vị trí 2 như hình vẽ thì nó lại va chạm vào đĩa,

c) Vận tốc góc ω_2 của khung chữ thập và vận tốc khối tâm đĩa $\vec{v}_2$ sau lần va chạm thứ hai,

d) Độ lớn của hệ số khôi phục e sao cho sau lần va chạm thứ hai thì khung chữ thập dừng lại hẳn.



Hình 6.20

Lời giải.

a) Hệ khảo sát là khung chữ nhật và đĩa tròn. Dễ dàng nhận thấy điểm P là tâm va chạm. Theo định lý biến thiên mômen động lượng ta có

$$\vec{l}_A(t_2) - \vec{l}_A(t_1) = \sum \vec{m}_A(\vec{S}_k^e) = 0 \quad \Rightarrow \quad l_A(t_2) = l_A(t_1)$$

Trong đó $l_A(t_1) = 3rmv_0$, $l_A(t_2) = 3rmv_1 + J_A\omega_1$. Thế các biểu thức này vào phương trình trên ta được

$$3rmv_0 = 3rmv_1 + J_A\omega_1 \tag{1}$$

Trong đó t_1 là thời điểm trước va chạm, t_2 là thời điểm sau va chạm lần thứ nhất. Từ định luật Newton về va chạm ta có

$$e = -\frac{v_1 - v'_P}{v_0 - v_P} \tag{2}$$

Trong đó $v_P = 0$, $v'_P = 3r\omega_1$. Từ (2) suy ra

$$v_1 = 3r\omega_1 - ev_0 \tag{3}$$

Từ hai phương trình (1) và (3) ta giải ra được ω_1 và v_1

$$\omega_1 = \frac{3rm(1+e)}{9r^2m + J_A}v_0, \qquad v_1 = \frac{9r^2m - eJ_A}{9r^2m + J_A}v_0 \tag{4}$$

b) Để cho thanh chữ thập quay quanh A ngược chiều kim đồng hồ một góc 90^0 đến vị trí 2 lại va đập vào đĩa tròn, thì trong khoảng thời gian đó khối tâm đĩa phải di chuyển được một đoạn $2r$

$$\tau = \frac{(\pi/2)}{\omega_1} = \frac{2r}{v_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{\omega_1} = \frac{4r}{\pi} \tag{5}$$

Thế các biểu thức (4) vào (5) ta được

$$\frac{4r}{\pi} = \frac{9r^2m - eJ_A}{3rm(1+e)} \tag{6}$$

Từ (6) suy ra

$$J_A = \frac{3r^2m}{e\pi}\left[3\pi - 4(1+e)\right] \tag{7}$$

Khung chữ thập gồm 4 thanh, mỗi thanh có khối lượng m_1 và chiều dài $4r$. Do đó biểu thức mômen quán tính khối J_A có dạng

$$J_A = 4m_1\frac{(4r)^2}{3} = \frac{64}{3}m_1r^2 \tag{8}$$

Từ (7) và (8) ta tìm được tỷ số

$$\frac{m_1}{m} = \frac{9}{64e\pi}\left[3\pi - 4(1+e)\right] \qquad (9)$$

c) Từ định lý bảo toàn mômen động lượng của cả hệ trong thời gian va chạm lần thứ hai

$$l_A(t_3) = l_A(t_4)$$

suy ra

$$J_A\omega_1 + 3rmv_1 = J_A\omega_2 + 3rmv_2 \qquad (10)$$

Theo định luật Newton về va chạm, ta có

$$e = -\frac{v_2 - v'_{P1}}{v_1 - v_{P1}} \qquad (11)$$

với $v_{P1} = 3r\omega_1$, $v'_{P1} = 3r\omega_2$. Từ (10) suy ra

$$v_2 = 3r\omega_2 - e(v_1 - 3r\omega_1) \qquad (12)$$

Thế (12) vào (10) rồi giải ra ω_2

$$\omega_2 = 3rm\frac{1-e^2}{9r^2m + J_A}v_0 \qquad (13)$$

Thế (13) vào (12) ta được

$$v_2 = \frac{9r^2m + e^2J_A}{9r^2m + J_A}v_0 \qquad (14)$$

d) Điều kiện để khung chữ thập đứng yên sau lần va chạm thứ hai ($\omega_2 = 0$) được suy ra từ công thức (13)

$$\omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 1 \qquad (15)$$

Từ (11) ta có $v_2 = v_0$. (16)

Chương 7

ĐỘNG LỰC HỌC CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

Chuyển động của chất điểm và vật rắn đối với hệ quy chiếu động được gọi là chuyển động tương đối. Có một số bài toán cơ học kỹ thuật khi tính toán trong hệ quy chiếu động đơn giản hơn khi tính toán trong hệ quy chiếu cố định.

Trên cơ sở đưa ra khái niệm lực quán tính theo và lực quán tính Coriolis của chất điểm, trong chương này trình bày việc thiết lập phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ quy chiếu động. Sau đó, giới thiệu việc áp dụng các định lý biến thiên động lượng, mômen động lượng, động năng và phương trình Lagrange loại 2 đối với hệ các chất điểm và các vật rắn trong hệ quy chiếu động.

1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI CỦA CHẤT ĐIỂM

1.1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm

Xét chuyển động của điểm P đối với hệ quy chiếu động R_1. Hệ quy chiếu R_1 lại chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định R_0. Chất điểm P chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.

Theo định luật Newton II, quy luật chuyển động của chất điểm P ở trong hệ quy chiếu cố định R_0 có dạng

$$m\vec{a}_a = \vec{F} \qquad (1.1)$$

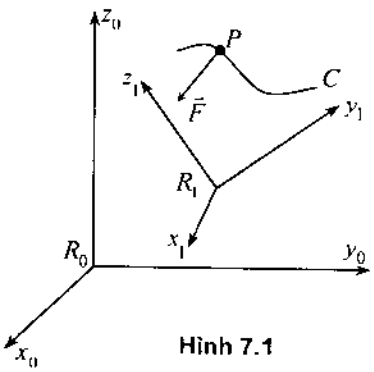
Mặt khác, theo định lý cộng gia tốc trong chương 3, phần động học vật rắn, ta có

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \qquad (1.2)$$

với $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ là gia tốc Coriolis.

Thế biểu thức (1.2) vào phương trình (1.1) ta được

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \vec{F}$$



Hình 7.1

Từ đó suy ra

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + (-m\vec{a}_e) + (-m\vec{a}_c) \tag{1.3}$$

Định nghĩa: Biểu thức $\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e$ được gọi là lực quán tính theo của chất điểm, còn biểu thức $\vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_c$ được gọi là lực quán tính Coriolis của chất điểm.

Với việc đưa vào các khái niệm lực quán tính theo và lực quán tính Coriolis của chất điểm, phương trình (1.3) có dạng

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt} \tag{1.4}$$

Phương trình (1.4) là phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm (hay phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ quy chiếu không quán tính).

So sánh hai phương trình (1.1) và (1.4) rút ra nhận xét sau: Khi khảo sát chuyển động tương đối của chất điểm, ta đặt thêm vào chất điểm lực quán tính theo và lực quán tính Coriolis của nó.

Xét trường hợp đặc biệt, khi hệ quy chiếu động R_1 chuyển động tịnh tiến thẳng đều đối với hệ quy chiếu cố định R_0, khi đó ta có $\vec{a}_e = 0$ và $\vec{\omega}_e = 0$. Từ đó suy ra

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e = 0$$

$$\vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 0$$

Trong trường hợp này, phương trình (1.4) có dạng

$$m\vec{a}_r = \vec{F} \tag{1.5}$$

Từ đó ta có kết luận: Khi hệ quy chiếu động R_1 chuyển động tịnh tiến thẳng đều đối với hệ quy chiếu cố định R_0, thì mọi quy luật cơ học xảy ra trong hệ quy chiếu R_1 cũng giống như trong hệ quy chiếu R_0. Kết luận này là nội dung của Nguyên lý tương đối Galilei.

1.2. Điều kiện cân bằng tương đối của chất điểm

Theo định nghĩa, chất điểm P đứng yên trong hệ quy chiếu động R_1 nếu như $\vec{a}_r = 0$ và $\vec{v}_r = 0$. Từ đó suy ra $\vec{F}_c^{qt} = -2m\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 0$. Phương trình (1.4) bây giờ có dạng

$$\vec{F} + \vec{F}_e^{qt} = 0 \tag{1.6}$$

Phương trình (1.6) là điều kiện cân bằng tương đối của chất điểm.

1.3. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 7.1. Một cái thang máy chuyển động thẳng đứng lên xuống với gia

tốc $\vec{a}$. Trong thang treo một vật nặng P vào lò xo đàn hồi (hình 7.2). Sức căng của dây treo cho biết trọng lượng của lồng. Hãy xác định lực đàn hồi của lò xo.

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của vật nặng trong hệ quy chiếu động R_1 có dạng

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \left(-\frac{P}{g}\vec{a}_e\right) + \left(-\frac{P}{g}\vec{a}_c\right) + \vec{P}^* \qquad (1)$$

Trong đó $\vec{P}^*$ là lực đàn hồi của lò xo. Trong thí dụ này ta có $\vec{a}_c = 0, \vec{a}_r = 0, \vec{a}_e = \vec{a}$. Chiếu phương trình (1) lên phương thẳng đứng ta được

$$0 = -P - \frac{P}{g}a_{ey} + P^*$$

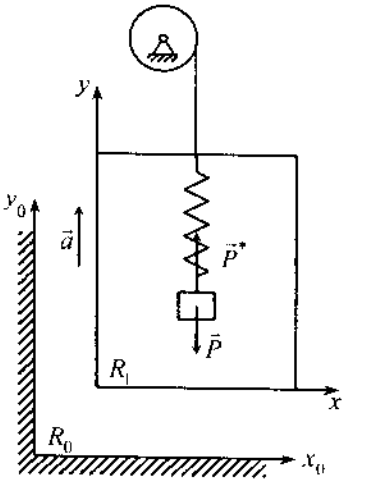
hay
$$P^* = P + \frac{P}{g}a_{ey} \qquad (2)$$

Khi lồng kéo lên $a_{ey} = a$, từ (2) suy ra

$$P^* = P + \frac{P}{g}a \qquad (3)$$

Khi lồng hạ xuống $a_{ey} = -a$, ta có

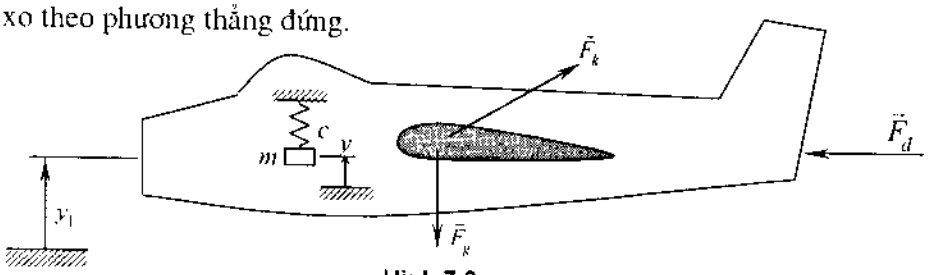
$$P^* = P - \frac{P}{g}a \qquad (4)$$



Hình 7.2

Đặc biệt khi lồng hạ xuống với gia tốc $a = g$, từ (4) ta suy ra $P^* = 0$. Thí dụ trên đưa đến nguyên lý tương đối về khối lượng và trọng lượng của Einstein.

Thí dụ 7.2. Một hệ khối lượng – lò xo được treo vào máy bay (hình 7.3). Cho biết khối lượng của hệ là m, độ cứng lò xo là c. Giả thiết máy bay đang bay ổn định theo phương nằm ngang (không có chuyển động quay). Khối lượng máy bay là m_e (bao gồm khối lượng của máy bay, hành khách, hành lý). Các lực tác dụng lên máy bay gồm có lực đẩy $\vec{F}_d$, lực nâng và lực cản $\vec{F}_k$, trọng lượng $\vec{F}_g$. Hãy thiết lập phương trình chuyển động tương đối của hệ khối lượng – lò xo theo phương thẳng đứng.



Hình 7.3

Lời giải. Ta chọn hệ toạ độ xy gắn liền vào máy bay y = 0 khi lò xo chưa bị kéo nén. Phương trình chuyển động tương đối của hệ khối lượng – lò xo theo phương y là

$$m\ddot{y} = -cy - mg - m\ddot{y}_O \qquad (1)$$

Phương trình chuyển động của máy bay là

$$m_e\ddot{\vec{r}}_e = \vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{F}_k \qquad (2)$$

Chiếu (2) lên phương thẳng đứng ta được

$$m_e\ddot{y}_O = -m_e g + F_{dy} + F_{ky} \qquad (3)$$

Từ (3) suy ra

$$\ddot{y}_O = -g + \frac{F_{dy} + F_{ky}}{m_e} \qquad (4)$$

Thế (4) vào (1) tìm được phương trình chuyển động tương đối của hệ khối lượng – lò xo

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = -\frac{F_{dy} + F_{ky}}{m_e} \qquad (5)$$

Chú ý:

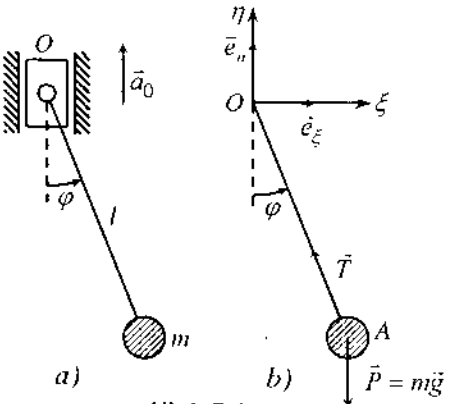
1) Từ phương trình (5) thấy rằng, trọng lượng của vật treo (mg) không xuất hiện trong phương trình chuyển động tương đối của nó. Chuyển động của vật treo chỉ phụ thuộc vào lực đẩy, lực nâng máy bay và lực cản của không khí

2) Khi máy bay bay thẳng đều, từ (1) suy ra

$$m\ddot{y} = -cy - mg$$

Khi đó, dựa trên kết quả do chuyển động tương đối (y và $\ddot{y}$) xác định được trọng lượng *mg*.

Thí dụ 7.3. Điểm treo *O* của con lắc toán học (khối lượng *m* chiều dài dây treo *l*) dịch chuyển theo phương thẳng đứng với gia tốc không đổi là a_0. Hãy xác định phương trình chuyển động, tần số dao động riêng của con lắc và sức căng của dây treo.



Hình 7.4

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của con lắc trong hệ quy chiếu động có dạng

$$m\vec{a}_r = \vec{T} + \vec{P} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt} \quad (1)$$

Do hệ quy chiếu động chuyển động tịnh tiến nên

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = 0 \quad (2)$$

Chọn hệ quy chiếu động $O\xi\eta$ như hình 7.4b, ta có

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -ma_0\vec{e}_\eta \quad (3)$$

Toạ độ của điểm A là

$$\xi_A = l\sin\varphi, \quad \eta_A = -l\cos\varphi \quad (4)$$

Đạo hàm phương trình (4)

$$\dot{\xi}_A = l\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \dot{\eta}_A = l\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{\xi}_A = l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi, \quad \ddot{\eta}_A = l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

Do $\vec{r}_A = \xi_A\vec{e}_\xi + \eta_A\vec{e}_\eta$ nên ta có

$$\vec{a}_r = \ddot{\xi}_A\vec{e}_\xi + \ddot{\eta}\vec{e}_\eta = \left(l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)\vec{e}_\xi + \left(l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)\vec{e}_\eta \quad (5)$$

Chiếu phương trình (1) lên hai trục ξ và η ta được

$$m\left(l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = -T\sin\varphi \quad (6)$$

$$m\left(l\ddot{\varphi}\sin\varphi + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = T\cos\varphi - mg - ma_0 \quad (7)$$

Từ hai phương trình (6) và (7) với hai ẩn là φ và T, ta có thể khử T đi và được phương trình vi phân chuyển động của con lắc toán học có điểm treo di động

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi - ma_0\sin\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g + a_0}{l}\sin\varphi = 0 \quad (8)$$

Khi góc φ nhỏ, thay $\sin\varphi \approx \varphi$, từ (8) ta nhận được phương trình dao động điều hoà

$$\ddot{\varphi} + \frac{g + a_0}{l}\varphi = 0 \quad (9)$$

Từ đó suy ra tần số dao động riêng của con lắc

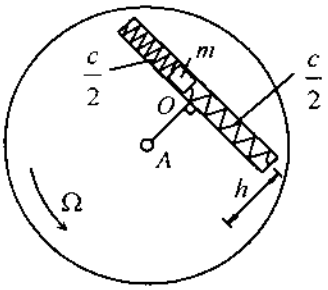
$$\omega = \sqrt{\frac{g + a_0}{l}} \quad (10)$$

Khi $a_0 > 0$, tần số dao động riêng của con lắc có điểm treo di động lớn hơn tần số dao động riêng của con lắc có điểm treo cố định. Khi $a_0 < 0$, ta có kết luận ngược lại. Khi $a_0 = -g$, ta có $\omega = 0$, con lắc không dao động nữa.

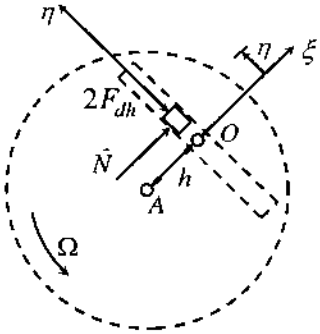
Nhân phương trình (6) với $\sin\varphi$, phương trình (7) với $\cos\varphi$ rồi trừ đi cho nhau nhận được biểu thức xác định sức căng của dây

$$T = m\left[l\dot{\varphi}^2 + \left(g + a_0\right)\cos\varphi\right] \qquad (11)$$

Thí dụ 7.4. Một chất điểm khối lượng m, hai đầu gắn lò xo và có thể chuyển động tương đối trong rãnh thẳng của một đĩa tròn (hình 7.5a). Cho biết hệ số đàn hồi của lò xo là $c/2$. Ở trạng thái cân bằng tĩnh, chất điểm có vị trí tại O. Đĩa quay quanh A với vận tốc góc $\Omega = \text{const}$. Bỏ qua trọng lượng chất điểm và ma sát trong rãnh. Hãy thiết lập phương trình chuyển động tương đối của chất điểm và xác định áp lực của chất điểm lên rãnh.



Hình 7.5a



Hình 7.5b

Lời giải. Khảo sát chuyển động của chất điểm. Chuyển động của đĩa tròn quay quanh A là chuyển động theo. Chuyển động của chất điểm dọc theo rãnh thẳng là chuyển động tương đối. Gắn chặt vào đĩa một hệ toạ độ động $O\xi\eta$ (hình 7.5b).

Phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm

$$m\vec{a}_r = \vec{N} + \vec{F}_{dh} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt} + m\vec{g} \qquad (1)$$

Trong đó lực quán tính theo và lực quán tính Coriolis có dạng như sau

$$\vec{a}_e = -h\Omega^2\vec{e}_\xi - \eta\Omega^2\vec{e}_\eta \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_e^{qt} = m\Omega^2\left(h\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta\right) \qquad (2)$$

$$\vec{a}_c = -2\dot{\eta}\Omega\vec{e}_\xi \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_c^{qt} = 2m\dot{\eta}\Omega\vec{e}_\xi \qquad (3)$$

Chú ý rằng, $\vec{a}_r = \ddot{\eta}\vec{e}_\eta$. Thế (2) và (3) vào (1) rồi chiếu lên hai trục toạ độ động ta được

$$0 = N + mh\Omega^2 + 2m\dot{\eta}\Omega \qquad (4)$$

$$m\ddot{\eta} = -c\eta + m\eta\Omega^2 \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm

$$\ddot{\eta} + \left(\frac{c}{m} - \Omega^2\right)\eta = 0 \qquad (6)$$

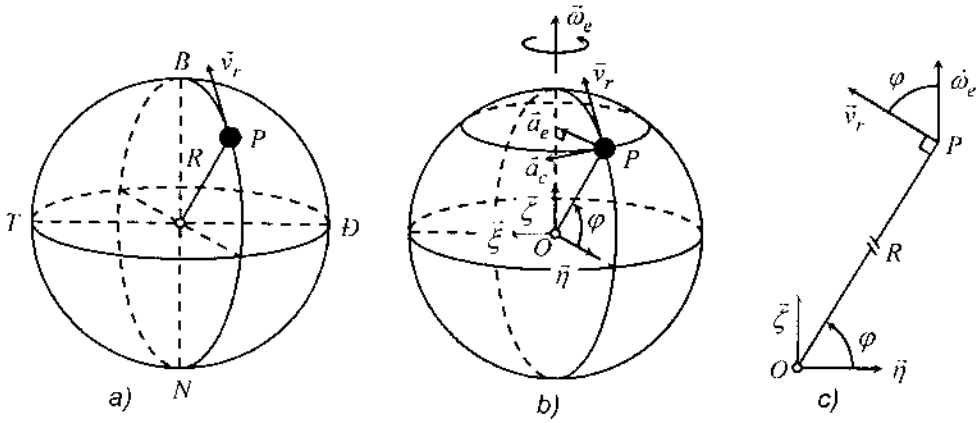
Như thế, khi $c/m > \Omega^2$, chất điểm thực hiện dao động tương đối điều hoà theo quy luật

$$\eta = A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t, \qquad \omega^* = \sqrt{c/m - \Omega^2} \qquad (7)$$

Từ (4) suy ra biểu thức phản lực

$$N = -m\left(h\Omega^2 + 2\dot{\eta}\Omega\right) \qquad (8)$$

Thí dụ 7.5. Một chất điểm P khối lượng m = 1000 *kg* chuyển động theo kinh tuyến từ xích đạo lên phía Bắc (hình 7.6a) với vận tốc tương đối v_r = 100 *km/h*. Cho biết trái đất có bán kính R = 6370 *km* quay quanh trục Nam – Bắc. Bỏ qua chuyển động của trái đất quay xung quanh mặt trời. Hãy xác định lực quán tính theo và lực quán tính Coriolis cực đại của chất điểm.



