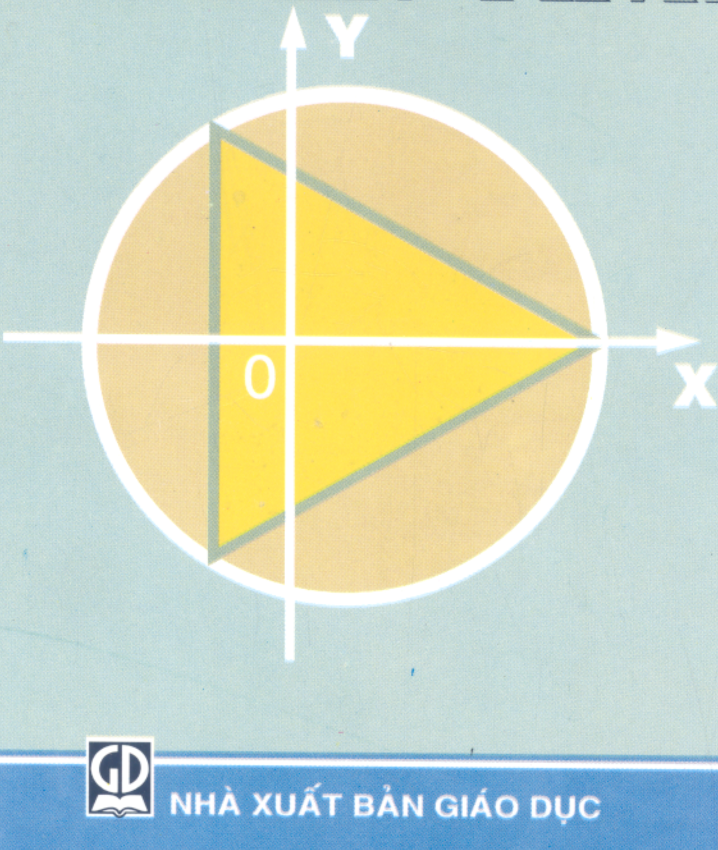
HOÀNG XUÂN SÍNH – TRẦN PHƯƠNG DUNG

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HOÀNG XUÂN SÍNH - TRẦN PHƯƠNG DUNG

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(Tái bản lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

04 – 2009/CXB/316 – 2117/GD Mã số : 7K370h9 – DAI

LỜI MỞ ĐẦU

Học toán đối với học sinh và sinh viên luôn luôn có hai phần : phần lý thuyết và phần bài tập. Phần bài tập có nhiều mục đích : 1) giúp ta nắm vững hơn các khái niệm và định lý đưa ra trong lý thuyết ; 2) tìm đến những kết quả sâu hơn mà lý thuyết không đủ thì giờ đề cập tới ; 3) qua việc làm nhiều bài tập, ta nắm được lý thuyết nhuần nhuyễn hơn, để từ đó có nhiều khả năng ứng dụng vào nhiều lãnh vực khác cũng trong toán hay trong những môn khoa học khác... Điều mà sinh viên cần chú ý là phải học lý thuyết cho kỹ trước đã, rồi mới làm bài tập ; thói quen không học hay học qua loa lý thuyết, nhưng đã cắm đầu vào làm bài tập ở trung học, ảnh hưởng không tốt cho việc học toán của sinh viên ở bậc đại học.

Cuốn bài tập này giúp sinh viên làm các bài tập dựa trên cuốn "Toán cao cấp (A_1), Phần đại số tuyến tính", giáo trình dành cho các trường Cao đẳng sư phạm của Nguyễn Duy Thuận. Trong mỗi chương (theo đúng cuốn sách trên), chúng tôi trước hết tóm tắt lý thuyết của chương đó, sau đó giải tuần tự các bài tập trong chương nhưng bỏ đi những bài tương tự, và bổ sung thêm một số bài tập để đáp ứng yêu cầu đề ra ở trên. Cuốn sách này giúp các sinh viên học môn Đại số tuyến tính ở bậc cao đẳng, đại học, và cũng giúp cho sinh viên chuẩn bị thi vào bậc sau đại học, chứ không thuần túy cho sinh viên học Cao đẳng Sư phạm.

Chúng tôi xin nhắc lại điều đã nói ở trên : muốn làm bài tập tốt, trước hết sinh viên phải nắm kỹ lý thuyết đã, và cuốn bài tập chỉ giúp sinh viên khởi động thôi, khi bộ não đã chạy tốt rồi thì hãy gấp sách lại và bắt trí não làm việc độc lập. Chúc các bạn làm bài tốt.