Hình 7.6

Lời giải: Trái đất quay quanh trục Bắc – Nam một vòng hết 24 giờ. Vận tốc góc của trái đất là:

$$\omega_e = \frac{2\pi}{24.3600} = 7{,}27.10^{-5}\, rad/s$$

Gắn vào trái đất hệ toạ độ cố định $O\xi\eta\zeta$ như hình 7.6b, ta có $\vec{\omega}_e = \omega\vec{e}_\zeta$. Gia tốc theo của chất điểm P là gia tốc của trùng điểm P^* trong chuyển động quay của trái đất:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{P^*} = \dot{\vec{\omega}}_e \times \vec{r}_e = \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}_{OP}) = -R\cos\varphi.\omega_e^2\vec{e}_\eta$$

Gia tốc Coriolis

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r = 2\omega_e v_r \sin\varphi.\vec{e}_\xi$$

Lực quán tính theo và lực quán tính Coriolis của chất điểm

$$\vec{F}_e^{qt} = mR\omega_e^2 \cos\varphi\vec{e}_\eta, \quad \vec{F}_c^{qt} = -2m\omega_e v_r \sin\varphi\vec{e}_\xi$$

Khi $\varphi = 0$ lực quán tính theo đạt cực đại (tại xích đạo)

$$F_{e\max}^{qt} = mR\omega^2 = 34N$$

Khi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ lực quán tính Coriolis đạt cực đại

$$F_{c\max}^{qt} = 2m\omega_e v_r \approx 4N$$

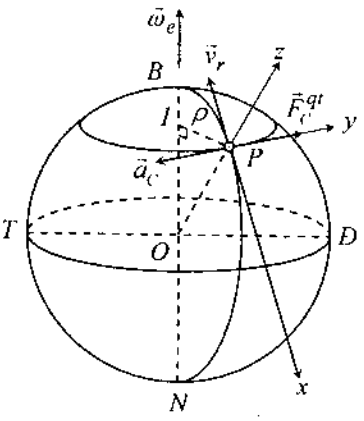
Thí dụ 7.6. Khảo sát chuyển động của chất điểm P dọc theo kinh tuyến từ xích đạo lên phía Bắc (hình 7.7).

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt} \qquad (1)$$

Trọng lượng $\vec{P}$ hướng dọc theo trục z từ P vào O. Do trái đất quay đều quanh trục của nó với vận tốc góc ω, ta có

$$\vec{F}_e^{qt} = \vec{F}_{en}^{qt} = -m\vec{a}_e^n \qquad (2)$$



Hình 7.7

Lực $\vec{F}_e^{qt}$ hướng từ I ra P.

Do $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ hướng dọc trục y từ phải qua trái, nên $\vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_c$ hướng dọc trục y từ trái qua phải. Do tác dụng của lực quán tính Coriolis $\vec{F}_c^{qt}$, chất điểm P chuyển động từ xích đạo lên phía Bắc sẽ bị lệch về bên phải. Ngược lại khi chất điểm chuyển từ cực Bắc về xích đạo nó sẽ bị lệch về bên trái.

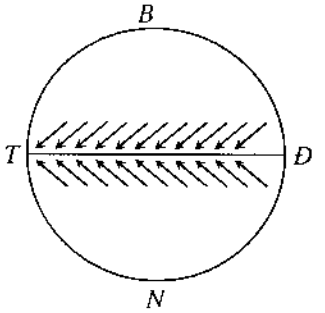
Ở Nam bán cầu sẽ có hiện tượng ngược lại. Chất điểm chuyển động từ xích đạo về Nam cực sẽ bị lệch về bên trái, chất điểm chuyển động từ cực Nam về xích đạo nó sẽ bị lệch về bên phải.

Áp dụng sự phân tích trên ta giải thích một số hiện tượng sau:

a) Hướng chếch của gió mùa, hướng chảy vòng của các dòng nước biển, các dòng khí, chiều xoáy của gió bão và gió lốc (hình 7.8 và hình 7.9).

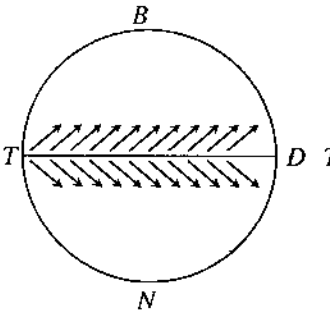
b) Hiện tượng Berer: Xét chuyển động của dòng sông trên Bắc bán cầu. Do dòng nước không lệch ngang được, nên dòng nước sẽ tác dụng vào bờ sông một

lực từ trái sang phải. Do đó mà ở bờ phải của các con sông chảy từ xích đạo lên Bắc bán cầu sẽ bị sói mòn nhiều hơn. Ngược lại, bờ bên trái của các con sông chảy từ xích đạo về Nam bán cầu sẽ bị sói mòn nhiều hơn.

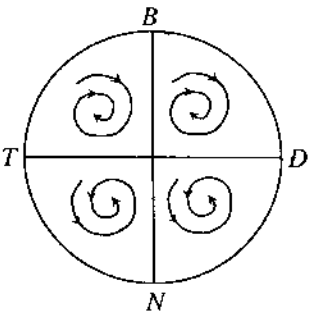


Hình 7.8

Gió mùa đông
– Bắc bán cầu: Gió mùa Đông Bắc
– Nam bán cầu: Gió mùa Đông Nam



Gió mùa hạ
– Bắc bán cầu: Gió mùa Tây Nam
– Nam bán cầu: Gió mùa Tây Bắc



Hình 7.9

– Dòng nước biển, dòng khí
– Chiều xoáy của gió bão

Tương tự như vậy, các đường ray bên phải của các con đường sắt một chiều từ xích đạo lên phương Bắc sẽ bị mòn nhiều hơn, còn các đường ray một chiều từ xích đạo xuống phương Nam sẽ bị mòn nhiều hơn về phía bên trái.

2. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LƯỢNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG TRONG HỆ QUY CHIẾU ĐỘNG

Trong hệ quy chiếu quán tính, các định lý biến thiên động lượng, biến thiên mômen động lượng và biến thiên động năng được suy ra từ phương trình cơ bản $m\vec{a} = \vec{F}$. Tương tự như vậy, trong hệ quy chiếu không quán tính, các định lý trên được suy ra từ phương trình

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt}$$

2.1. Phương pháp động lượng

Từ các định lý biến thiên động lượng và định lý biến thiên mômen động lượng trong chương hai ta suy ra một cách hình thức:

– Định lý biến thiên động lượng

$$\frac{d\vec{p}^r}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_{ek}^{qt} + \sum \vec{F}_{ck}^{qt} \qquad (2.1)$$

– Định lý biến thiên mômen động lượng

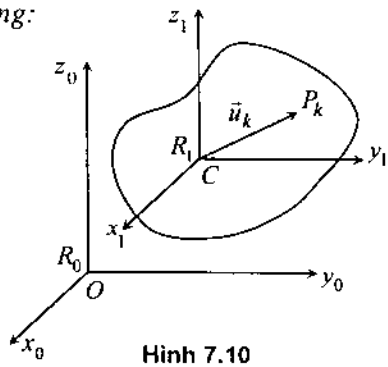
$$\frac{d\vec{l}_O^r}{dt} = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right) + \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_{ck}^{qt}\right) \tag{2.2}$$

Chú ý về định lý biến thiên mômen động lượng:

Trong hệ quy chiếu động R_1 gắn với khối tâm của cơ hệ và có các trục $Cx_1 // Cx_0$, $Cy_1 // Cy_0$, $Cz_1 // Cz_0$, ta có

$$\vec{F}_{ck}^{qt} = -2m\vec{\omega}_e \times \vec{v}_k^r = 0 \quad (\text{do } \vec{\omega}_e = 0)$$

Từ đó suy ra $\sum \vec{m}_C\left(\vec{F}_{ck}^{qt}\right) = 0$.



Hình 7.10

Mặt khác ta có

$$\vec{m}_C\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right) = \vec{u}_k \times \vec{F}_{ek}^{qt} = \vec{u}_k \times \left(-m_k\vec{a}_k^e\right)$$

$$\sum \vec{m}_C\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right) = \sum \vec{u}_k \times \left(-m_k\vec{a}_k^e\right) = \sum \vec{u}_k \times \left(-m_k\vec{a}_e\right)$$

$$= \vec{a}_e \times \sum m_k\vec{u}_k = \vec{a}_e \times M\vec{u}_C = 0 \qquad (\text{do } \vec{u}_C = 0)$$

Vậy từ (2.2) suy ra

$$\frac{d\vec{l}_C^r}{dt} = \sum \vec{m}_C\left(\vec{F}_k^e\right) \tag{2.3}$$

Kết luận: Trong hệ quy chiếu động R_1, có gốc ở khối tâm và chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu cố định R_0, định lý biến thiên mômen động lượng cơ hệ đối với khối tâm C có dạng tương tự như trong hệ quy chiếu quán tính.

2.2. Phương pháp năng lượng

Tương tự như trên ta có định lý biến thiên động năng

$$dT^r = \sum dA^r\left(\vec{F}_k\right) + \sum dA^r\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right) + \sum dA^r\left(\vec{F}_{ck}^{qt}\right) \tag{2.4}$$

Chú ý về định lý biến thiên động năng:

Theo định nghĩa công của lực quán tính Coriolis có dạng

$$dA^r\left(\vec{F}_c^{qt}\right) = \vec{F}_c^{qt}.\vec{v}_r dt = -2m\left(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r\right).\vec{v}_r dt = 0$$

Do đó từ (2.4) suy ra

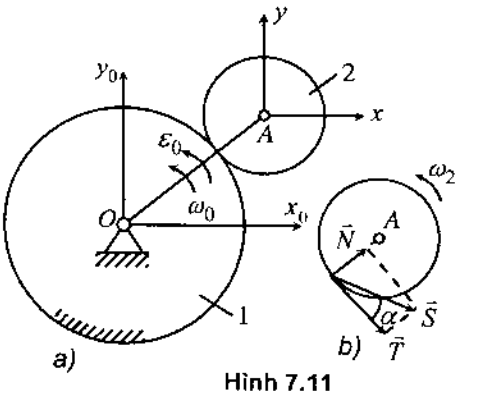
$$dT^r = \sum dA^r\left(\vec{F}_k\right) + \sum dA^r\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right) \tag{2.5}$$

Kết luận: Khi áp dụng định lý biến thiên động năng, không cần phải tính công của các lực quán tính Coriolis

2.3. Các thí dụ áp dụng

Thí dụ 7.7. Tính lực ăn khớp giữa hai bánh răng hành tinh. Cơ cấu hành tinh nằm trong mặt phẳng nằm ngang. Tay quay OA quay với vận tốc góc ω_0, gia tốc góc ε_0. Bánh xe động 2 xem như đĩa tròn đồng chất trọng lượng P_2. Hãy tìm lực ăn khớp giữa hai bánh răng (hình 7.11). Cho biết góc ăn khớp là α, các bán kính r_1 và r_2.

Lời giải. Khảo sát chuyển động của bánh răng 2. Gắn vào khối tâm A của bánh răng 2 hệ quy chiếu $R = Axy$ mà $Ax//Ox_0$, $Ay//Oy_0$. Lực tác dụng lên bánh răng 2 gồm: Trọng lượng $\vec{P}_2$, phản lực tại A là $\vec{R}_A$, lực ăn khớp bánh răng $\vec{S} = \vec{N} + \vec{T}$ (hình 7.11b).



Hình 7.11

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng (2.6)

$$\frac{dL_z^r}{dt} = \sum m_z\left(\vec{F}_k^e\right) = Tr_2 = Sr_2\cos\alpha \qquad (1)$$

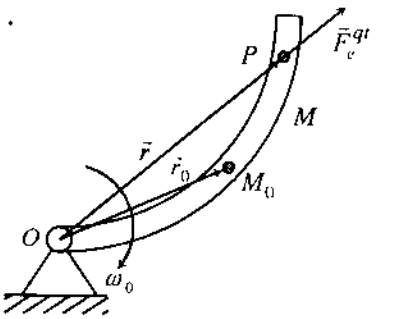
Do hệ động R chuyển động tịnh tiến đối với hệ cố định R_0 nên ta có

$$L_z^r = J_A\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r_2^2\frac{r_1+r_2}{r_2}\omega_0 = \frac{P_2r_2(r_1+r_2)}{2g}\omega_0 \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được

$$S = \frac{P_2(r_1+r_2)}{2g\cos\alpha}\varepsilon_0 \qquad (3)$$

Thí dụ 7.8. Một ống cong phẳng quay đều trong mặt phẳng của nó với vận tốc góc ω_0 quay quanh trục thẳng đứng đi qua O (hình 7.12). Một chất điểm P có khối lượng m chuyển động trong ống cong đó. Bỏ qua ma sát giữa ống và chất điểm. Ban đầu chất điểm P ở vị trí M_0 xác định bởi $OM_0 = r_0$ và có vận tốc tương đối ban đầu $v_r(0)$. Tìm vận tốc tương đối của chất điểm P khi nó ở vị trí $OM = r$.



Hình 7.12

Lời giải. Khảo sát chuyển động của điểm P. Chọn hệ quy chiếu động R_1 gắn liền với ống cong. Điểm P chuyển động tương đối dọc theo ống cong. Chuyển động theo là chuyển động quay của ống cong quanh một trục cố định đi qua O và vuông góc với quỹ đạo chuyển động tương đối nên lực quán tính theo không sinh công. Khi áp dụng định lý biến thiên động năng ta không cần quan tâm đến lực quán tính Coriolis. Lực quán tính theo $\vec{F}_e^{qt}$ hướng từ O đến P có biểu thức

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_e^n = m\omega_o^2\vec{r} \qquad (1)$$

Theo định lý biến thiên động năng ta có

$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_r^2(0)}{2} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_e^{qt}.d\vec{r} \qquad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta được

$$\frac{mv_r^2}{2} - \frac{mv_r^2(0)}{2} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\omega_o^2\vec{r}d\vec{r} = \frac{1}{2}m\omega_o^2\left(r^2 - r_0^2\right) \qquad (3)$$

Từ đó suy ra

$$v_r^2 = v_r^2(0) + \omega_o^2\left(r^2 - r_0^2\right) \qquad (4)$$

3. PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI HAI TRONG HỆ QUY CHIẾU ĐỘNG

Như đã biết, phương trình Lagrange loại 2 là phương trình chuyển động của cơ hệ f bậc tự do chịu các liên kết hôlônôm và có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2,..., f) \qquad (3.1)$$

Trong đó T là động năng của hệ, q_1, q_2, ... , q_f là f toạ độ suy rộng đủ, Q_i $(i = 1, 2,... , f)$ là lực suy rộng ứng với toạ độ suy rộng q_i. Từ đó suy ra phương trình Lagrange loại 2 trong chuyển động tương đối của hệ hôlônôm n bậc tự do có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T_r}{\partial q_i} = Q_i^r\left(\vec{F}_k\right) + Q_i^r\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right) + Q_i^r\left(\vec{F}_{ck}^{qt}\right) \quad (i=1,\ldots,f) \qquad (3.2)$$

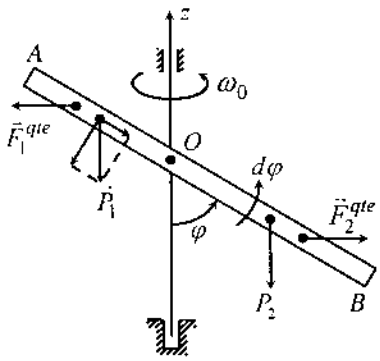
Trong đó q_i là các toạ độ suy rộng của cơ hệ trong hệ quy chiếu động, $Q_i^r\left(\vec{F}\right), Q_i^r\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right), Q_i^r\left(\vec{F}_{ck}^{qt}\right)$ tương ứng là các lực suy rộng của các lực hoạt động, các lực quán tính theo và các lực quán tính Coriolis ứng với toạ độ suy rộng q_i

trong chuyển động tương đối. T_r là động năng của cơ hệ trong chuyển động tương đối.

Khi cơ hệ cân bằng tương đối, do $v_{rk} = 0$ nên ta suy ra T_r và $Q_i^r\left(\vec{F}_{ck}^{qt}\right)$ đều bằng không. Từ đó suy ra điều kiện cân bằng tương đối là

$$Q_i^r\left(\vec{F}\right)+Q_i^r\left(\vec{F}_{ek}^{qt}\right)=0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \tag{3.3}$$

Thí dụ 7.9. Một thanh đồng chất AB được gắn bằng bản lề O vào một trục quay thẳng đứng, trong đó chốt bản lề O thẳng góc với mặt phẳng E chứa thanh AB và trục quay z (hình 7.11). Cho biết $OA = a$, $OB = b$, bỏ qua ma sát. Hãy xác định chuyển động của AB ở trong mặt phẳng E khi trục thẳng đứng quay với vận tốc ω



Hình 7.12

Lời giải. Khảo sát chuyển động của thanh AB. Chọn mặt phẳng E chứa thanh AB và trục quay z làm hệ quy chiếu động. Chuyển động của thanh AB trong mặt phẳng E là chuyển động tương đối. Vị trí thanh AB ở trong E được xác định bởi góc φ. Chọn $q = \varphi$ làm toạ độ suy rộng.

Phương trình Lagrange loại hai đối với thanh AB trong chuyển động tương đối có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T_r}{\partial \varphi}=Q_\varphi+Q_\varphi^{qte}+Q_\varphi^{qtc} \tag{1}$$

Trong đó, T_r là động năng của thanh AB trong chuyển động tương đối, Q_φ là lực suy rộng của các lực hoạt động, Q_φ^{qte} là lực suy rộng ứng với lực quán tính theo, Q_φ^{qtc} là lực suy rộng ứng với lực quán tính Coriolis. Cho thanh thực

hiện một di chuyển ảo tương đối $\delta\varphi$ như hình vẽ. Do lực hoạt động là các trọng lượng của hai phần thanh OA và OB, ta có

$$\sum \delta A^r\left(\vec{F}_k\right) = P_1\frac{a}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi - P_2\frac{b}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi = \frac{1}{2}(P_1a - P_2b)\sin\varphi\,\delta\varphi$$

Vậy $$Q_\varphi = \frac{1}{2}(P_1a - P_2b)\sin\varphi \qquad (2)$$

Do $\delta\vec{r}_k \perp (\vec{\omega}_e \times \vec{v}_k^r)$ nên

$$\sum \delta A^r(\vec{F}_k^{qtc}) = \sum \vec{F}_k^{qtc}.\delta\vec{r}_k = -2\sum m_k(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_k^r).\delta\vec{r}_k = 0$$

Do đó $Q_\varphi^{qtc} = 0$. Bây giờ ta tính lực suy rộng ứng với lực quán tính theo. Lực quán tính theo của mỗi phân tố của thanh có thể phân thành hai thành phần

$$d\vec{F}_{qte} = d\vec{F}_{qte}^{\tau} + d\vec{F}_{qte}^{n}$$

Do $d\vec{F}_{qte}^{\tau}$ vuông góc với $\delta\vec{r}_k$ nên $\delta A\left(d\vec{F}_{qte}^{\tau}\right) = 0$. Thu gọn hệ hệ lực quán tính theo pháp tuyến của các đoạn OA và OB ta được

$$F_1^{qte} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}a\sin\varphi.\omega^2, \quad F_2^{qte} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}b\sin\varphi.\omega^2$$

Vậy $$\sum \delta A\left(\vec{F}_k^{qte}\right) = F_1^{qte}.\frac{2}{3}a\cos\varphi.\delta\varphi + F_2^{qte}.\frac{2}{3}b\cos\varphi.\delta\varphi$$

$$= \frac{1}{3g}\left(P_1a^2 + P_2b^2\right)\sin\varphi\cos\varphi.\omega^2\delta\varphi$$

Từ đó suy ra $$Q_\varphi^{qte} = \frac{1}{3g}\left(P_1a^2 + P_2b^2\right)\sin\varphi\cos\varphi.\omega^2 \qquad (3)$$

Động năng của thanh AB trong chuyển động tương đối là

$$T_r = \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{P_1}{g}\frac{a^2}{3} + \frac{P_2}{g}\frac{b^2}{3}\right]\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6g}\left(P_1a^2 + P_2b^2\right)\dot{\varphi}^2 \qquad (4)$$

Tính toán các đạo hàm riêng của T_r theo vận tốc suy rộng và toạ độ suy rộng suy ra

$$\frac{\partial T_r}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{3g}\left(P_1a^2 + P_2b^2\right)\dot{\varphi}, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3g}\left(P_1a^2 + P_2b^2\right)\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T_r}{\partial\varphi} = 0$$

Sử dụng phương trình Lagrange loại hai ta nhận được phương trình vi phân chuyển động tương đối của thanh AB

$$\frac{1}{3g}\left(P_1a^2+P_2b^2\right)\ddot{\varphi}=\frac{1}{2}(P_1a-P_2b)\sin\varphi+\frac{1}{3g}\left(P_1a^2+P_2b^2\right)\sin\varphi\cos\varphi.\omega^2 \quad (5)$$

Khi $\omega=\omega_0=\text{const}$ (thanh ở trạng thái cân bằng ổn định) ta có $\dot{\varphi}=0$, $\ddot{\varphi}=0$. Từ (5) suy ra vị trí cân bằng tương đối của thanh được xác định bởi công thức

$$\cos\varphi=\frac{3g}{2\omega_0^2}\cdot\frac{P_2b-P_1a}{P_1a^2+P_2b^2} \quad (6)$$

Chú ý. Giải bài toán này bằng cách áp dụng phương trình Lagrange loại hai trong chuyển động tuyệt đối dễ dàng hơn.

Chương 8

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH VÀ ỔN ĐỊNH CHUYỂN ĐỘNG

Dao động là một hiện tượng phổ biến trong tự nhiên và trong kỹ thuật. Trong chương này, trình bày một số khái niệm cơ bản của lý thuyết dao động tuyến tính và các phương pháp tính dao động tuyến tính của hệ một và hai bậc tự do.

Phần cuối của chương giới thiệu một số khái niệm cơ bản về ổn định chuyển động.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG

1.1. Định nghĩa dao động

Dao động là một quá trình thay đổi theo thời gian, mà có một đặc điểm nào đó lặp lại ít nhất một lần.

Dao động của các hệ cơ học gọi là dao động cơ học. Dao động của các hệ kỹ thuật (các máy, các công trình, v.v...) được gọi là dao động kỹ thuật.

1.2. Mô tả động học các quá trình dao động

a) Dao động điều hoà. Các hàm $\sin(\omega t+\alpha), \cos(\omega t+\alpha)$ được gọi là các hàm điều hoà. Dao động được mô tả về mặt toán học bởi các hàm điều hoà được gọi là dao động điều hoà (hình 8.1)

$$x(t) = A\sin(\omega t+\alpha) \tag{1.1}$$

Trong đó:

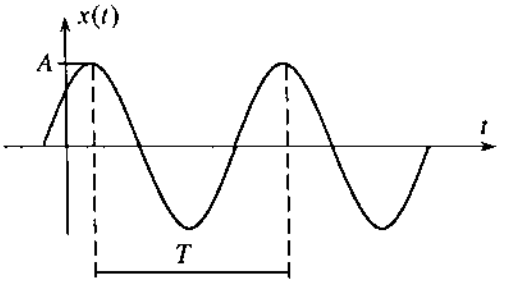
ω : tần số vòng (rad/s)

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: chu kỳ dao động

A : biên độ dao động

$\omega t+\alpha$: pha dao động

α : pha ban đầu



Hình 8.1

Đại lượng $f = 1/T$ (Hz) được gọi là tần số. Ta có hệ thức $\omega = 2\pi f$.

Do công thức lượng giác

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A(\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha) \qquad (1.2)$$

nên biểu thức (1.1) có thể viết lại dưới dạng

$$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \qquad (1.3)$$

Trong đó $C_1 = A\sin\alpha;\ C_2 = A\cos\alpha$ (1.4)

Từ (1.4) dễ dàng tính được

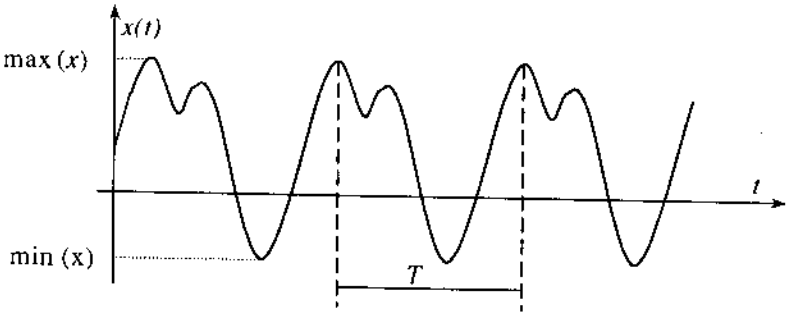
$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\ ; \qquad tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} \qquad (1.5)$$

Như thế *biên độ, tần số, chu kỳ, pha* là các khái niệm cơ bản của dao động điều hoà.

b) Dao động tuần hoàn. Hàm số $x(t)$ được gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại một hằng số T > 0, sao cho với mọi t ta có hệ thức

$$x(t+T) = x(t),\ \forall t \qquad (1.6)$$

Một quá trình dao động được mô tả về mặt toán học bởi một hàm tuần hoàn $x(t)$ được gọi là dao động tuần hoàn (hình 8.2).



Hình 8.2

Hằng số dương T nhỏ nhất để cho biểu thức (1.6) được thoả mãn gọi là chu kỳ dao động. Đại lượng $f = 1/T$ (Hz) được gọi là tần số dao động tuần hoàn. Như thế $\omega = 2\pi f$ là tần số vòng.

Biên độ A của dao động tuần hoàn x(t) được định nghĩa bởi công thức sau

$$A = \frac{1}{2}[\max x(t) - \min x(t)] \qquad (1.7)$$

Các khái niệm *chu kỳ, tần số, biên độ* là các khái niệm cơ bản của dao động tuần hoàn

c) Dao động họ hình sin. Một quá trình dao động được mô tả về mặt toán học bởi hàm

$$x(t) = A(t)\sin[\omega(t)t + \alpha(t)] \tag{1.8}$$

được gọi là dao động họ hình sin.

Dao động $x(t) = A_0 e^{-\delta t}\sin[\omega(t)t + \alpha(t)]$, $\delta > 0$ là dao động tắt dần, dao động $x(t) = A_0 e^{\delta t}\sin[\omega(t)t + \alpha(t)]$, $\delta > 0$ là dao tăng dần. Đó là các ví dụ về dao động họ hình sin.

Dao động mà biên độ $A(t)$ thay đổi luân phiên được gọi là dao động biến điệu biên độ. Dao động mà tần số $\omega(t)$ thay đổi luân phiên được gọi là dao động biến điệu tần số. Các dao động biến điệu có một vai trò quan trọng trong kỹ thuật vô tuyến điện.

1.3. Dao động tuyến tính và dao động phi tuyến

a) Sự phân loại dao động

Các quá trình dao động được phân loại tuỳ theo các quan điểm khác nhau:

– Căn cứ vào cơ chế gây nên dao động người ta phân thành dao động tự do, dao động cưỡng bức, dao động tham số, tự dao động, dao động hỗn loạn, dao động ngẫu nhiên.

– Căn cứ vào số bậc tự do người ta phân thành dao động hệ một bậc tự do, dao động hệ n bậc tự do, dao động hệ vô hạn bậc tự do.

– Căn cứ vào phương trình vi phân chuyển động người ta phân thành dao động tuyến tính, dao động phi tuyến.

– Căn cứ vào dạng chuyển động người ta phân thành dao động dọc, dao động xoắn, dao động uốn.

b) Dao động tuyến tính và dao động phi tuyến

Dao động được mô tả bởi phương trình vi phân tuyến tính được gọi là dao động tuyến tính. Ngược lại, nếu dao động được mô tả bởi phương trình vi phân phi tuyến được gọi là dao động phi tuyến.

Chú ý. Đối với dao động được mô tả bởi phương trình đạo hàm riêng, thì chỉ những cơ hệ được mô tả bởi phương trình đạo hàm riêng tuyến tính và điều kiện biên cũng tuyến tính mới là dao động tuyến tính. Các trường hợp khác đều là dao động phi tuyến.

2. DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH TỰ DO CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

2.1. Dao động tự do không cản

a) Các thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động

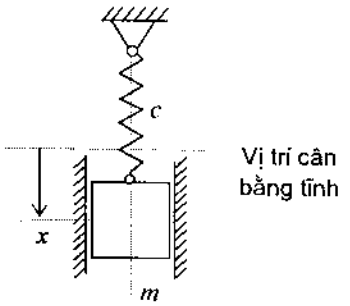
Trước hết chúng ta xét một vài thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do.

Thí dụ 8.1. Dao động của một vật nặng treo vào lò xo.

Xét một vật nặng khối lượng m treo vào lò xo có hệ số cứng c. Bỏ qua khối lượng lò xo (hình 8.3).

Động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}cx^2$$



Hình 8.3

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại hai

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

nhận được phương trình dao động của hệ

$$m\ddot{x} + cx = 0 \qquad (1)$$

Chú ý rằng, có thể nhận được phương trình dao động (1) bằng nhiều phương pháp khác nhau. Chẳng hạn, nếu sử dụng định luật Newton ta có

$$m\ddot{x} = P - c(x_0 + x)$$

Trong đó, x_0 là độ dãn tĩnh của lò xo $P = cx_0$, còn biểu thức của lực đàn hồi tuyến tính của lò xo $F_{dh} = c(x_0+x)$, lực đàn hồi hướng ngược chiều trục x. Từ phương trình trên ta suy ra

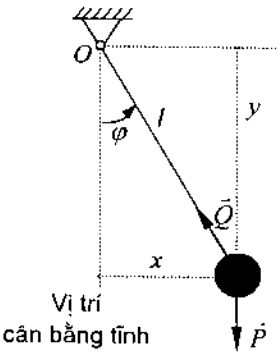
$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Thí dụ 8.2. Dao động con lắc toán học.

Con lắc toán học là một hệ dao động gồm một chất điểm có khối lượng m treo vào một điểm O cố định bằng một sợi dây nhẹ, không dãn chiều dài là l (hình 8.4). Gọi toạ độ của chất điểm là x, y. Từ hình vẽ ta có $x = l\sin\varphi$, $y = l\cos\varphi$. Từ đó dễ dàng tính được các biểu thức động năng của chất điểm

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$\Pi = -mgy = -mgl\cos\varphi$$



Hình 8.4

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại hai ta được

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

hay $$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

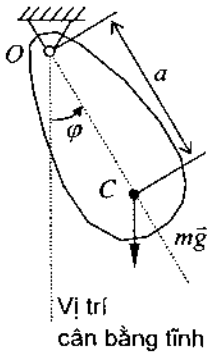
Trong trường hợp con lắc dao động nhỏ, có thể lấy xấp xỉ sin φ ≈ φ. Khi đó phương trình dao động nhỏ của con lắc toán học có dạng

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (2)$$

Thí dụ 8.3. Dao động con lắc vật lý.

Con lắc vật lý là một hệ dao động gồm có một vật rắn có thể quay quanh một trục cố định đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa khối tâm C của vật (hình 8.5). Khoảng cách từ điểm O đến khối tâm C của vật là a, mômen quán tính của vật rắn với trục quay là J_0. Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mga\cos\varphi$$



Hình 8.5

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại hai ta được

$$J_0\ddot{\varphi} + mga\sin\varphi = 0$$

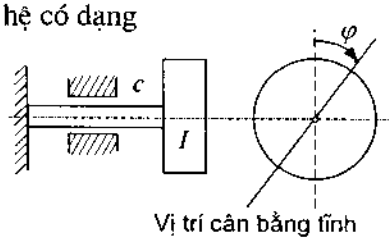
Trong trường hợp con lắc vật lý dao động nhỏ, ta lấy sinφ ≈ φ, phương trình vi phân dao động có dạng

$$J_0\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \qquad (3)$$

Thí dụ 8.4. Dao động xoắn.

Xét dao động xoắn của một vật nặng (chẳng hạn một đĩa hình tròn) gắn chặt vào một trục đàn hồi. Đầu kia của trục đàn hồi ngàm chặt vào tường cố định (hình 8.6). Cho biết mômen quán tính của vật nặng đối với trục quay là J, độ cứng xoắn của trục đàn hồi là c. Giả thiết mômen quán tính của trục đàn hồi đối với trục quay nhỏ hơn nhiều so với mômen quán tính của vật nặng đối với trục quay. Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}c\varphi^2$$



Hình 8.6

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại hai ta nhận được phương trình dao động xoắn tuyến tính của vật nặng

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \qquad (4)$$

Gọi q là toạ độ suy rộng. Từ các phương trình (1), (2), (3), (4) ta thấy dạng của phương trình dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do có dạng chung là

$$m\ddot{q} + cq = 0 \qquad (2.1)$$

b) Tính toán dao động tự do không cản

Nếu ta sử dụng ký hiệu

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \tag{2.2}$$

thì phương trình dao động tự do không cản (2.1) có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{2.3}$$

Như đã biết từ lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm của phương trình vi phân (2.3) có dạng như sau

$$q = C_1 cos\omega_0 t + C_2 sin\omega_0 t \tag{2.4}$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tuỳ ý. Các hằng số này được xác định từ các điều kiện đầu

$$t = 0: \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

Để xác định các hằng số C_1, C_2 ta đạo hàm biểu thức (2.4) theo thời gian

$$\dot{q} = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t \tag{2.5}$$

Thế các điều kiện đầu vào các biểu thức (2.4) và (2.5) xác định được

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \tag{2.6}$$

Chú ý rằng, nghiệm (2.4) của phương trình vi phân (2.3) có thể viết dưới dạng

$$q = Asin(\omega_0 t + \alpha) \tag{2.7}$$

Trong đó, A và α là các hằng số tuỳ ý. Do hệ thức

$$sin(\omega_0 t + \alpha) = sin\omega_0 t\, cos\alpha + sin\alpha\, cos\omega_0 t$$

nên từ (2.4), (2.6) và (2.7) dễ dàng tính được

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \omega_0 \frac{q_0}{\dot{q}_0} \tag{2.8}$$

Từ biểu thức (2.7) thấy rằng, dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do được mô tả bởi hàm điều hoà. Vì vậy dao động tự do không cản còn được gọi là dao động điều hoà.

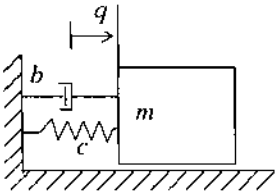
2.2. Dao động tự do có cản nhớt

Xét dao động của hệ mô tả trên hình 8.7. Do có thêm lực cản nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, nên phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \tag{2.9}$$

Nếu đưa vào các ký hiệu

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{m} = 2\delta \qquad (2.10)$$



Hình 8.7

thì phương trình (2.9) có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (2.11)$$

Theo lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính, phương trình đặc trưng của (2.11) là

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (2.12)$$

Tuỳ theo quan hệ giữa δ và ω_0, có thể xảy ra các trường hợp sau

$\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ) : $\lambda_{1,2} = -\delta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\delta \geq \omega_0$ (lực cản lớn) : $\lambda_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

*** Trường hợp thứ nhất : $\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ)**

Trong trường hợp này λ có giá trị phức. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.11) có dạng

$$q = e^{-\delta t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t) \qquad (2.13)$$

trong đó

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad (2.14)$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện đầu

$$t = 0: \qquad q(0) = q_0, \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

Từ các điều kiện đầu đã cho, dễ dàng xác định các hằng số C_1, C_2

$$C_1 = q_0, \qquad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + \delta q_0}{\omega} \qquad (2.15)$$

Để biến đổi biểu thức (2.13) đưa vào các hằng số A và β xác định theo hệ thức

$$C_1 = A\,sin\beta, \; C_2 = A\,cos\beta$$

Từ đó suy ra

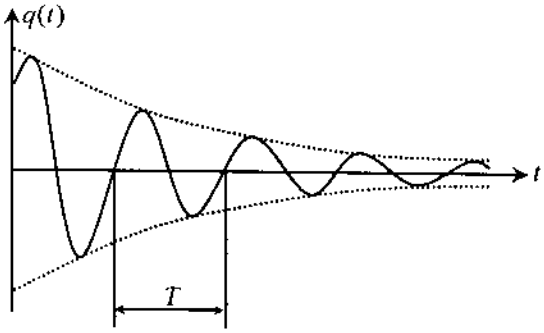
$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \; tg\beta = \frac{C_1}{C_2}$$

Biểu thức nghiệm (2.13) bây giờ có thể viết dưới dạng

$$q = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) \qquad (2.16)$$

Từ biểu thức nghiệm (2.16) ta thấy: Khi lực cản đủ nhỏ, hệ thực hiện dao động tắt dần. Độ lệch $Ae^{-\delta t}$ giảm theo luật số mũ, tiệm cận tới không (hình 8.8). Dao động được mô tả bởi phương trình (2.16) là dao động họ hình sin.

Tuy chuyển động của hệ được mô tả bởi quy luật không tuần hoàn, nhưng toạ độ q(t) lại đổi dấu theo thời gian một cách tuần hoàn. Vì thế người ta quy ước gọi ω là "tần số riêng", T = 2π/ω là "chu kỳ", còn $Ae^{-\delta t}$ là "biên độ" của dao động tắt dần.



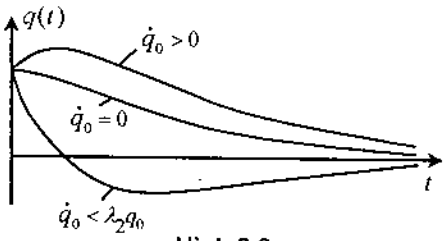
Hình 8.8

Để đặc trưng cho độ tắt dần của dao động tự do có cản nhớt, ta đưa vào khái niệm độ tắt lôga. Độ tắt lôga , ký hiệu là Λ, được xác định bởi hệ thức

$$\Lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \delta T \tag{2.17}$$

Độ tắt lôga đặc trưng cho độ giảm "biên độ" dao động tắt dần. Trong thực tế ta thường xác định tỷ số hai biên độ dao động sau k chu kỳ

$$\frac{q(t)}{q(t+kT)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+kT)}} = e^{\delta kT}$$



Hình 8.9

Từ đó ta suy ra

$$\Lambda = \delta T = \frac{1}{k}\ln\frac{q(t)}{q(t+kT)} \tag{2.18}$$

*** Trường hợp thứ hai: δ > ω_0 (lực cản lớn)**

Khi δ > ω_0, hai nghiệm λ_1 và λ_2 của phương trình đặc trưng là các số thực và âm. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.11) có dạng

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = Ae^{-\delta t} sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\, t + \beta) \tag{2.19}$$

Đường biểu diễn q = q(t) cắt trục t không quá một lần (hình 8.9). Do đó chuyển động của hệ là chuyển động tắt dần, không dao động.

*** Trường hợp thứ ba: δ = ω_0 (lực cản tới hạn)**

Trong trường hợp này hai nghiệm λ_1 và λ_2 là các số thực âm và bằng nhau. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.11) có dạng

$$q = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2) \tag{2.20}$$

Chuyển động của hệ là tắt dần không dao động.

Trong một số tài liệu viết về dao động trong kỹ thuật, người ta còn sử

dụng khái niệm độ cản Lehr. Độ cản Lehr, ký hiệu bằng chữ D, được xác định bởi hệ thức

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}} \tag{2.21}$$

Phương trình vi phân dao động tự do có cản nhớt (2.11) bây giờ có thể viết dưới dạng

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{2.22}$$

Do hệ thức $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$ chuyển động của hệ được phân thành ba trường hợp sau:

$D < 1$ ($\delta < \omega_0$) : độ cản nhỏ

$D = 1$ ($\delta = \omega_0$) : độ cản tới hạn

$D > 1$ ($\delta > \omega_0$) : độ cản lớn.