Hà Nội, ngày 14 tháng 8 năm 1999

Các tác giả :

HOÀNG XUÂN SÍNH VÀ TRẦN PHƯƠNG DUNG

Chương 0

SƠ LƯỢC VỀ KHÁI NIỆM NHÓM, VÀNH, TRƯỜNG

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Có thể nói từ tiểu học đến trung học, người ta làm toán chủ yếu trên những số. Có những tính chất đặc biệt quan trọng như tính giao hoán, tính kết hợp của phép cộng và phép nhân những số đã được dạy từ những năm đầu của tiểu học, vì các tính chất đó làm cho việc tính toán đơn giản hơn nhiều. Sau này khi làm toán ở bậc đại học, người ta làm toán trên những đối tượng không phải là số nữa, nhưng người ta lại gặp lại những tính chất đã thấy trong phép cộng hay phép nhân những số, và chính do các tính chất gặp lại đó người ta đã thấy rằng điều gì mà phép cộng hay phép nhân những số có thì cũng xảy ra đối với những đối tượng đang xét. Từ đó mới hình thành khái niệm *cấu trúc đại số* trong toán của thế kỷ 20. Chẳng hạn, ta xét một tập hợp trên đó có một phép toán, mà ta đặt tên là "phép cộng" tuy tập hợp đó chẳng có liên quan gì đến các con số cả ; nếu phép cộng đang xét có tính chất kết hợp thì ta bảo tập hợp cùng với phép cộng đó lập thành một cấu trúc đại số mà dưới đây ta sẽ thấy nó được gọi là nửa nhóm, nếu nó có thêm tính giao hoán thì ta bảo ta có một nửa nhóm giao hoán.

Để cho tiện việc ký hiệu, các phép toán trên một tập hợp được ký hiệu bằng dấu + (lúc đó gọi là phép cộng) hay bằng dấu × (lúc đó gọi là phép nhân) thường được thay bằng dấu ., mà sau đó người ta bỏ đi ; chẳng hạn a × b được viết là a . b và cuối cùng là ab, như thế nhanh gọn.

1.1. Định nghĩa nửa nhóm

Giả sử X là một tập hợp có một phép toán ký hiệu nhân.

X cùng với phép nhân là một *nửa nhóm* nếu phép nhân có tính kết hợp, nghĩa là $x(yz) = (xy)z$, với mọi $x, y, z \in X$.

Nếu phép nhân còn có tính chất giao hoán, nghĩa là $xy = yx$, với mọi $x, y \in X$, thì X là một *nửa nhóm giao hoán*.

Nửa nhóm X gọi là một *vị nhóm* nếu có một phần tử $e \in X$ sao cho $ex = xe = x$, với mọi $x \in X$. Ta gọi e là *phần tử đơn vị* của vị nhóm. Nếu phép toán có thêm tính chất giao hoán, ta có một *vị nhóm giao hoán*.

1.2. Định nghĩa nhóm

Một vị nhóm X gọi là một *nhóm* nếu với mọi phần tử $x \in X$, tồn tại một phần tử $x' \in X$ sao cho $x'x = xx' = e$ (người ta chứng minh được rằng x' là duy nhất và ký hiệu nó bằng x^{-1}, gọi là *nghịch đảo* của x). Nhóm X gọi là *aben* hay *giao hoán* nếu phép toán có thêm tính giao hoán.

Nếu phép toán của nhóm X được ký hiệu bằng dấu cộng, thì phần tử e không gọi là phần tử đơn vị nữa, mà gọi là *phần tử không* và ký hiệu là 0 (tương tự như ký hiệu của số 0) ; và phần tử nghịch đảo của một phần tử x sẽ gọi là *đối của x* và ký hiệu là $-x$.

1.3. Định nghĩa vành

Giả sử X là một tập hợp có hai phép toán cộng và nhân.

X cùng với hai phép toán đó là một *vành* nếu :

1) X cùng với phép cộng là một nhóm giao hoán ;

2) X cùng với phép nhân là một nửa nhóm ;

3) *phép nhân phân phối đối với phép cộng*, nghĩa là :

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(y + z)x = yx + zx$$

với mọi $x, y, z \in X$.

Nếu phép nhân có thêm tính chất giao hoán thì ta bảo X là một *vành giao hoán*. Nếu phép nhân có phần tử đơn vị thì ta bảo X là một *vành có* *đơn vị*. Nếu phép nhân vừa giao hoán vừa có đơn vị thì ta bảo X là một *vành giao hoán có đơn vị*.

1.4. Định nghĩa trường

Giả sử X là một tập hợp có hai phép toán cộng và nhân.

X cùng với hai phép toán đó là một *trường* nếu :

1) X là một vành giao hoán có đơn vị ;

2) mọi $x \neq 0$ thuộc X có nghịch đảo, nghĩa là nếu ta đặt $X^* = X - \{0\}$ thì X^* là một nhóm giao hoán đối với phép nhân.