Căn cứ vào độ cản Lehr ta có kết luận : Khi $D < 1$ chuyển động của hệ là dao động tắt dần, khi $D \geq 1$ chuyển động của hệ tắt dần, không dao động.

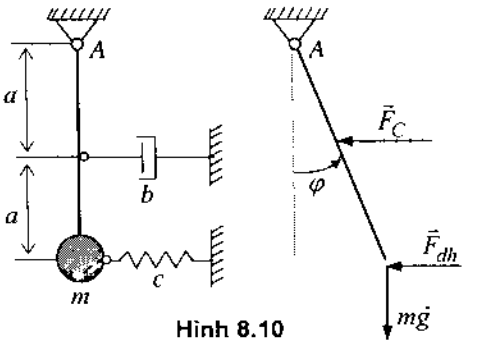
Từ công thức định nghĩa độ cản Lehr, ta dễ dàng xác định được hệ thức liên hệ giữa độ tắt lôga và độ cản Lehr

$$\Lambda = \delta T = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \tag{2.23}$$

Thí dụ 8.5. Gắn một khối lượng m vào đầu thanh. Gắn vào thanh các phần tử cản và đàn hồi như hình 8.10. Bỏ qua khối lượng của thanh.

– Phải chọn độ lớn của hệ số cản b như thế nào để hệ có khả năng dao động nhỏ.

– Xác định độ cản Lehr D cần thiết để sau mười dao động. biên độ giảm còn bằng 1/10 biên độ của chu kỳ đầu, sau đó xác định chu kỳ dao động tắt dần.



Hình 8.10

Lời giải. Sử dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục đi qua A và do φ nhỏ lấy xấp xỉ sinφ ≈ φ, cosφ ≈ 1, ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{4m}\dot{\varphi} + \left(\frac{c}{m} + \frac{g}{2a}\right)\varphi = 0$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Trong đó $2\delta = \dfrac{b}{4m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m} + \dfrac{g}{2a}$

Để hệ có khả năng dao động nhỏ thì $\delta < \omega_0$. Từ đó suy ra

$$\frac{b}{8m} < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{g}{2a}} \quad \rightarrow \quad b < 8\sqrt{cm + \frac{gm^2}{2a}}$$

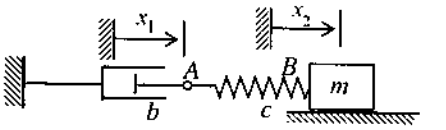
Từ các công thức (2.18) và (2.23) ta có

$$10\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln\frac{q_n}{q_{n+10}} = \ln 10 \rightarrow D = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{20\pi}{\ln 10}\right)^2 + 1}} = 0{,}037$$

Chu kỳ dao động tắt dần của hệ là

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2am}{2ac+gm}}$$

Thí dụ 8.6. Trong nhiều bài toán thiết kế, người ta phải lắp các phần tử cản và phần tử đàn hồi nối tiếp nhau như hình 8.11. Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ và tìm điều kiện xuất hiện dao động tự do có cản.



Hình 8.11

Lời giải. Gọi A là điểm nối giữa lò xo và phần tử cản. Điểm A chịu tác dụng của lực $F_c = b\dot{x}_1$. Biến dạng của lò xo là $x_2 - x_1$, do đó ở điểm B xuất hiện lực đàn hồi $F_{dh} = c(x_2 - x_1)$. Tách riêng phần tử lò xo AB ta có:

$$F_c = b\dot{x}_1 = F_{dh} = c(x_2 - x_1) \tag{1}$$

Sử dụng định luật Newton hai đối với chất điểm m suy ra

$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$b\dot{x}_1 = c(x_2 - x_1) = -m\ddot{x}_2 \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{m}{b}\ddot{x}_2 \tag{3}$$

Từ (3) suy ra :

$$x_1 = -\frac{m}{b}\dot{x}_2 + E \tag{4}$$

trong đó E là hằng số tích phân.

Thay (4) vào (2) ta được:

$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 + \frac{m}{b}\dot{x}_2 - E) \Rightarrow m\ddot{x}_2 + \frac{cm}{b}\dot{x}_2 + cx_2 = cE \tag{5}$$

Hằng số E được xác định từ các điều kiện đầu. Nếu cho $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$, thì $E = 0$, khi đó phương trình (5) có dạng

$$\ddot{x}_2 + \frac{c}{b}\dot{x}_2 + \frac{c}{m}x_2 = 0 \qquad (6)$$

Từ đó suy ra $\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \delta = \frac{c}{2b}$. Từ điều kiện $\delta < \omega_0$ nhận được công thức

$$\frac{c}{2b} < \sqrt{\frac{c}{m}} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{mc} < b.$$

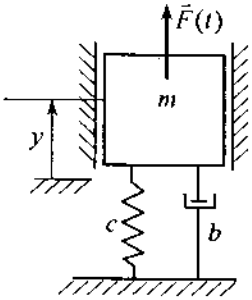
3. DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CƯỠNG BỨC CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

3.1. Các dạng kích động và phương trình vi phân dao động

a) Kích động lực

Trên hình 8.12 là mô hình dao động khối lượng – lò xo chịu kích động lực. Giả sử $F(t) = \hat{F}\sin\Omega t$, trong đó $\hat{F}$ là giá trị cực đại của hàm F(t). Đối với mô hình này ta có

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2,\ \Pi = \frac{1}{2}cy^2,\ \Phi = \frac{1}{2}b\dot{y}^2,\ Q^* = F(t).$$



Hình 8.12

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại 2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} + Q^*$$

ta được

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \hat{F}\sin\Omega t \qquad (3.1)$$

Chia hai vế của (2.1) cho m và đưa vào ký hiệu $\hat{y} = \hat{F}/c$, biến đổi (3.1) về dạng

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2\ \hat{y}\sin\Omega t \qquad (3.1a)$$

b) Kích động bởi khối lượng lệch tâm

Mô hình dao động của hệ chịu kích động bởi khối lượng lệch tâm cho trên hình 8.13. Rôto có khối lượng lệch tâm m_1, quay đều với vận tốc góc Ω. Biểu thức động năng của hệ có dạng

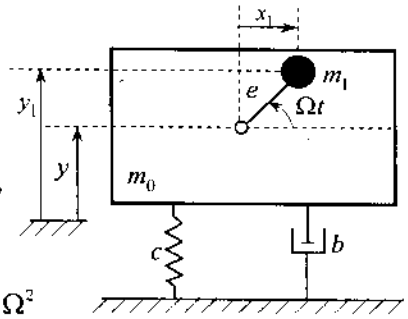
$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

Do quan hệ

$$x_1 = e\cos\Omega t,\ \dot{x}_1 = -e\Omega\sin\Omega t$$
$$y_1 = y + e\Omega\sin\Omega t,\ \dot{y}_1 = \dot{y} + e\Omega\cos\Omega t,$$

nên

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{y}^2 + 2\dot{y}e\Omega\cos\Omega t + e^2\Omega^2$$



Hình 8.13

Từ đó ta suy ra

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + m_1\dot{y}e\Omega\cos\Omega t + \frac{1}{2}m_1 e^2\Omega^2$$

Trong đó $m = m_0 + m_1$. Các biểu thức thế năng Π và hàm hao tán Φ có dạng như các thí dụ trước

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2,\ \Phi = \frac{1}{2}b\dot{y}^2$$

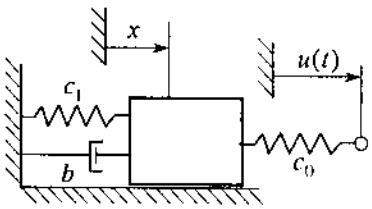
Thế các biểu thức T, Π, Φ vào phương trình Lagrange loại 2, ta được

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = m_1 e\Omega^2\sin\Omega t \qquad (3.2)$$

Biến đổi tương tự như trên suy ra

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \Omega^2\hat{y}\sin\Omega t \qquad (3.2a)$$

trong đó $\hat{y} = \dfrac{m_1}{m_0 + m_1}e$.



Hình 8.14

c) Kích động bằng lực đàn hồi

Trên hình 8.14 là mô hình hệ chịu kích động lực đàn hồi tuyến tính. Bỏ qua ma sát trượt động ($\mu = 0$). Cho biết $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$.

Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + c_1 x + c_0\left[x - u(t)\right] = 0$$

Do $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$ nên

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = c_0\hat{u}\sin\Omega t \qquad (3.3)$$

trong đó $c = c_1 + c_0$.

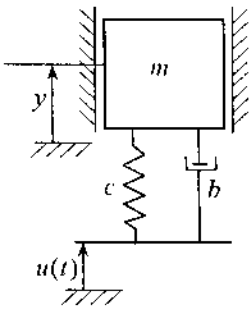
Nếu sử dụng ký hiệu $\hat{x} = \dfrac{c_0}{c_1 + c_0}\hat{u}$, thì phương trình (3.3) biến đổi được về dạng

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\hat{x}\sin\Omega t \qquad (3.3a)$$

d) Kích động động học

Trên hình 8.15 là mô hình hệ chịu kích động động học. Giả sử điểm chân của bộ lò xo và cản nhớt chịu tác động của kích động động học với quy luật điều hoà $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$. Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + c(y - u) = 0$$



Hình 8.15

Thế $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$, $\dot{u}(t) = \hat{u}\Omega\cos\Omega t$ vào phương trình trên ta có

$$m\ddot{y} + b\,\dot{y} + cy = \hat{u}(c\sin\Omega t + b\Omega\cos\Omega t) \tag{3.4}$$

Chia hai vế của phương trình (3.4) cho m ta được

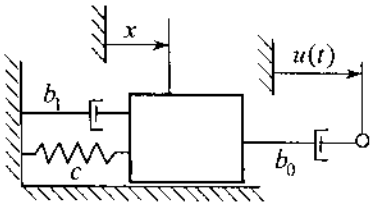
$$\ddot{y} + 2\delta\,\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0\hat{y}(\omega_0\sin\Omega t + 2\delta\frac{\Omega}{\omega_0}\cos\Omega t) \tag{3.4a}$$

trong đó $\hat{y} = \hat{u}$.

e) Kích động bằng lực cản nhớt

Trên hình 8.16 là mô hình hệ chịu kích động bằng lực cản nhớt. Mặt trượt nhẵn tuyết đối ($\mu = 0$). Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b_1\dot{x} + cx + b_0\left[\dot{x} - \dot{u}(t)\right] = 0$$



Hình 8.16

Cho biết $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$, $\dot{u}(t) = \hat{u}\Omega\cos\Omega t$, khi đó phương trình trên có dạng

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b_0\hat{u}\,\Omega\cos\Omega t \tag{3.5}$$

với $b = b_1 + b_0$. Chia hai vế của (3.5) cho m, ta được

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\delta\,\Omega\,\hat{x}\cos\Omega t \tag{3.5a}$$

trong đó $\hat{x} = \frac{b_0}{b}\hat{u}$.

Qua các thí dụ trên thấy rằng, phương trình vi phân dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do chịu kích động điều hoà có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H_1\sin\Omega t + H_2\cos\Omega t \tag{3.6}$$

Chia hai vế của phương trình (3.6) cho m, ta được

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1\sin\Omega t + h_2\cos\Omega t \tag{3.7}$$

Chú ý: Nếu ta sử dụng độ cản Lehr D thì phương trình (3.1a) có dạng như sau

$$\ddot{y} + 2D\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2\ \hat{y}\sin\Omega t \tag{3.8}$$

trong đó $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m},\ D = \dfrac{\delta}{\omega_0} = \dfrac{b}{2\sqrt{cm}}$.

Có thể biến đổi các phương trình (3.2a), (3.3a), (3.4a), (3.5a) về dạng tương ứng.

3.2. Tính toán dao động cưỡng bức không cản

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức không cản của hệ một bậc tự do có dạng

$$m\ddot{q} + cq = H\sin\Omega t \tag{3.9}$$

Nếu đưa vào các ký hiệu

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \qquad h = \frac{H}{m}$$

thì phương trình (3.9) có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = h\sin\Omega t \tag{3.10}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3.10) bao gồm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng của phương trình có vế phải. Để giải phương trình vi phân (3.10) ta xét hai trường hợp $\Omega \neq \omega_0$ (xa cộng hưởng) và $\Omega \approx \omega_0$ (gần cộng hưởng).

Khi $\Omega \neq \omega_0$, tìm nghiệm riêng của phương trình (3.10) dưới dạng

$$q^* = A\sin\Omega t \tag{3.11}$$

Trong đó, A là hằng số chưa xác định. Thế biểu thức (3.11) vào phương trình (3.10), so sánh với các hệ số của $\sin\Omega t$, ta rút ra biểu thức xác định A

$$A = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (\text{ với } \Omega \neq \omega_0)$$

Theo lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm tổng quát của phương trình (3.10) có dạng

$$q(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \tag{3.12}$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện đầu. Giả sử khi t = 0 thì $q(0) = q_0$ $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Thế các điều kiện đầu này vào biểu thức (3.12) và đạo hàm của nó, ta có

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Như thế, biểu thức nghiệm (3.12) có dạng

$$q(t) = q_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \qquad (3.13)$$

Nghiệm (3.13) gồm hai thành phần : Ba số hạng đầu biểu thị dao động tự do với tần số là tần số riêng của hệ, số hạng thứ tư biểu thị dao động cưỡng bức với tần số là tần số của lực kích động. Chú ý rằng, khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$ chỉ có hai số hạng đầu của dao động tự do triệt tiêu. Vì vậy số hạng thứ ba được gọi là thành phần dao động tự do kéo theo. Giai đoạn tồn tại cả các thành phần dao động với tần số lực kích động và các thành phần dao động với tần số riêng được gọi là giai đoạn chuyển tiếp. Giai đoạn chỉ tồn tại thành phần dao động với tần số của lực kích động được gọi là giai đoạn bình ổn.

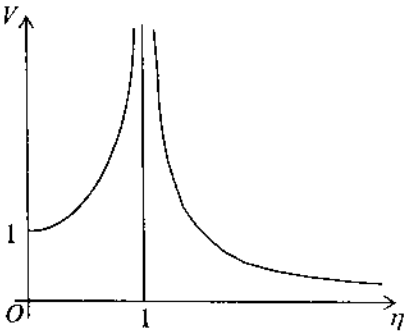
Nếu bỏ qua các thành phần dao động tự do trong (3.13) ta có biểu thức xác định trạng thái bình ổn của dao động cưỡng bức

$$q^*(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t = \frac{H}{c(1-\eta^2)}\sin\Omega t \qquad (3.14)$$

Chú ý rằng, thừa số H/c là dịch chuyển gây ra bởi lực tĩnh H đặt vào vật rắn dao động. Trong đó $\eta = \Omega/\omega_0$. Đại lượng

$$V(\eta) = \frac{1}{|1-\eta^2|} \qquad (3.15)$$

biểu thị tác dụng động lực của lực kích động, và được gọi là hàm khuếch đại (hoặc hệ số động lực). Trên hình 8.17 biểu diễn sự phụ thuộc của V vào η.



Hình 8.17

Khi tỷ số Ω/ω_0 dần đến 1, thì hàm khuếch đại (hệ số động lực) và do đó biên độ dao động cưỡng bức tăng lên nhanh chóng và tiến tới vô cùng khi $\Omega = \omega_0$. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng cộng hưởng. Như vậy *hiện tượng cộng hưởng* là hiện tượng biên độ dao động cưỡng bức tăng lên rất lớn do tần số của lực kích động trùng với tần số dao động riêng (dao động tự do). Trong thực tế không có trường hợp nào biên độ dao động tăng lên vô cùng vì trong các hệ thực bao giờ cũng tồn tại lực cản. Vấn đề này sẽ được xét ở sau. Trở lại biểu thức tổng quát (3.13) của nghiệm. Khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$, biểu thức nghiệm (3.13) có dạng

$$q(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) \qquad (3.16)$$

Xét trường hợp khi tần số Ω của lực kích động rất gần với tần số dao động tự do ω_0. Đưa vào ký hiệu

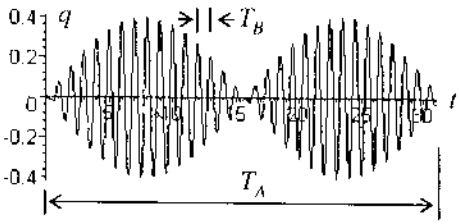
$$\Omega - \omega_0 = 2\varepsilon$$

Trong đó, ε là một đại lượng vô cùng bé. Bỏ qua các số hạng bé cỡ ε trong biểu thức của q suy ra

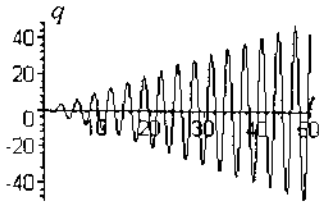
$$q \approx \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}(\sin\Omega t - \sin\omega_0 t) = \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\sin\frac{\Omega - \omega_0}{2}t$$

$$= \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\varepsilon t\cos\frac{\Omega + \omega_0}{2}t \approx -\frac{h\sin\varepsilon t}{2\Omega\varepsilon}\cos\Omega t \qquad (3.17)$$

Do ε là một vô cùng bé nên hàm sinεt biến thiên chậm, còn chu kỳ của nó 2π/ε rất lớn. Trong trường hợp này có thể xem biểu thức (3.17) là quy luật dao động với chu kỳ 2π/Ω và biên độ biến đổi $(h/2\Omega\varepsilon)\sin\varepsilon t$. Dạng dao động này được biểu diễn trên hình 8.18. Hiện tượng dao động này gọi là *hiện tượng phách*.



Hình 8.18



Hình 8.19

Xét trường hợp $\Omega \to \omega_0 (\varepsilon \to 0)$. Khi đó, có thể thay *sinεt* bằng *εt* trong biểu thức (3.17) và ta có hệ thức

$$q = -\frac{ht}{2\omega_0}\cos\omega_0 t \qquad (3.18)$$

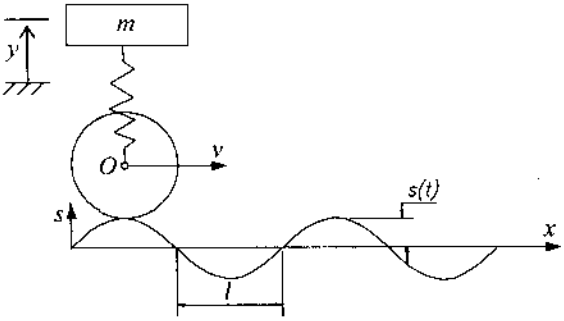
Biên độ $ht/2\omega_0$ tăng lên vô hạn khi thời gian t tăng như hình 8.19. Như thế, ngay trong phạm vi lý thuyết dao động tuyến tính không cản, sự tăng biên độ lên vô hạn ở vùng cộng hưởng cũng đòi hỏi phải có thời gian. Đối với các máy được thiết kế làm việc ở trên vùng cộng hưởng, khi tăng vận tốc của máy qua vùng cộng hưởng, cần phải khẩn trương cho vượt qua đủ nhanh.

Như thế khi tính toán dao động cưỡng bức không cản ta phân ra hai trường hợp:

– Trường hợp xa cộng hưởng ($\Omega \neq \omega_0$)

– Trường hợp gần cộng hưởng ($\Omega \approx \omega_0$). Trong trường hợp này khi $\Omega = \omega_0 + 2\varepsilon$ ta có hiện tượng phách, khi $\Omega = \omega_0$ ta có hiện tượng cộng hưởng.

Thí dụ 8.7. Bánh xe O lăn không trượt trên mặt đường gồ ghề lượn sóng (hình 8.20). Vận tốc tâm O của bánh xe luôn không đổi là v = 60 km/h. Mặt đường lượn sóng có phương trình là $s = \hat{s}\sin(\pi x / L)$ với $\hat{s}$ = 2 cm, L = 100 cm. Xác định biên độ dao động cưỡng bức thẳng đứng của vật thể M có khối lượng m, nối với trục bánh xe bằng lò xo có độ cứng là c. Biết rằng biến dạng tĩnh của lò xo dưới tác dụng của vật thể là δ_0 =10 cm.



Hình 8.20

Lời giải. Từ điều kiện cân bằng tĩnh $c\delta_0$ = mg suy ra

$$c = \frac{mg}{\delta_0}$$

Phương trình vi phân chuyển động của vật thể M có dạng

$$m\ddot{y} + c(y - s) = 0$$

Nếu đưa vào ký hiệu $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$, phương trình vi phân dao động được đưa về dạng

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{s} \sin\frac{\pi x}{L}$$

Thực hiện các biến đổi

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{mg}{m\delta_0} = \frac{g}{\delta_0} = 98{,}1 \quad 1/s^2$$

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{\pi v t}{L} = \Omega t \text{, với } \Omega = \frac{\pi v}{L} = \frac{16{,}6\pi}{1} = 16{,}6\pi$$

Do đó nghiệm riêng của phương trình trên là

$$y = A\sin\Omega t$$

với
$$A = \frac{\omega_0^2\,\hat{s}}{\left|\omega_0^2 - \Omega^2\right|} = \frac{\hat{s}}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right|} = \frac{2}{\left|1 - \frac{(16{,}6\pi)^2}{98{,}1}\right|} = 0{,}075\ cm.$$

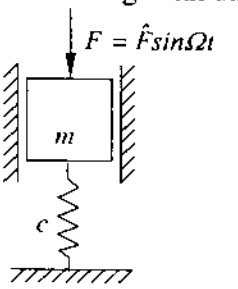
Thí dụ 8.8. Một máy gắn chặt vào móng và được đặt trên nền bằng một hệ lò xo song song. Khối lượng của máy và móng là 1000 kg. Trong quá trình máy làm việc xuất hiện một lực điều hoà tác dụng theo phương thẳng đứng với biên

độ $\hat{F}$=1000 N và tần số f =10 Hz. Dưới ảnh hưởng của lực này móng dao động theo phương thẳng đứng. Hãy xác định hệ số cứng của lò xo tương đương sao cho chỉ có 5% lực tác dụng lên móng truyền xuống nền. Sau đó xác định độ lún tĩnh của móng và biên độ dao động của nó.

Lời giải : Mô hình cơ học của bài toán cho trên hình 8.21. Phương trình dao động của hệ là

$$m\ddot{x} + cx = \hat{F}\sin\Omega t$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m}\sin\Omega t$$



Hình 8.21

Dao động bình ổn (nghiệm dừng) có dạng

$$x = \frac{\hat{F}}{c}\frac{1}{1-\eta^2}\sin\Omega t$$

Thế biểu thức nghiệm trên vào biểu thức tính lực truyền xuống nền ta được

$$F_{td} = cx = \hat{F}\frac{1}{1-\eta^2}\sin\Omega t$$

Từ điều kiện $\frac{\hat{F}_{td}}{\hat{F}} = \frac{1}{|1-\eta^2|} = 0,05$ suy ra $\eta = \sqrt{21} = 4,58$

Hệ số cứng của lò xo tổng là

$$c = m\omega_0^2 = m\frac{\Omega^2}{\eta^2} = m\frac{(2\pi f)^2}{\eta^2} = 1000.\frac{(2\pi.10)^2}{21} = 188\ N/mm$$

Với hệ số cứng đó, độ nén tĩnh của móng máy là

$$\delta_0 = \frac{mg}{c} = \frac{1000.9,81}{188} = 52,2\ mm$$

Biên độ dao động dừng của móng máy là

$$\hat{x} = \frac{1}{|1-\eta^2|}\frac{\hat{F}}{c} = \frac{1000}{20.188} = 0,266\ mm$$

3.3. Tính toán dao động cưỡng bức có cản nhớt

Phương trình vi phân dao động tuyến tính chịu kích động điều hoà của hệ một bậc tự do có ma sát nhớt có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1\sin\Omega t + h_2\cos\Omega t \qquad (3.19)$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình này dưới dạng

$$q^*(t) = M\sin\Omega t + N\cos\Omega t \tag{3.20}$$

Trong đó M, N là các hằng số cần xác định. Thế biểu thức (3.20) vào phương trình (3.19) rồi so sánh các hệ số của sinΩt và cosΩt, ta rút ra hệ hai phương trình đại số tuyến tính để xác định M và N

$$\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)M - 2\delta\Omega N = h_1$$

$$2\delta\Omega M + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)N = h_2$$

Giải ra ta được

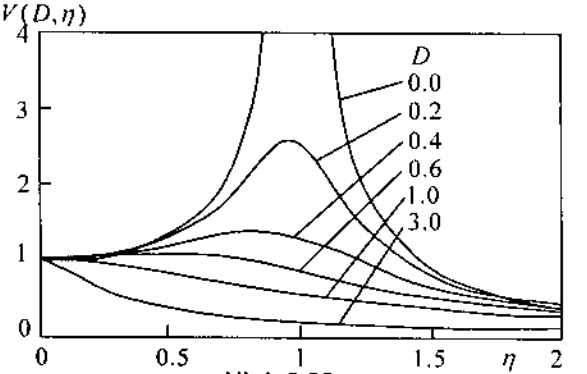
$$M = \frac{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)h_1 + 2\delta\Omega h_2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$

$$N = \frac{-2\delta\Omega h_1 + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)h_2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \tag{3.21}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3.19) là tổng của nghiệm riêng (3.20) và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) + M\sin\Omega t + N\cos\Omega t \tag{3.22}$$

Số hạng thứ nhất của biểu thức nghiệm (3.22) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Hai số hạng sau có tần số Ω của ngoại lực biểu diễn thành phần dao động cưỡng bức bình ổn của hệ.



Hình 8.22

Thành phần dao động cưỡng bức bình ổn (3.20) có thể biểu diễn dưới dạng

$$q^*(t) = \hat{q}\sin(\Omega t + \varphi) \tag{3.23}$$

Trong đó

$$\hat{q} = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\omega_0^2\sqrt{\left(1 - \eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}} \tag{3.24}$$

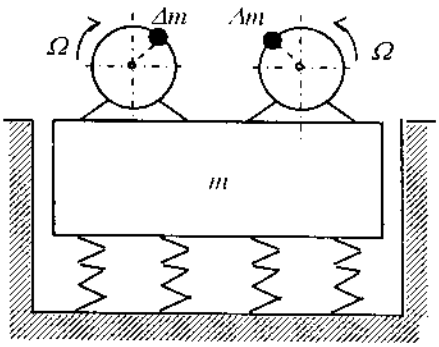
$$tg\varphi = \frac{N}{M} \tag{3.25}$$

Từ (3.24) suy ra

$$V(D,\eta) = \frac{\omega_0^2\hat{q}}{\sum(h_1^2 + h_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \tag{3.26}$$

Biểu thức (3.26) được gọi là hàm khuếch đại. Hình 8.22 là đồ thị hàm khuếch đại.

Thí dụ 8.9. Để xác định hệ số cản của mô hình dao động, người ta lắp vào hệ dao động hai động cơ lệch tâm như hình vẽ. Lượng lệch tâm $2e.\Delta m$ =130 kgcm. Khối lượng cả hệ m = 1800 kg, hệ số cứng tương đương của hệ lò xo c^* = 7200 N/cm. Hai môtơ quay đều, ngược chiều nhau với vận tốc góc $\Omega = 20\ s^{-1}$. Người ta đo được biên độ dao động cưỡng bức bình ổn là A = 0,2 cm. Hãy xác định hệ số cản Lehr, hệ số cản δ và b (hình 8.23).



Hình 8.23

Lời giải. Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của móng máy là

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + c^* q = 2e\Delta m\Omega^2 \cos(\Omega t + \alpha) \qquad (1)$$

Tần số dao động riêng

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \sqrt{\frac{7200.10^2}{1800}} = 20\ s^{-1} = \Omega$$

Như vậy máy rung làm việc ở chế độ cộng hưởng. Biên độ của lực kích động $F(t) = \hat{F}\cos(\Omega t + \alpha)$, $\hat{F} = 2\Delta m.e.\Omega^2 = 1.30 \times 40^2 = 520\ N$.

Theo công thức (3.24) xác định biên độ dao động cưỡng bức khi có cản, ta có

$$A = \frac{\hat{F}/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}.$$

Từ đó suy ra

$$\delta = \frac{\omega_0^2}{2\Omega}\sqrt{\left(\frac{F}{cA}\right)^2 - \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2} \qquad (2)$$

$$D = \frac{\omega_0}{\delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\Omega}\cdot\sqrt{(\frac{\hat{F}/c}{A})^2 - [1 - (\frac{\Omega}{\omega_0})^2]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{20}\cdot\sqrt{(\frac{520}{7,2.10^5 \times 0,2.10^{-2}})^2 - [1 - (\frac{20}{20})^2]^2} = 0,1806$$

Do đó $\delta = \omega_0 D = 3,611\ s^{-1}$; $b = 2m\delta = 13000\ kg/s$

4. DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH KHÔNG CẢN CỦA HỆ HAI BẬC TỰ DO

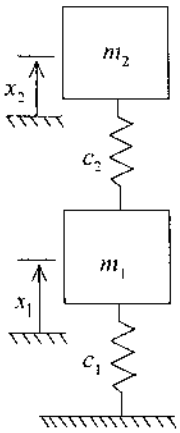
4.1. Dao động tự do không cản của hệ hai bậc tự do

Cho mô hình dao động của hệ hai bậc tự do không cản như hình vẽ 8. 24. Trước hết ta thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), với x_1, x_2 tương ứng là độ lệch của các khối lượng so với vị trí cân bằng tĩnh.

Động năng và thế năng của cơ hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2, \qquad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2\left(x_2 - x_1\right)^2. \qquad (2)$$



Hình 8.24

Thế các biểu thức động năng (1) và thế năng (2) vào phương trình Lagrange loại hai

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \qquad (3)$$

nhận được hệ phương trình vi phân dao động của cơ hệ

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2x_2 = 0, \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Để giải hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (4) tìm nghiệm dưới dạng

$$x_1 = A\cos(\omega t + \alpha), \; x_2 = C\cos(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

Trong đó, A, C, ω là các ẩn cần tìm. Thế các biểu thức (5) vào hệ phương trình (4) dẫn đến phương trình đại số tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 - m_1\omega^2)A - c_2C = 0 \\ -c_2A + (c_2 - m_2\omega^2)C = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Từ điều kiện để cho A và C không đồng thời triệt tiêu là định thức hệ số phải bằng không

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1\omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Từ (7) suy ra

$$m_1m_2\omega^4 - (m_1c_1 + m_2c_1 + m_2c_2)\omega^2 + c_1c_2 = 0 \qquad (8)$$

Phương trình (7) hoặc (8) được gọi là phương trình đặc trưng. Phương trình

đặc trưng (8) là một phương trình đại số bậc hai của ω^2. Giải phương trình (8) ta được hai nghiệm ω_1^2 và ω_2^2. Theo định lý Viet ta có

$$\omega_1^2\omega_2^2 = \frac{c_1c_2}{m_1m_2} > 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{m_1c_1 + m_2c_1 + m_2c_2}{m_1m_2} > 0 \qquad (9)$$

Hai đại lượng ω_1 và ω_2 là hai tần số riêng (tần số dao động tự do) của hệ. Để thuận tiện quy ước chọn $\omega_2 > \omega_1$.

Do định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình (6) bằng không nên các hằng số A và C không độc lập nhau. Thế ω_1 vào phương trình thứ nhất của (6) ta được

$$(c_1 + c_2 - m_1\omega_1^2)A_1 - c_2C_1 = 0$$

Từ đó suy ra

$$\mu_1 = \frac{C_1}{A_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega_1^2}{c_2} \qquad (10)$$

Chú ý rằng, nếu thay ω_1 vào phương trình thứ hai của (6) vẫn chỉ thu được kết quả như thế. Thế (10) vào phương trình (5) ta được

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1), \; x_2 = \mu_1 A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \qquad (11)$$

Thế ω_2 vào phương trình thứ nhất của (6) suy ra

$$\mu_2 = \frac{C_2}{A_2} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega_2^2}{c_2} \qquad (12)$$

Do đó

$$x_1 = A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2), \; x_2 = \mu_2 A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2) \qquad (13)$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình dao động tự do (4) là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm riêng. Chúng có dạng

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$x_2 = \mu_1 A_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_2\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Bốn hằng số $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ được xác định từ các điều kiện đầu. Các tần số riêng ω_1, ω_2 và các tham số μ_1, μ_2 không phụ thuộc vào các điều kiện đầu.

Để tính toán bằng số chọn $m_1 = m, m_2 = 2m, c_1 = c_2 = c$. Thế các đại lượng này vào biểu thức (8) suy ra phương trình đặc trưng

$$2m^2\omega^4 - 5cm\omega^2 + c^2 = 0$$

Giải phương trình này ta được

$$\omega_1^2 = \frac{1}{4}(5-\sqrt{17})\frac{c}{m} = 0,219\frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 0,468\sqrt{\frac{c}{m}}$$

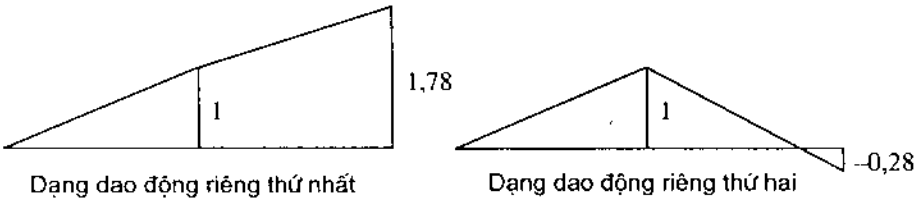
$$\omega_2^2 = \frac{1}{4}(5+\sqrt{17})\frac{c}{m} = 2,28\frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 1,51\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Theo (10) và (11) ta có các tỷ số biên độ

$$\mu_1 = \frac{2c - m\omega_1^2}{c} = 2 - \frac{m}{c}\omega_1^2 = 1,78$$

$$\mu_2 = \frac{2c - m\omega_2^2}{c} = 2 - \frac{m}{c}\omega_2^2 = -0,28$$

Từ đó suy ra các dạng dao động riêng



Hình 8.25

Phương trình vi phân dao động (4) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Một cách tổng quát, phương trình vi phân dao động tự do không cản của hệ hai bậc tự do có dạng

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Nếu đưa vào các ký hiệu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

thì phương trình (4.1) có thể viết lại dưới dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{4.3}$$

Tìm nghiệm của phương trình (4.3) dưới dạng

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}\sin(\omega t + \alpha) \tag{4.4}$$

Thế biểu thức (4.4) vào phương trình (4.3) và đơn giản đi $\sin(\omega t + \alpha)$ suy ra hệ phương trình đại số tuyến tính

$$(\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = 0 \tag{4.5}$$

Điều kiện để cho véc tơ **a** khác véc tơ **0** là

$$\det(\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M}) = \left|\mathbf{C}-\omega^2\mathbf{M}\right| = 0 \tag{4.6}$$

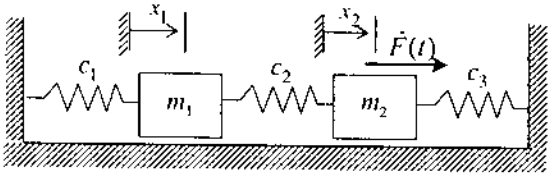
Phương trình (4.6) là phương trình tần số. Giải phương trình này xác định được các tần số riêng của hệ.

4.2. Dao động cưỡng bức không cản của hệ hai bậc tự do

Để nghiên cứu dao động cưỡng bức không cản của hệ hai bậc tự do xét mô hình cơ học đơn giản như hình 8.26.

a) Thành lập phương trình vi phân dao động

Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), với x_1, x_2 là dịch chuyển ngang của các khối lượng m_1, m_2 so với vị trí cân bằng tĩnh. Để có thể áp dụng phương trình Lagrange loại hai thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ, ta tìm biểu thức động năng và thế năng của hệ.



Hình 8.26

Động năng và thế năng cơ hệ là

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2(x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}c_3x_2^2.$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại hai nhận được các phương trình vi phân dao động của hệ

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)x_1 - c_2x_2 = 0, \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + (c_2+c_3)x_2 = F(t). \end{cases} \tag{1}$$

Chia hai vế của phương trình đầu của hệ (1) cho m_1, hai vế của phương trình hai cho m_2 ta được

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1+c_2}{m_1}x_1 - \frac{c_2}{m_1}x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{c_2}{m_2}x_1 + \frac{c_2+c_3}{m_2}x_2 = \frac{F(t)}{m_2}$$

Nếu đưa vào các ký hiệu

$$\gamma_1^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_2 + c_3}{m_2}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m_2} \tag{2}$$

thì hai phương trình vi phân trên có dạng

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \gamma_1^2 x_1 - \frac{c_2}{m_1} x_2 = 0 \\ &\ddot{x}_2 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{c_2}{m_2} x_1 = f(t) \end{aligned} \tag{3}$$

a) Xác định các tần số riêng

Để xác định các tần số riêng, xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với hệ phương trình trên

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1^2 x_1 - \frac{c_2}{m_1} x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{c_2}{m_2} x_1 = 0$$

Phương trình tần số có dạng

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1^2 - \omega^2 & -\dfrac{c_2}{m_1} \\ -\dfrac{c_2}{m_2} & \gamma_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = (\gamma_1^2 - \omega^2)(\gamma_2^2 - \omega^2) - \frac{c_2^2}{m_1 m_2} = 0 \tag{4}$$

$$\omega^4 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\omega^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{c_2^2}{m_1 m_2} = 0$$

Giải phương trình bậc hai ở trên đối với ω^2

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2}{4} - \gamma_1^2\gamma_2^2 + \frac{c_2^2}{m_1 m_2}}$$

Với các số liệu $c_1 = c_2 = 1000 N/cm$, $c_3 = 0$, $m_1 = m_2 = 2kg$, tính được ω_1 và ω_2

$$\omega_1 = 138{,}2 \text{ rad/s}; \qquad \omega_2 = 361{,}8 \text{ rad/s}$$

b) Tính toán dao động cưỡng bức

Khi cho biết kích động điều hoà $F(t) = F_0 \sin\Omega t$, tìm nghiệm của phương trình vi phân (1) dưới dạng:

$$x_1 = A_1 \sin \Omega t,\ x_2 = A_2 \sin \Omega t. \qquad (5)$$

Thế các biểu thức (5) vào phương trình (3) dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính

$$(\gamma_1^2 - \Omega^2)A_1 - \frac{c_2}{m_1}A_2 = 0$$

$$-\frac{c_2}{m_2}A_1 + (\gamma_2^2 - \Omega^2)A_2 = \frac{F_0}{m_2}$$

Giải ra ta được

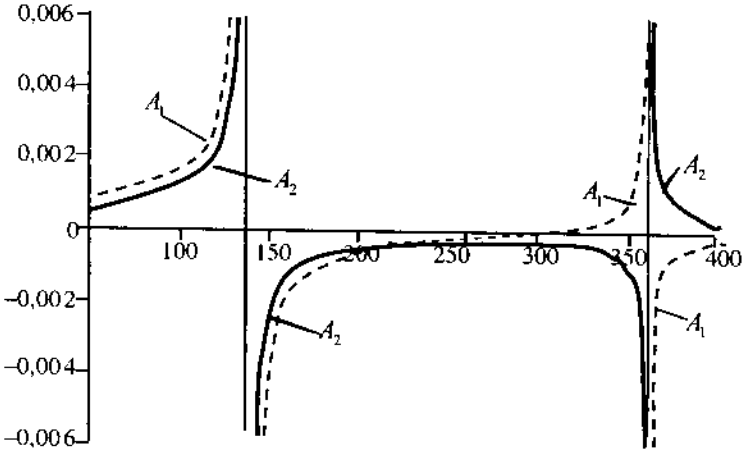
$$A_1 = \frac{F_0 c_2}{m_1 m_2 \Delta^*}\ ,\ A_2 = \frac{F_0(\gamma_2^2 - \Omega^2)}{m_2 \Delta^*} \qquad (6)$$

trong đó

$$\Delta^* = \left(\gamma_1^2 - \Omega^2\right)\left(\gamma_2^2 - \Omega^2\right) - \frac{c_2^2}{m_1 m_2} \qquad (7)$$

So sánh biểu thức (4) với (7) suy ra: Khi $\Omega = \omega_1$ hoặc $\Omega = \omega_2$ thì $\Delta^* = 0$, do đó biên độ dao động cưỡng bức A_1, A_2 tăng lên vô cùng. Trong hệ dao động hai bậc tự do có hai khả năng cộng hưởng.

Với $F_0 = 400$ N, đồ thị biên độ dao động cưỡng bức A_1, A_2 có dạng như hình 8.27.



Hình 8.27

Một cách tổng quát, phương trình vi phân dao động cưỡng bức không cản của hệ hai bậc tự do có dạng

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

Nếu các hàm kích động là các hàm điều hoà ta có thể tính toán dao động cưỡng bức tương tự như trên. Nếu kích động không phải là hàm điều hoà ta có thể tìm hiểu cách giải trong các giáo trình về dao động.

4.3. Bộ tắt chấn động lực không tính đến ma sát

a) Lý thuyết : Xét phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ hai bậc tự do không cản

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Giả sử các lực kích động có dạng

$$f_1(t)=\hat{f}_1\sin(\Omega t+\alpha), \qquad f_2(t)=\hat{f}_2\sin(\Omega t+\alpha) \tag{4.9}$$

Tìm nghiệm của hệ phương trình (4.8) dưới dạng

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin(\Omega t+\alpha), \tag{4.10}$$

Trong đó, A_1, A_2 là các hằng số cần xác định.

Thế các biểu thức (4.10) vào phương trình (4.8) ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định A_1 và A_2

$$\begin{aligned} (c_{11}-m_{11}\Omega^2)A_1+(c_{12}-m_{12}\Omega^2)A_2&=\hat{f}_1 \\ (c_{21}-m_{21}\Omega^2)A_1+(c_{22}-m_{22}\Omega^2)A_2&=\hat{f}_2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (4.11) ta được

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{(c_{22}-m_{22}\Omega^2)\hat{f}_1-(c_{12}-m_{12}\Omega^2)\hat{f}_2}{\Delta} \\ A_2&=\frac{(c_{11}-m_{11}\Omega^2)\hat{f}_2-(c_{21}-m_{21}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Trong đó

$$\Delta=(c_{11}-m_{11}\Omega^2)(c_{22}-m_{22}\Omega^2)-(c_{12}-m_{12}\Omega^2)(c_{21}-m_{21}\Omega^2) \tag{4.13}$$

Xét trường hợp $\hat{f}_2=0$. Khi đó từ công thức (4.12) suy ra

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{(c_{22}-m_{22}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \\ A_2&=\frac{-(c_{21}-m_{21}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Khi $\Delta\neq 0$, nếu chọn các tham số của hệ sao cho $c_{22}-m_{22}\Omega^2=0$, thì

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{\hat{f}_1}{c_{12} - m_{12}\Omega^2} \tag{4.15}$$

Vậy khi $\Omega^2 = c_{22}/m_{22}$, thì dao động cưỡng bức ứng với toạ độ suy rộng thứ nhất được hoàn toàn dập tắt.

b) Nguyên lý thiết kế bộ tắt chấn động lực : Dựa trên lý thuyết ở trên, người ta chế tạo các thiết bị tắt dao động gọi là bộ tắt chấn động lực (Absorber). Giả sử ta có mô hình dao động xoắn như hình 8.28a. Dễ dàng tính được biểu thức động năng và thế năng

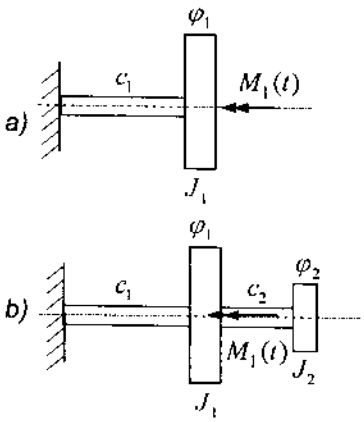
$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2, \; \Pi = \frac{1}{2}c_1\varphi_1^2$$

và lực suy rộng $Q = M_1(t) = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha)$. Phương trình vi phân dao động của hệ trên hình 3.17a có dạng

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1\varphi_1 = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha) \tag{4.16}$$

Ở chế độ chuyển động bình ổn, dao động cưỡng bức của hệ có dạng

$$\varphi_1 = \frac{\hat{f}_1}{J_1(\omega_1^2 - \Omega^2)}\sin(\Omega t + \alpha) \tag{4.17}$$



Hình 8.28

Trong đó, $\omega_1^2 = c_1/J_1$.

Gắn vào mô hình 8.28a một hệ phụ như hình 8.28b. Mô hình 8.28b là một hệ cơ học gồm hai bậc tự do. Hệ phương trình vi phân dao động của hệ này có dạng

$$\begin{aligned} &J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1\varphi_1 + c_2(\varphi_1 - \varphi_2) = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha) \\ &J_2\ddot{\varphi}_2 - c_2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Điều kiện dập tắt dao động φ_1 là $\Omega^2 = c_2/J_2$. Khi đó

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = 0 \\ &\varphi_2 = -\frac{\hat{f}_1}{c_2}\sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Hệ phụ lắp thêm vào hệ 8.28a như trên hình 8.28b được gọi là bộ tắt chấn động lực. Khi thiết kế bộ tắt chấn động lực trong thí dụ trên cần phải chú ý đến hai điều sau:

– Chọn hệ số cứng c_2 sao cho biên độ dao động cưỡng bức của góc $\varphi_2(t)$ là $\hat{f}_1/c_2$ có thể chấp nhận được.

– Chọn mômen quán tính khối J_2 sao cho $\Omega^2 = c_2/J_2$.

5. MỞ ĐẦU VỀ ỔN ĐỊNH CHUYỂN ĐỘNG

5.1. Phương trình trạng thái của các hệ cơ học

Thí dụ 8.10. Trong thí dụ 8.2 ta đã thiết lập phương trình dao động của con lắc toán học

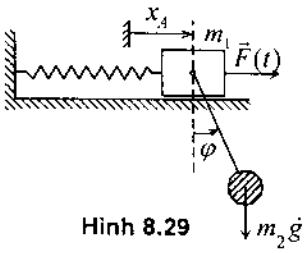
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

Nếu thực hiện phép đổi biến số $y_1 = \varphi, y_2 = \dot{\varphi}$, phương trình (1) có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{\varphi} = y_2 \\ \dot{y}_2 = \ddot{\varphi} = -\dfrac{g}{l}\sin y_1 \end{cases} \qquad (2)$$

Phương trình vi phân (2) được gọi là phương trình trạng thái của con lắc toán học.

Thí dụ 8.11. Trong thí dụ 4.7 (Chương 4) ta đã áp dụng phương trình Lagrange loại 2 thiết lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc elliptic (hình 8.29)



Hình 8.29

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_A + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi \\ -m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cx_A = F(t) \\ \ddot{x}_A\cos\varphi + l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Nhân phương trình thứ nhất của (3) với $\cos\varphi$, phương trình thứ hai với $(m_1 + m_2)$ nhận được

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_A\cos\varphi + m_2 l\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + cx_A\cos\varphi = F(t)\cos\varphi \\ (m_1 + m_2)\ddot{x}_A\cos\varphi + (m_1 + m_2)l\ddot{\varphi} + (m_1 + m_2)g\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Trừ hai phương trình này cho nhau ta có

$$(m_2\cos^2\varphi - m_1 - m_2)l\ddot{\varphi} = m_2(g + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\sin\varphi + m_1 g\sin\varphi + F(t)\cos\varphi - cx_A\cos\varphi$$

Do $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ suy ra

$$\ddot{\varphi} = -(m_1 l + m_2 l\sin^2\varphi)^{-1}[(g + l\dot{\varphi}^2\cos\varphi)m_2\sin\varphi + m_1 g\sin\varphi + F(t)\cos\varphi - cx_A\cos\varphi] \qquad (4)$$

Một cách tương tự, phương trình thứ nhất của (3) để nguyên, nhân phương trình thứ hai của (3) với $m_2\cos\varphi$ ta có

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}_A + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + cx_A = F(t)\\ m_2\ddot{x}_A\cos^2\varphi + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi + m_2 g\sin\varphi\cos\varphi = 0\end{cases}$$

Từ hai phương trình trên ta được

$$(m_1+m_2-m_2\cos^2\varphi)\ddot{x}_A = m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi + m_2 g\sin\varphi\cos\varphi - cx_A + F(t)$$

Từ đó suy ra

$$\ddot{x}_A = (m_1+m_2\sin^2\varphi)^{-1}[(l\dot{\varphi}^2+g\cos\varphi)m_2\sin\varphi + F(t) - cx_A] \quad (5)$$

Thực hiện phép đổi biến

$$y_1 = x_A,\ y_2 = \varphi,\ y_3 = \dot{x}_A,\ y_4 = \dot{\varphi}$$

thì từ các phương trình (4) và (5) suy ra

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\\ \dot{y}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3\\ y_4\\ (m_1+m_2\sin^2 y_2)^{-1}[(ly_4^2+g\cos y_2)m_2\sin y_2 + F(t) - cy_1]\\ \dfrac{[(g+ly_4^2\cos y_2)m_2\sin y_2 + m_1 g\sin y_2 + F(t)\cos y_2 - cy_1\cos y_2]}{-(m_1 l + m_2 l\sin^2 y_2)}\end{bmatrix} \quad (6)$$

Phương trình vi phân (6) được gọi là phương trình trạng thái của hệ con lắc eliptic.

Chú ý: Có thể sử dụng phép đổi biến khác

$$y_1 = x_A,\ y_2 = \dot{x}_A,\ y_3 = \varphi,\ y_4 = \dot{\varphi}$$

để đưa các phương trình (4) và (5) về dạng phương trình trạng thái.

Như thế phương trình vi phân trạng thái của một hệ cơ học tổng quát f bậc tự do là một hệ $n=2f$ phương trình vi phân cấp một dạng

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n)\\ \dot{y}_2 &= f_2(t, y_1, \ldots, y_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{y}_n &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n)\end{aligned} \quad (5.1)$$

Trong đó

$$y_1 = q_1, \ldots, y_f = q_f,\ y_{f+1} = \dot{q}_1, \ldots, y_n = \dot{q}_f \quad (5.2)$$

Hệ phương trình (5.1) là các phương trình trạng thái của cơ hệ không autonom. Đối với các cơ hệ autonom các phương trình trạng thái có dạng

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= f_1(y_1,\dots,y_n)\\
\dot{y}_2 &= f_2(y_1,\dots,y_n)\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\dot{y}_n &= f_n(y_1,\dots,y_n)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Xét trường hợp hệ tuyến tính mà phương trình vi phân chuyển động có dạng

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t)\mathbf{q} = \mathbf{h}(t) \tag{5.4}$$

Bằng phép biến đổi

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\mathbf{q}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix},\quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{E}\\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\end{bmatrix},\quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}\end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Phương trình (5.4) đưa được về dạng phương trình trạng thái

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{5.6}$$

5.2. Các định nghĩa về ổn định chuyển động

a) Ổn định Liapunov

Theo trên phương trình trạng thái của một hệ cơ học f bậc tự do có dạng

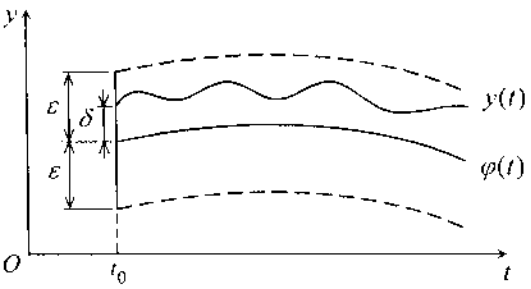
$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{y}),\quad \mathbf{y} = [y_1,\dots,y_n]^T, n = 2f$$

Trong lý thuyết phương trình vi phân ta đã biết nghiệm của hệ phương trình vi phân

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t,\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \tag{5.7}$$

phụ thuộc liên tục vào điều kiện đầu, khi t thay đổi liên tục trên đoạn $[a,b]$, nếu vế phải $\mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ thoả mãn các điều kiện về tồn tại và duy nhất nghiệm. Trong phần này ta sẽ nghiên cứu sự phụ thuộc của nghiệm phương trình vi phân (5.7) vào các điều kiện đầu, khi t thay đổi trong khoảng vô hạn $[t_0,+\infty)$.

Định nghĩa 5.1. Nghiệm $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.7) được gọi là ổn định theo nghĩa Liapunov nếu như với ε dương cho trước bé tuỳ ý, luôn có thể tìm được một số dương $\delta(\varepsilon, t_0)$ sao cho mọi nghiệm $\mathbf{y}(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.7) tại thời điểm đầu ở khá gần nghiệm $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$



Hình 8.30

$$\|\mathbf{y}(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \tag{5.8}$$

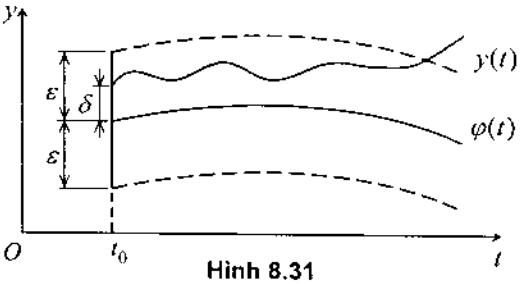
thì nó sẽ luôn thoả mãn điều kiện

$$\|\mathbf{y}(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \tag{5.9}$$

Định nghĩa 5.2. Nghiệm $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.7) được gọi là ổn định tiệm cận, nếu $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$ ổn định theo nghĩa Liapunov và thoả mãn thêm điều kiện

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t) - \varphi(t)\| = 0 \tag{5.10}$$

Định nghĩa 5.3. Nghiệm $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$ của hệ phương trình vi phân (5.7) là không ổn định nếu nó không thoả mãn định nghĩa 5.1 về ổn định theo nghĩa Liapunov.



Hình 8.31

Điều đó có nghĩa là: Tồn tại một nghiệm $\mathbf{y}_\delta$ nào đó của hệ phương trình vi phân (5.7) mà tại thời điểm đầu t_0 thoả mãn điều kiện

$$\|\mathbf{y}_\delta(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta \tag{5.11}$$

nhưng tồn tại một thời điểm $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ mà

$$\|\mathbf{y}_\delta(t_1) - \mathbf{y}(t_1)\| \geq \varepsilon \ . \tag{5.12}$$

Hình (8.30) minh hoạ khái niệm ổn định Liapunov, còn hình (8.31) minh hoạ khái niệm không ổn định Liapunov.

b) Ý nghĩa cơ học của khái niệm ổn định Liapunov

* *Chuyển động bị nhiễu và chuyển động không bị nhiễu*

Nếu (5.7) là phương trình trạng thái của một hệ cơ học thì mỗi nghiệm của hệ phương trình này cho biết một trạng thái chuyển động của cơ hệ. Ta cần nghiên cứu ổn định của nghiệm $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$. Trong cơ học chúng ta quy ước gọi chuyển động cần nghiên cứu ổn định là chuyển động không bị nhiễu. Các chuyển động $\mathbf{y}(t)$ khác mà lúc đầu ở gần $\varphi(t)$ được gọi là chuyển động bị nhiễu. Nếu các chuyển động bị nhiễu lúc đầu $(t = t_0)$ ở gần $\varphi(t)$ mà sau đó vẫn luôn ở gần $\varphi(t)$, thì chuyển động không bị nhiễu $\varphi(t)$ được gọi là ổn định.

* *Ý nghĩa cơ học của khái niệm ổn định tiệm cận Liapunov*

Một trạng thái cơ học $(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t))$ được gọi là ổn định tiệm cận theo nghĩa

Liapunov, nếu do tác dụng của một nhiễu tức thời nào đó làm thay đổi trạng thái $(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t))$ của cơ hệ ở thời điểm $t = t_0$ nào đó, thì sau đó cơ hệ có khả năng tự quay trở lại trạng thái $(\mathbf{q}^*(t), \dot{\mathbf{q}}^*(t))$ đang khảo sát.

c) Biến đổi phương trình trạng thái, đưa chuyển động không bị nhiễu về gốc toạ độ

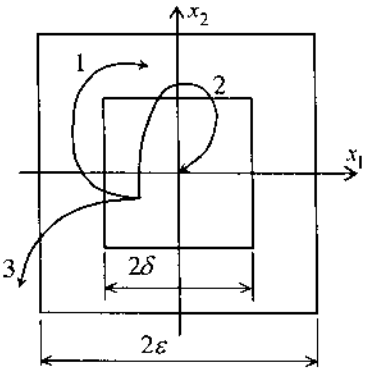
Thực hiện phép đổi biến số

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \varphi(t) \tag{5.13}$$

Thế (5.13) vào phương trình (5.7) ta được

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\varphi} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \varphi) - \mathbf{f}(t, \varphi) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \tag{5.14}$$

Từ (5.14) ta thấy hàm $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ có tính chất $\mathbf{g}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Vậy nếu $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$ là nghiệm của phương trình (5.7), thì $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{0}$ là nghiệm của phương trình (5.14). Sự ổn định của nghiệm $\mathbf{y}^* = \varphi(t)$ của phương trình (5.7) tương đương với sự ổn định của nghiệm $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{0}$ của phương trình (5.14). Hình 8.32 cho ta hình ảnh về khái niệm ổn định của nghiệm $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{0}$ trong không gian hai chiều. Trong đó đường (1) biểu diễn ổn định của nghiệm $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{0}$, đường (2) biểu diễn ổn định tiệm cận của nghiệm $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{0}$, còn đường (3) biểu diễn sự không ổn định của nghiệm $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{0}$.



Hình 8.32

d) Khái niệm ổn định đầu vào – đầu ra (ổn định BIBO)

Xét hệ phương trình trạng thái của một hệ cơ học có điều khiển

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_m]^T \tag{5.15}$$

Trong đó, u_k $(k = 1, \ldots, m)$ là các điều khiển. Các tín hiệu này còn được gọi là các tín hiệu vào.

Định nghĩa 5.4. Một hệ cơ học được gọi là ổn định đầu vào – đầu ra, nếu tín hiệu vào $\mathbf{u}(t)$ bị chặn thì tín hiệu ra $\mathbf{y}(t)$ cũng bị chặn

$$\|\mathbf{u}(t)\| < \infty \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{y}(t)\| < \infty \tag{5.16}$$

Chú ý:

– Tín hiệu vào thường là lực tác dụng hoặc một bộ phận của nó, tín hiệu ra là các toạ độ suy rộng và vận tốc các toạ độ suy rộng của cơ hệ.

– Ổn định đầu vào – đầu ra còn được gọi là ổn định BIBO (Boundet Imput Boundet Output).

– Ổn định đầu vào – đầu ra liên quan trực tiếp đến khái niệm ổn định động lực.

5.3. Khảo sát ổn định của nghiệm phương trình vi phân tuyến tính

a) Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Xét hệ n phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{5.17}$$

Trong công thức (5.17) $\mathbf{A}$ là ma trận vuông cấp n hệ số hằng số. Gọi λ_j là các trị riêng của ma trận $\mathbf{A}$, tức là λ_j là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0 \tag{5.18}$$

Trong đó, $\mathbf{E}$ là ma trận đơn vị. Ta có các định lý sau đây:

Định lý 5.1. Nếu tất cả các trị riêng của ma trận $\mathbf{A}$ đều có phần thực âm thì nghiệm cân bằng $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.17) sẽ ổn định tiệm cận.

Định lý 5.2. Nếu ít nhất có một trị riêng của ma trận $\mathbf{A}$ có phần thực dương thì nghiệm cân bằng $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.17) sẽ không ổn định.

Chú ý: Các trường hợp khác ta chưa xét ở đây.

b) Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ n phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng số

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \tag{5.19}$$

Định nghĩa 5.5. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (5.19) là ổn định (hoặc không ổn định) nếu tất cả các nghiệm $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ của nó là ổn định (hoặc không ổn định) theo nghĩa Liapunov.

Định lý 5.3. Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất ổn định với hàm $\mathbf{g}(t)$ tuỳ ý (khả vi liên tục) là nghiệm tầm thường $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng ổn định.

Chú ý: Theo trên thấy rằng, tất cả các nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính hoặc là cùng ổn định hoặc là cùng không ổn định. Không có khái niệm ổn định của hệ phương trình vi phân phi tuyến, mà chỉ có khái niệm ổn định của nghiệm phương trình vi phân phi tuyến mà thôi.

c) Tiêu chuẩn Hurwitz (1859 – 1919)

Phương trình đặc trưng (5.18) có thể viết dưới dạng đa thức như sau

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \tag{5.20}$$

Từ (5.20) xây dựng ma trận vuông cấp n có dạng như sau

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Ma trận (5.21) được gọi là ma trận Hurwitz.

Các định thức trên đường chéo chính của ma trận này được gọi là các định thức Hurwitz và có dạng như sau

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1}$$

Định lý 5.4. (Tiêu chuẩn Hurwitz). Điều kiện cần và đủ để cho tất cả các nghiệm của phương trình đa thức

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \tag{5.22}$$

đều có phần thực âm là tất cả các định thức con Hurwitz $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ đều dương.

Một số trường hợp đặc biệt:

Khi $n = 2$, phương trình (5.20) có dạng

$$p_2(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad a_0 > 0 \tag{5.23}$$

Ma trận Hurwitz có dạng

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$$

Theo tiêu chuẩn Hurwitz ta có

$$a_1 > 0, \quad a_1a_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0 \tag{5.24}$$

Khi $n = 3$, từ phương trình (5.20) suy ra

$$p_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad a_0 > 0 \tag{5.25}$$

Do đó, ma trận Hurwitz có dạng

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

Theo tiêu chuẩn Hurwitz ta có

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \\ a_3 > 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

5.4. Khảo sát ổn định của nghiệm phương trình vi phân phi tuyến bằng phương pháp xấp xỉ bậc nhất

Năm 1892 Liapunov, nhà toán học người Nga, đã trình bày trong luận án Tiến sĩ của mình hai phương pháp nghiên cứu ổn định của nghiệm $x_s \equiv 0$ (s = 1,..., n) của hệ phương trình vi phân (5.14). Ngày nay hai phương pháp đó có tên gọi như sau:

– Phương pháp nghiên cứu ổn định bằng các phương trình vi phân xấp xỉ bậc nhất,

– Phương pháp nghiên cứu ổn định bằng hàm Liapunov.

a) Các phương trình xấp xỉ bậc nhất

Để đơn giản, xét trường hợp khi vế phải của phương trình (5.14) không phụ thuộc hiển vào thời gian *t*. Các phương trình (5.14) có dạng

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \tag{5.27}$$

Khai triển Taylor các hàm $g_s(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(s = 1, 2, ..., n)$ ta được

$$g_s(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n + r_s(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{5.28}$$

Trong đó, a_{sj} là các hằng số thực, $r_s(x_1, x_2, ..., x_n)$ là các hàm phi tuyến chứa các số hạng bậc ≥ 2, $r_s(0, 0, ..., 0) = 0$.

Định nghĩa 5.6. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số

$$\dot{x}_s = a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, ..., n) \tag{5.29}$$

được gọi là hệ phương trình xấp xỉ bậc nhất của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.27).

Phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính (5.29) có dạng

$$p_n(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.30)$$

b) Định lý Liapunov về ổn định theo xấp xỉ bậc nhất

Định lý 5.5. Nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng (5.30) đều có phần thực âm thì nghiệm $x_s^* \equiv 0, (s = 1, ..., n)$ của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.27) ổn định tiệm cận. Nếu phương trình đặc trưng (5.27) có ít nhất một nghiệm có phần thực dương thì nghiệm $x_s^* \equiv 0, (s = 1, ..., n)$ của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.27) không ổn định.

Định lý 5.6. Nếu phương trình đặc trưng (5.30) không có nghiệm với phần thực dương, nhưng có nghiệm với phần thực bằng không thì nghiệm $x_s^* \equiv 0,\ (s = 1, ..., n)$ của hệ phương trình vi phân phi tuyến (5.27) có thể ổn định mà cũng có thể không ổn định, phụ thuộc vào các số hạng phi tuyến $r_s(x_1, ..., x_n)$.

Chú ý: Trường hợp thứ hai này được gọi là trường hợp tới hạn.

Thí dụ 8.12. Khảo sát ổn định của các vị trí cân bằng của hệ phương trình

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x + y + x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 2y + 3x^5 \end{aligned} \qquad (1)$$

Lời giải. Vị trí cân bằng của hệ phương trình (1) được xác định từ điều kiện

$$\frac{dx}{dt} = 0\,,\ \frac{dy}{dt} = 0$$

Từ (1) suy ra

$$-2x + y + x^3 = 0\,,\ -x - 2y + 3x^5 = 0 \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình đại số phi tuyến (2) nhận được các vị trí cân bằng của hệ

A) $x = 0, \quad y = 0$

B) $x = 1, \quad y = 1$

C) $x = -1, \quad y = -1$

Áp dụng phương pháp xấp xỉ bậc nhất, nghiên cứu sự ổn định của các nghiệm này.

Sự ổn định của vị trí $A(x = 0, y = 0)$. Phương trình xấp xỉ bậc nhất tương ứng có dạng

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2y \tag{3}$$

Phương trình đặc trưng là:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \tag{4}$$

Theo tiêu chuẩn Hurwitz ($a_1 = 4, a_2 = 5$) gốc toạ độ ($x = 0, y = 0$) ổn định tiệm cận.

Sự ổn định của vị trí B ($x = 1, y = 1$). Sử dụng phép biến đổi $u = x - 1$, $v = y - 1$, ta có phương trình xấp xỉ bậc nhất

$$\frac{du}{dt} = -2(u+1) + (v+1) + (u+1)^3 = -2u - 2 + v + 1 + 3u + 1 = u + v + \ldots$$

$$\frac{dv}{dt} = -(u+1) - 2(v+1) + 3(u+1)^5 = -u - 1 - 2v - 2 + 15u + 3 + \ldots = 14u - 2v + \ldots$$

Phương trình đặc trưng là

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0 \tag{5}$$

Theo tiêu chuẩn Hurwitz ($a_1 = 1, a_2 = -16$) vị trí cân bằng B($x = 1, y = 1$) không ổn định.

Sự ổn định của vị trí C ($x = -1, y = -1$). Sử dụng phép biến đổi $u = x + 1$, ta có phương trình xấp xỉ bậc nhất

$$\frac{du}{dt} = u + v + \ldots$$

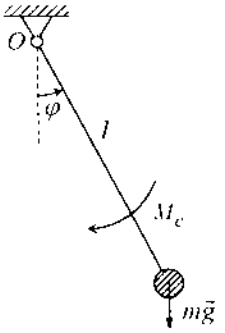
$$\frac{dv}{dt} = 14u - 2v + \ldots$$

Phương trình đặc trưng của hệ cũng có dạng (5). Do đó theo tiêu chuẩn Hurwitz vị trí cân bằng C($x = -1, y = -1$) cũng không ổn định.

Thí dụ 8.13: Khảo sát sự ổn định vị trí cân bằng của con lắc toán học. Cho biết khối lượng của con lắc là m, chiều dài l, ngẫu lực cản $M_c = \beta\dot{\varphi}$ (hình 8.33).

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của con lắc toán học có cản là

$$ml^2\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$



Hình 8.33

Chia hai vế của phương trình (1) cho ml^2 ta có

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{ml^2}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad (2)$$

Đặt $\frac{g}{l} = \omega^2$, $\frac{\beta}{ml^2} = 2\delta$, phương trình vi phân (2) có dạng

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0 \qquad (3)$$

Để đưa phương trình vi phân (3) về phương trình trạng thái, đặt

$$y_1 = \varphi, \quad y_2 = \dot{\varphi} \qquad (4)$$

Phương trình trạng thái của con lắc toán học có dạng

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2\sin y_1 - 2\delta y_2 \end{aligned} \qquad (5)$$

Vị trí cân bằng của con lắc được xác định từ hệ phương trình

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ \omega^2\sin y_1 + 2\delta y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Nếu giới hạn góc $0 \le \varphi \le 2\pi$ có các nghiệm

$$y_1^{(1)} = 0, y_2^{(1)} = 0; \quad y_1^{(2)} = \pi, y_2^{(2)} = 0 \qquad (7)$$

Áp dụng phương pháp xấp xỉ bậc nhất, nghiên cứu sự ổn định của các nghiệm này.

Sự ổn định của nghiệm $y_1^{(1)} = 0, y_2^{(1)} = 0$

Nếu đặt $x_1 = y_1 - 0$, $x_2 = y_2 - 0$ và khai triển hàm $\sin y_1$

$$\sin y_1 = \sin x_1 = x_1 - \frac{x_1^3}{3!} + \cdots \qquad (8)$$

Nhận được các phương trình xấp xỉ bậc nhất

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - 2\delta x_2 \end{aligned} \qquad (9)$$

Phương trình đặc trưng của hệ

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -2\delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0 \qquad (10)$$

Nghiệm của phương trình (10) là

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \tag{11}$$

Do $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ nên vị trí cân bằng $y_1^{(1)} = 0, y_2^{(1)} = 0$ ổn định tiệm cận.

Sự ổn định của nghiệm $y_1^{(2)} = \pi, y_2^{(2)} = 0$

Nếu đặt $x_1 = y_1 - \pi,\ x_2 = y_2 - 0$ và khai triển hàm $\sin y_1$

$$\sin y_1 = \sin(x_1 + \pi) = -x_1 + \frac{x_1^3}{3!} - \cdots$$

Nhận được hệ các phương trình xấp xỉ bậc nhất

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega^2 x_1 - 2\delta x_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Phương trình đặc trưng của hệ (12)

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & -2\delta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\delta\lambda - \omega^2 = 0 \tag{13}$$

Nghiệm của phương trình (13) là

$$\lambda_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 + \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 + \omega^2} \tag{14}$$

Do $\lambda_2 > 0$ nên vị trí cân bằng $y_1^{(2)} = \pi, y_2^{(2)} = 0$ không ổn định.

Kết luận: Vị trí cân bằng thấp của con lắc $(\varphi = 0)$ ổn định tiệm cận, còn vị trí cân bằng cao của nó $(\varphi = \pi)$ không ổn định.

5.5. Khảo sát ổn định của nghiệm phương trình vi phân phi tuyến bằng phương pháp hàm Liapunov

a) Hàm xác định dấu

Định nghĩa 5.7. Hàm $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ được gọi là hàm xác định dương (hoặc xác định âm) nếu nó có các tính chất sau:

1) Hàm $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ liên tục và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục ở trong miền

$$|x_s| \le h, \quad (s = 1, ..., n) \tag{5.31}$$

2) Trong miền $|x_s| \le h$, trừ gốc toạ độ, hàm $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ dương (hoặc âm). Tại gốc toạ độ hàm V triệt tiêu $V(0, 0, ..., 0) = 0$.

Thí dụ 8.14. Hàm $V_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $V_2(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ là các

hàm xác định dương. Hàm $V_3(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ không phải là hàm xác định dương.

Các hàm xác định dương hoặc xác định âm được gọi chung là hàm xác định dấu.

b) Định lý Liapunov về ổn định

Dưới đây khi phát biểu các định lý Liapunov và Tretaev thường dùng không chỉ hàm $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, mà cả đạo hàm toàn phần của nó theo thời gian với giả thiết $x_1, x_2, ..., x_n$ là những hàm thoả mãn hệ phương trình vi phân (5.27)

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \dot{x}_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} g_s(x_1, ..., x_n) \qquad (5.32)$$

Đạo hàm tính theo công thức (5.32) được gọi là đạo hàm dựa theo hệ phương trình vi phân (5.27). Hàm $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ thoả mãn các điều kiện của những định lý ổn định trong đoạn này được gọi là hàm Liapunov.

Định lý 5.7. Nếu trong miền $|x_s| \le h$ tồn tại một hàm xác định dương $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho đạo hàm $\dot{V}$ của nó dựa vào hệ phương trình vi phân (5.27) là hàm không dương $\dot{V} \le 0$ thì nghiệm $x_s^* \equiv 0, (s = 1, ..., n)$ của hệ (5.27) sẽ ổn định.

Thí dụ 8.15. Nghiên cứu sự ổn định của nghiệm cân bằng $x_1 = x_2 = 0$ của hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2^4 \\ \dot{x}_2 = x_2 x_1^4 \end{cases} \qquad (1)$$

Lời giải. Sử dụng hàm Liapunov dạng

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 \qquad (2)$$

Hàm (2) là một hàm xác định dương. Đạo hàm của nó dựa vào hệ phương trình vi phân (1) có dạng

$$\dot{V} = 4x_1^3 \dot{x}_1 + 4x_2^3 \dot{x}_2 = -4x_1^4 x_2^4 + 4x_2^4 x_1^4 = 0$$

Vậy hàm $\dot{V}$ là hàm không dương. Do đó vị trí cân bằng $x_1 = x_2 = 0$ là ổn định.

c) Định lý Liapunov về ổn định tiệm cận

Định lý 5.8. Nếu trong miền $|x_s| \le h$ tồn tại một hàm xác định dương $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho đạo hàm $\dot{V}$ của nó dựa vào hệ phương trình vi phân

(5.20) là hàm xác định âm, thì nghiệm $x_s^* = 0, (s = 1, ..., n)$ của hệ (5.20) sẽ ổn định tiệm cận.

Thí dụ 8.16. Nghiên cứu sự ổn định của nghiệm cân bằng $x_1 = x_2 = 0$ của hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases} \qquad (1)$$

Lời giải. Chọn hàm xác định dương $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Đạo hàm của nó dựa vào hệ phương trình vi phân (1) có dạng

$$\dot{V} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4)$$

$\dot{V}$ là hàm xác định âm. Theo định lý Liapunov (5.8), vị trí cân bằng $x_1 = x_2 = 0$ ổn định tiệm cận.

d) Định lý Tretaev về không ổn định

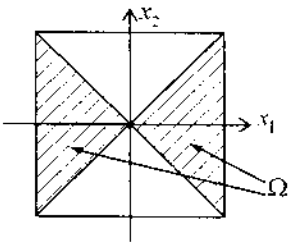
Theo Tretaev, để phát hiện tính không ổn định của nghiệm cân bằng $x_s^* = 0, (s = 1, ..., n)$ của hệ phương trình vi phân (5.27) ta không cần phải khảo sát tất cả các nghiệm ở trong miền $|x_s| \le h$, mà chỉ cần tìm một quỹ đạo vượt ra khỏi miền đó.

Định lý 5.9 Trong miền $|x_s| \le h$ nếu có thể tìm được một hàm $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ sao cho ở lân cận nhỏ tuỳ ý của gốc toạ độ có tồn tại một miền Ω, mà hàm V lấy giá trị dương ở trong miền Ω (Ω được gọi là miền $V > 0$), còn trên biên của miền Ω, hàm V triệt tiêu. Ở tại mọi điểm của miền Ω, đạo hàm $\dot{V}$ dựa vào hệ phương trình (5.27) lấy giá trị dương. Khi đó nghiệm $x_s^* = 0, (s = 1, ..., n)$ của hệ (5.27) sẽ không ổn định.

Thí dụ 8.17. Nghiên cứu sự ổn định của nghiệm $x_1 = x_2 = 0$ của hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + x_1^5 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2^5 \end{cases} \qquad (1)$$

Lời giải. Chọn hàm $V(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$. Khi đó miền Ω (miền $V > 0$) là miền $|x_1| > |x_2|$ (miền gạch chéo ở trong hình 8.34).



Hình 8.34

Đạo hàm $\dot{V}$ dựa vào hệ phương trình vi phân (1) có dạng

$$\dot{V} = 4x_1^3\dot{x}_1 - 4x_2^3\dot{x}_2 = 4x_1^3(x_2^3 + x_1^5) - 4x_2^3(x_1^3 + x_2^5) = 4(x_1^8 - x_2^8)$$

Trong miền Ω, đạo hàm $\dot{V} > 0$. Theo định lý Tretaev, nghiệm $x_1^* = x_2^* = 0$ của hệ phương trình vi phân (1) sẽ không ổn định.

5.6. Sự ổn định của vị trí cân bằng của các cơ hệ bảo toàn

a) Xác định vị trí cân bằng của cơ hệ

Xét cơ hệ chịu các liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng có f bậc tự do. Vị trí của cơ hệ được xác định bởi f toạ độ suy rộng $q_1, q_2, ..., q_f$. Khi ta sử dụng các phương trình Lagrange loại 2, các phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, ..., f) \tag{5.33}$$

Cơ hệ bảo toàn là cơ hệ chỉ chịu tác dụng của các lực có thế. Khi đó phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ (5.33) có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, ..., f) \tag{5.34}$$

Trong đó $\Pi = \Pi(q_1, ..., q_f)$ là thế năng của cơ hệ bảo toàn. Trong chương 4 ta đã chứng minh rằng điều kiện cân bằng của cơ hệ hôlônôm f bậc tự do là

$$Q_k = 0 \quad (k = 1, 2, ..., f) \tag{5.35}$$

Từ đó suy ra các phương trình xác định vị trí cân bằng của cơ hệ bảo toàn là

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., f) \tag{5.36}$$

b) Sự ổn định của vị trí cân bằng của cơ hệ

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán nghiên cứu sự ổn định của vị trí cân bằng của hệ bảo toàn. Vị trí này được xác định từ hệ phương trình (5.36). Không giảm tổng quát, ta có thể giả thiết rằng tại vị trí cân bằng các toạ độ suy rộng và các vận tốc suy rộng đều triệt tiêu

$$q_k^* = 0, \quad \dot{q}_k^* = 0 \quad (k = 1, 2, ..., f) \tag{5.37}$$

(Nếu $q_k^* \neq 0$, thực hiện phép đổi biến $y_k^* = q_k - q_k^*$ ta sẽ được $y_k^* = 0$ còn $\dot{q}_k^* = 0$ là theo định nghĩa vị trí cân bằng). Theo giả thiết nêu trên, gốc toạ độ là vị trí cân bằng. Ngoài ra, do thế năng cơ hệ được xác định sai khác một hằng số cộng, nên ta có thể giả thiết thế năng cơ hệ bằng không tại vị trí cân bằng

$$\Pi(0, ..., 0) = 0 \tag{5.38}$$

Lấy giá trị của toạ độ suy rộng và vận tốc suy rộng của cơ hệ tại vị trí cân

bằng làm chuyển động không bị nhiễu, khi đó các phương trình vi phân của chuyển động bị nhiễu chính là hệ phương trình (5.34).

* *Định lý Lagrange–Dirichlet về ổn định của vị trí cân bằng*

Định lý 5.10. Nếu tại vị trí cân bằng cô lập của cơ hệ bảo toàn chịu các liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng, thế năng Π của cơ hệ có cực tiểu tương đối thực sự, thì vị trí cân bằng của cơ hệ là ổn định.

Chứng minh. Chọn cơ năng của cơ hệ làm hàm Liapunov

$$V = T + \Pi \tag{1}$$

Do động năng T của cơ hệ là hàm xác định dương đối với các vận tốc suy rộng $\dot{q}_k$ $(k = 1, ..., f)$, còn thế năng Π của cơ hệ có cực tiểu tương đối thực sự tại vị trí cân bằng $q_k^* = 0$ nên Π là hàm xác định dương đối với các toạ độ suy rộng q_k $(k = 1, ..., f)$. Vậy hàm Liapunov $V = T + \Pi$ là hàm xác định dương đối với các biến $q_k, \dot{q}_k$ $(k = 1, ..., f)$.

Mặt khác do cơ hệ là bảo toàn, nên theo định lý bảo toàn cơ năng ta có

$$V = T + \Pi = \text{const} \tag{2}$$

Do đó đạo hàm $\dot{V}$ của hàm V dựa vào hệ phương trình vi phân của chuyển động bị nhiễu (5.34) bằng không. Theo định lý Liapunov về ổn định chuyển động, vị trí cân bằng cô lập của hệ bảo toàn sẽ ổn định.

* *Định lý Tretaev về sự không ổn định của vị trí cân bằng*

Định lý 5.11. Nếu tại vị trí cân bằng cô lập của cơ hệ bảo toàn chịu các liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng, thế năng Π của cơ hệ là hàm giải tích của các toạ độ suy rộng $q_1, ..., q_f$ và không có cực tiểu tương đối thực sự, thì vị trí cân bằng của cơ hệ là không ổn định.

Việc chứng minh định lý này có thể xem trong các sách chuyên khảo về ổn định chuyển động.

c) Dấu hiệu cực tiểu của thế năng tại vị trí cân bằng

* *Trường hợp cơ hệ một bậc tự do* $(f = 1)$. Khi đó khai triển biểu thức thế năng $\Pi(q)$ ở lân cận vị trí cân bằng $q = q^*$ và đặt $\Delta q = q - q^*$, ta có

$$\Pi(q) = \Pi(q^*) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=q^*} \Delta q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2}\right)_{q=q^*} (\Delta q)^2 + \cdots \tag{3}$$

Do tại vị trí cân bằng

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)_{q=q^*} = 0 \tag{4}$$

nên từ (3) suy ra

$$\Pi(q)-\Pi(q^*)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_{q=q^*}(\Delta q)^2+\cdots \qquad (5)$$

Từ (5) suy ra $\Pi(q^*)$ đạt cực tiểu khi

$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_{q=q^*}>0 \Rightarrow$ theo định lý Lagrange – Dirichlet vị trí $q=q^*$ ổn định.

$\Pi(q^*)$ đạt cực đại khi

$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_{q=q^*}<0 \Rightarrow$ theo định lý Tretaev vị trí $q=q^*$ không ổn định.

* *Trường hợp cơ hệ nhiều bậc tự do* ($f\geq 2$). Để đơn giản ta chọn $q_k^*=0\ (k=1,...,f)$. Khai triển biểu thức thế năng thành chuỗi Taylor ở lân cận gốc toạ độ $q_k=0\ (k=1,...,f)$ ta được

$$\Pi(q_1,...,q_f)=\Pi(0,...,0)+\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0 q_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 q_iq_j+\cdots \qquad (6)$$

Trong đó các số hạng không viết ra là các số hạng phi tuyến bậc lớn hơn hai. Theo (5.36) và (5.38) ta suy ra

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}c_{ij}q_iq_j+\cdots$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$c_{ji}=c_{ij}=\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i\partial q_j}\right)_0 \qquad (5.39)$$

Tại vị trí cân bằng $q_k^*=0\ (k=1,...,f)$ nếu thế năng Π đạt cực tiểu thì $\Pi(q_1,...,q_f)$ dương. Từ đó suy ra dạng toàn phương

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{f}c_{ij}q_iq_j \qquad (5.40)$$

phải là xác định dương.

Để nhận biết dạng toàn phương (5.40) có phải là dạng toàn phương xác định dương hay không, xét tiêu chuẩn Sylvester như sau.

* *Tiêu chuẩn Sylvester*

Điều kiện cần và đủ để cho dạng toàn phương (5.40) xác định dương là các tử chức chéo chính của định thức

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1f} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2f} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{f1} & c_{f2} & \cdots & c_{ff} \end{vmatrix}$$

lập nên từ các hệ số c_{ij} của dạng toàn phương (5.40), phải dương. Cụ thể ta có

$$c_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1f} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2f} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{f1} & c_{f2} & \cdots & c_{ff} \end{vmatrix} > 0 \qquad (5.41)$$

Việc chứng minh tiêu chuẩn này có thể tìm trong các sách về đại số.

d) Thí dụ áp dụng

Thí dụ 8.18. Một thanh không trọng lượng chịu tác dụng của một lực $F = \text{const}$ thẳng đứng và được giữ bằng hai lò xo ở hai bên như hình vẽ. Độ cứng của lò xo là c. Hãy tìm điều kiện ổn định của các vị trí cân bằng của thanh.

Lời giải. Vị trí của thanh được xác định bởi góc φ. Thế năng của cơ hệ bao gồm thế năng của hai lò xo và thế năng của lực F

$$\Pi(\varphi) = Fl\cos\varphi + 2\,\frac{1}{2}c(a\,\text{tg}\,\varphi)^2 \qquad (1)$$

Các vị trí cân bằng của cơ hệ được xác định từ điều kiện

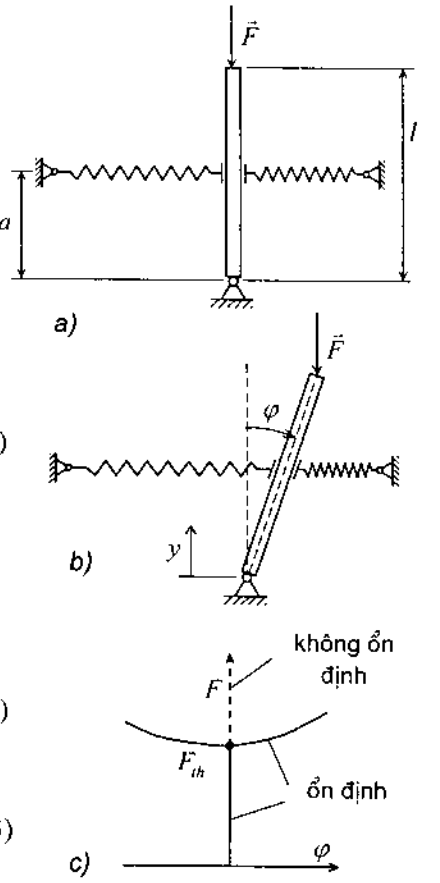
$$\Pi' = \frac{d\Pi}{d\varphi} = -Fl\sin\varphi + 2\,ca^2\frac{\text{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varphi\left(-Fl + 2\,ca^2\frac{1}{\cos^3\varphi}\right) = 0 \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra các vị trí cân bằng

$$\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 0 \qquad (3)$$

$$-Fl + 2\,ca^2\frac{1}{\cos^3\varphi} = 0$$



Hình 8.35

$$\Rightarrow \quad \cos^3\varphi = \frac{2\,ca^2}{Fl} \Rightarrow \quad \varphi_2 = \arccos\sqrt[3]{\frac{2\,ca^2}{Fl}} \qquad (4)$$

Để nghiên cứu sự ổn định của các vị trí cân bằng ta đạo hàm hai lần thế năng

$$\Pi'' = \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = -Fl\cos\varphi + 2\,ca^2\,\frac{\cos^2\varphi - \dfrac{1}{\cos^2\varphi} + \mathrm{tg}\,\varphi 2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi} \qquad (5)$$

$$= -Fl\cos\varphi + 2\,ca^2\,\frac{1+2\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} = -Fl\cos\varphi + 2\,ca^2\,\frac{3-2\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi}$$

Tại vị trí cân bằng thứ nhất $\varphi_1 = 0$, ta có

$$\Pi''(\varphi_1) = -Fl + 2\,ca^2 = 2\,ca^2\left(1 - \frac{Fl}{2\,ca^2}\right)$$

Từ đó suy ra

$$\Pi''(\varphi_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Fl}{2\,ca^2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{vị trí } \varphi_1 = 0 \text{ ổn định,}$$

$$\Pi''(\varphi_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Fl}{2\,ca^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{vị trí } \varphi_1 = 0 \text{ không ổn định.}$$

Trường hợp đặc biệt

$$\Pi''(\varphi_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Fl}{2\,ca^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad F = 2\frac{ca^2}{l} = F_{th} \text{ (tải trọng tới hạn)} \qquad (6)$$

Khi $F < F_{th}$ thì vị trí cân bằng $\varphi_1 = 0$ là vị trí cân bằng ổn định. Khi $F > F_{th}$ thì vị trí cân bằng $\varphi_1 = 0$ là không ổn định.

Khi $F = F_{th}$, đạo hàm bậc hai Π'' triệt tiêu tại $\varphi_1 = 0$. Do đó để nghiên cứu sự ổn định của vị trí cân bằng này ta phải xét các đạo hàm bậc cao hơn hai của thế năng. Bài toán này tương đối phức tạp nên không trình bày ở đây.

Tại vị trí cân bằng thứ hai φ_2 $(2\,ca^2 = Fl\cos^3\varphi_2)$, ta có

$$\Pi''(\varphi_2) = -Fl\cos\varphi_2\left(1 - \cos^2\varphi_2\,\frac{3-2\cos^2\varphi_2}{\cos^4\varphi_2}\right)$$

$$= -Fl\cos\varphi_2\left(1 - \frac{3}{\cos^2\varphi_2} + 2\right) = 3Fl\cos\varphi_2\left(\frac{1}{\cos^2\varphi_2} - 1\right)$$

Khi $0 < \varphi_2 < \pi/2$ thì $\cos\varphi_2 < 1$. Từ đó suy ra $\Pi''(\varphi_2) > 0$. Vị trí cân bằng $\varphi^* = \varphi_2$ là ổn định. Chú ý rằng $\cos\varphi$ là hàm chẵn, $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$, nên bên cạnh nghiệm φ_2 còn có nghiệm $\varphi_2^* = -\varphi_2$).

Từ biểu thức (4) suy ra

$$\cos^2\varphi_2 = \frac{2ca^2}{Fl} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Fl}{2\,ca^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad F > \frac{2ca^2}{l} = F_{th}$$

Vậy khi $F > F_{th}$ vị trí cân bằng $\varphi^* = \varphi_2$ ổn định, còn vị trí cân bằng $\varphi^* = \varphi_1$ không ổn định.

Khi $\varphi_2 = 0$, $\Pi''(\varphi_2) = 0 \Rightarrow F = F_{th}$. Việc nghiên cứu ổn định của $\varphi_2 = 0$ phải sử dụng các đạo hàm bậc cao hơn hai của hàm Π.

Trên hình 8.35 ta thấy: Khi $F < F_{th}$ chỉ có một nghiệm $\varphi_1 = 0$ ổn định. Khi $F > F_{th}$, vị trí cân bằng $\varphi_1 = 0$ không ổn định, xuất hiện hai vị trí cân bằng mới $\pm\varphi_2$ ổn định. Như thế ta có ba vị trí cân bằng.

Khi $F = F_{th}$ xuất hiện sự rẽ nhánh của nghiệm. Người ta gọi giá trị này của lực F là "điểm rẽ nhánh".

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1) Tài liệu chính

[1] F.P. Beer and E.R. Johnston: *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics*. McGraw Hill, Boston 1997.

[2] R.C. Hibbele: *Engineering Mechanics – Statics (10. Edition)*. Prentice Hall, Upper Saddle River , New Jersey 2004.

[3] R.C. Hibbele: *Engineering Mechanics –Dynamics (10.Edition)*. Prentice Hall, Upper Saddle River , New Jersey 2004.

[4] J.L. Meriam and L.G. Kraige: *Engineering Mechanics, Volum 1 Statics (5. Edition)*, John Wiley and Sons, New York 2003.

[5] J.L. Meriam and L.G. Kraige: *Engineering Mechanics, Volum 2 Dynamics (5. Edition)*. John Wiley and Sons, New York 2003.

[6] A.Bedford, W. Fowler: *Engineering Mechanics – Dynamics (4. Edition)*. Prentice Hall, Upper Saddle River , New Jersey 2005.

[7] T.R. Kane and D. A. Levinson: *Dynamics: Theory and Applications*. McGraw – Hill, New York 1985.

[8] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, J. Schröder: *Technische Mechanik, Band 1: Statik*. (8. Auflage). Springer – Verlag, Berlin 2004.

[9] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, J. Schröder: *Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik* (8. Auflage). Springer –Verlag, Berlin 2005.

[10] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, J. Schröder: *Technische Mechanik, Band 3: Kinetik* (8. Auflage). Springer –Verlag, Berlin 2004.

[11] W. Schiehlen, P. Eberhard: *Technische Dynamik (2. Auflage)*. B.G. Teubner, Stuttgart 2004.

[12] Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Trọng Chuyền, Ngô Văn Thảo, Nguyễn Thế Tiến: *Cơ học lý thuyết*. NXB Đại học và THCN, Hà nội 1969.

[13] Nguyễn Văn Đạo: *Cơ học giải tích*. NXB Đại học quốc gia, Hà nội 2002.

[14] Nguyễn Văn Khang, Nguyễn Phong Điền, Nguyễn Quang Hoàng, Nguyễn Nhật Lệ, Nguyễn Minh Phương: *Bài tập Cơ học kỹ thuật*. NXB Giáo dục, Hà Nội 2009.

[15] Nguyễn Văn Khang: *Động lực học hệ nhiều vật*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2007.

[16] Nguyễn Văn Khang: *Dao động kỹ thuật (in lần 4)*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2005.

[17] Đỗ Sanh: *Cơ học kỹ thuật, Tập 1 và Tập 2*. NXB Giáo dục, Hà nội 2008.

[18] X.M. Targ: *Giáo trình giản yếu Cơ học lý thuyết* (Phạm Huyền dịch). NXB Đại học và THCN Hà nội và NXB "Mir" Matxcơva 1979.

[19] N.V. Butjenin, JA.L.Lunz. D.R. Merkin: *Giáo trình Cơ học lý thuyết, Tập 1* (Tiếng Nga). NXB Khoa học, Moskva 1979.

[20] N.V. Butjenin, JA.L.Lunz. D.R. Merkin: *Giáo trình Cơ học lý thuyết, Tập 2* (Tiếng Nga). NXB Khoa học, Moskva 1979.

2) Tài liệu đọc thêm

[21] Đặng Đình Áng, Trịnh Anh Ngọc, Ngô Thành Phong: *Nhập môn Cơ học*. NXB Đại học quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2003.

[22] Đào Huy Bích, Phạm Huyễn: *Cơ học lý thuyết*. NXB Đại học quốc gia, Hà nội 2002.

[23] Trần Hữu Duẩn: *Cơ học lý thuyết*. NXB Đại học và THCN, Hà nội 1970.

[24] Trần Hữu Duẩn, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Thế Tiến: *Bài tập Cơ học lý thuyết*. NXB Đại học và THCN, Hà nội 1970.

[25] Nguyễn Văn Đạo: *Bài tập Cơ học giải tích*. NXB Đại học quốc gia, Hà nội 2002.

[26] Khổng Doãn Điền, Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Chiều: *Giáo trình Cơ học lý thuyết*. NXB Xây dựng, Hà Nội 2008.

[27] B. Heimann, W. Gerth, K. Popp: *Cơ điện tử* (Nguyễn Văn Khang, Nguyễn Phong Điền, Nguyễn Quang Hoàng, Hoàng Minh Sơn dịch). NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2008.

[28] Nguyễn Văn Khang, Thái Mạnh Cầu, Nguyễn Phong Điền, Vũ Văn Khiêm, Nguyễn Nhật Lệ: *Bài tập Dao động kỹ thuật (in lần thứ 3)*. NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà nội 2006.

[29] Nguyễn Nhật Lệ: *Bài tập Cơ học kỹ thuật*. NXB Bách khoa, Hà nội 2009.

[30] Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Văn Khang: *Cơ học, Tập 1*. NXB Giáo dục, Hà nội 1996.

[31] Đỗ Sanh, Nguyễn Nhật Lệ: *Bài tập Cơ học kỹ thuật, Tập 1*. NXB Giáo dục, Hà nội 2008.

[32] Đỗ Sanh: *Bài tập Cơ học kỹ thuật, Tập 2*. NXB Giáo dục, Hà nội 2008.

[33] Bùi Tường: *Cơ học giải tích*. NXB Đại học và THCN, Hà nội 1971

[34] I. Newton: *Philosophia naturalis principia mathematica*. London 1687.

[35] L. Euler: *Novi commentarii âcdemiae scientarum petropolitanae*. Petersburg 1775.

[36] M. D.Ardema: *Newton–Euler Dynamics*. Springer–Verlag, New York 2005.

[37] J. H. Ginsberg, J. Genin: *Dynamics (2. Edition)*. John Wiley and Sons, New York 1984.

[38] J. H. Ginsberg: *Advanced Engineering Dynamics (2. Edition)*. Cambrige University Press, 1998.

[39] D.T. Greenwood: *Prinziples of Dynamics (2. Edition)*. Addision – Wesley, Reading MA 1980.

[40] E.J. Haug: *Intermediate Dynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1992

[41] K.L. Johnson: *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.

[42] H. Josephs, R. L. Hoston: *Dynamics of Mechanical Systems*. CRC Press, Boca Raton, London, New York 2002.

[43] T.R. Kane, P.W. Likins, and D.A. Levinson: *Spacecraft Dynamics*. McGraw – Hill, New York 1983.

[44] L.Meriovith: *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw–Hill, New York 1970.

[45] F.C. Moon: *Applied Dynamics*. John Wiley and Sons, New York 1998.

[46] P.E. Nikravesh: *Computer Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1988.

[47] A.A. Shabana: *Computational Dynamics (2. Edition)*. John Wiley and Sons, New York 2001.

[48] I.H. Shames: *Engineering Mechanics: Statics and Dynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1980.

[49] S. Singh: *Engineering Mechanics*. Khana Publishers, Delhi 2000.

[50] W. Stadler: *Analytical Robotics and Mechatronics*. McGraw – Hill, New York 1995.

[51] W.J. Stronge: *Impact Mechanics*. Cambridge University Press, 2000.

[52] B. Tabarrok, F.P.J. Rimrott: *Variational Methods and Complementary Formulations in Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994.

[53] S. Timoschenko, D. H. Young: *Engineering Mechanics (4. Edition)*. McGraw--Hill, New York 1956.

[54] H. Balke: *Einführung in die Technische Mechanik – Statik*. Springer–Verlag, Berlin 2005.

[55] H. Balke: *Einführung in die Technische Mechanik – Dynamik*. Springer–Verlag, Berlin 2006.

[56] E. Brommundt, G. Sachs: *Technische Mechanik*. Springer – Verlag, Berlin 1998.

[57] P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 1– Statik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Mail, 1993.

[58] P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 2–Festigkeitslehre*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Mail, 1995.

[59] P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 3–Dynamik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Mail, 1990.

[60] K. Magnus und H.H Müler: *Grundlagen der Technischen Mechanik (7. Auflage)*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden 2005.

[61] H.H.Müller, K. Magnus: *Übungen zur Technischen Mechanik*. B.G. Teubner Stuttgart 1988.

[62] H. Göldner, D.Witt: *Lehr–und Übungsbuch Technische Mechanik, Band 1 Statik und Festigkeitslehre*. Fachbuchverlag, Leipzig – Köln 1993

[63] H.–J.Hardtke, B.Heimann, H. Sollmann: *Lehr–und Übungsbuch Technische Mechanik Band 2, Kinematik/ Kinetik – Systemdynamik – Mechatronik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München 1997.

[64] G. Holzman, H. Meyer, G. Schumpich: *Technische Mechanik, Teil 1: Statik (11. Auflage)*. Teuber, Wiesbaden 2008.

[65] G. Holzman, H. Meyer, G. Schumpich: *Technische Mechanik, Teil 2: Kinematik und Kinetik (9. Auflage)*. Teuber, Wiesbaden 2006.

[66] H.Neuber: *Lösungen zur Aufgabensammlung Mestscherski*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.

[67] U. Fischer, W. Stephan: *Prinzipien und Methoden der Dynamik*. Fachbuchverlag, Leipzig 1972.

[68] G. Hamel: *Theoretische Mechanik*. Springer – Verlag, Berlin 1949.

[69] M. Hiller: *Mechanische Systeme*. Springer – Verlag, Berlin 1983.

[70] F. Pfeiffer: *Einführung in die Dynamik*. B.G. Teubner Stuttgart 1992.

[71] K. Magnus: *Kreisel – Theorie und Anwendungen*. Springer – Verlag, Berlin 1971.

[72] H. Parkus: *Mechanik der festen Körper*. Springer –Verlag, Wien 1988.

[73] F. Ziegler: *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*. Springer –Verlag, Wien 1985.

[74] Y. Bamberger: *Mecanique de l'ingenieur, Tom 1: Systemes de corps rigides*. Hermann, Paris 1981.

[75] Y. Bamberger: *Mecanique de l'ingenieur, Tom 2: Milieux deformables.* Hermann, Paris 1981.

[76] Chr. Grossetete, P.Olive: *Mecanique des systemes et du solide.* Ellipses, Paris 1999.

[77] I.V. Mestscherskii: *Tuyển tập bài tập Cơ học lý thuyết (Tiếng Nga).* NXB Khoa học, Moskva 1972.

[78] K.S. Kolesnikov: *Tuyển tập bài tập Cơ học lý thuyết (Tiếng Nga).* NXB Khoa học, Moskva 1989.

[79] V.F. Shuravlev: *Cơ sở Cơ học lý thuyết (Tiếng Nga).* NXB Khoa học, Moskva 1997.

[80] G.A. Bugaenko, V.V. Malanin, V.I. Jakovlev: *Cơ sở Cơ học cổ điển (Tiếng Nga).* NXB Cao đẳng, Moskva 1999.

[81] N.N. Poljachov, S.A. Segshda, M.P. Juschkov: *Cơ học lý thuyết (Tiếng Nga).* NXB Cao đẳng, Moskva 2000.

[82] A.I. Arkuscha: *Cơ học kỹ thuật (Tiếng Nga).* NXB Cao đẳng, Moskva 2000.

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập nội dung và sửa bản in:

NGUYỄN TRỌNG HÙNG

Trình bày bìa:

ĐINH XUÂN DŨNG

Chế bản:

TRỊNH THỤC KIM DUNG

CƠ HỌC KỸ THUẬT

Mã số: 7B726Y9 – DAI

In 1.000 bản (QĐ : 36), khổ 16 x 24 cm. In tại Công ty CP In Thái Nguyên.

Địa chỉ : Phường Quang Trung, TP. Thái Nguyên.

Số ĐKKH xuất bản : 161 – 2009/CXB/3 – 208/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2009.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN, HÀ NỘI
Website: www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO ĐẠI HỌC
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

1. Nguyên lý máy - Tập 1	*Đinh Gia Tường*
2. Cơ học ứng dụng	*Đỗ Sanh*
3. Sổ tay Dung sai lắp ghép	*Ninh Đức Tốn*
4. Nguyên lý máy - Tập 2	*Đinh Gia Tường*
5. Thiết kế chi tiết máy	*Nguyễn Trọng Hiệp*
6. Kỹ thuật đo - Tập 1	*Ninh Đức Tốn* *Nguyễn Trọng Hùng*
7. Bài tập Kỹ thuật đo	*Ninh Đức Tốn* *Nguyễn Trọng Hùng* *Nguyễn Thị Cẩm Tú*

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;

Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh ; Số 62 Nguyễn Chí Thanh ;

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng - Quận 3 ; 240 Trần Bình Trọng - Quận 5.

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, Đường 30/4 ;

Website : www.nxbgd.com.vn

8 934980 984123

Giá: 53.000 đ