§2. BÀI TẬP

1. Xét tập hợp các số phức

$$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$$

với phép cộng

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i,$$

và phép nhân

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Bây giờ ta hãy chứng minh **C** cùng với hai phép toán trên là một trường. Trước hết ta nhận xét các số thực a là những số phức có phần ảo bằng 0 : $a = a + 0i$, và để cộng hay nhân hai số phức với nhau ta cứ làm bình thường như đối với các biểu thức đại số chứa i, nhưng chú ý là $i^2 = -1$, và trong kết quả cuối cùng nhớ nhóm phần thực với nhau cũng như nhóm phần ảo với nhau. Để chứng minh loại bài tập kiểu như thế này, ta hãy viết ra trên nháp định nghĩa một trường và cố gắng viết không cần nhìn vào sách. Sau đó ta lần lượt chứng minh các tính chất của trường được thỏa mãn đối với đối tượng đang xét. Ta có với các số phức :

1) $(a_1 + b_1i) + ((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) =$

$= (a_1 + b_1i) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) = (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))i =$

$= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + a_3 + b_3i =$

$= ((a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)) + a_3 + b_3i$. Phép cộng kết hợp.

2) $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i =$

$= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i = (a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)$. Phép cộng giao hoán.

3) $0 + (a + bi) = (0 + a) + bi = a + bi$. Phần tử không của phép cộng là số 0.

4) Với mọi số phức $a + bi$, số phức $- a - bi$ là đối của nó vì

$$(a + bi) + (-a - bi) = a - a + (b - b)i = 0 + 0i = 0.$$

5) $(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i)(a_3 + b_3i)) =$

$= (a_1 + b_1i)(a_2a_3 - b_2b_3 + (a_2b_3 + b_2a_3)i) =$

$= a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3) + (a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3))i =$

$= (a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2)b_3 + ((a_1b_2 + b_1a_2)a_3 + (a_1a_2 - b_1b_2)b_3)i =$

$= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i)(a_3 + b_3i) =$

$= ((a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i))(a_3 + b_3i)$. Phép nhân kết hợp.

6) $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i =$

$= a_2a_1 - b_2b_1 + (a_2b_1 + b_2a_1)i = (a_2 + b_2i)(a_1 + b_1i)$. Phép nhân giao hoán.

7) $1.(a + bi) = a + bi$. Phần tử đơn vị của phép nhân là số 1.

8) Giả sử $a + bi \neq 0 = 0 + 0i$ là một số phức khác 0, điều đó có nghĩa a và b không đồng thời bằng 0 hay $a^2 + b^2 \neq 0$. Xét số phức

$$\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i,$$

ta có

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right)(a + bi) =$$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \left(\frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2}\right)i = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + 0i = 1.$$

Vậy mỗi số phức khác 0 có nghịch đảo.

9) Xét $(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i))$ và
$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i)$. Ta có :

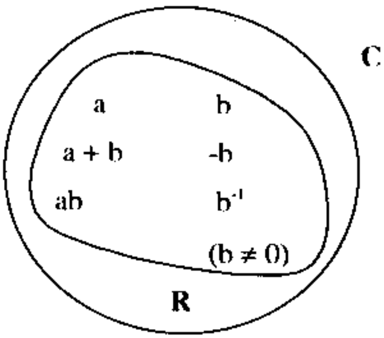
$$(a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) =$$
$$= a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i;$$
$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i) =$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + a_1a_3 - b_1b_3 + (a_1b_3 + b_1a_3)i =$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3 + (a_1b_2 + b_1a_2 + a_1b_3 + b_1a_3)i.$$

So sánh các kết quả đạt được ta có phép nhân phân phối đối với phép cộng.

Kết luận : **C** với hai phép toán cộng và nhân như trên là một trường.

Nhận xét : 1) Khi chứng minh **C** là một trường, ta đã sử dụng các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực : kết hợp, giao hoán, có phần tử không, có phần tử đối, có phần tử đơn vị, mọi số thực $\neq 0$ có nghịch đảo và phép nhân phân phối đối với phép cộng, nghĩa là **R** là một trường ;

2) Ta có hình vẽ dưới đây sau khi làm kỹ bài tập trên :



và người ta nói rằng **R** là một trường con của **C**, tương tự ta có **Q** là một trường con của **R** ;

3) Sở dĩ một bài tập kiểu này phải làm tỉ mỉ như vậy, vì sinh viên mới vào đại học rất bỡ ngỡ khi gặp loại bài tập như thế này.

2. Thực hiện các phép tính :

a) $(-8 + i) - (2 - 7i) = -10 + 8i$.

b) i - (5 + 2i) = -5 - i.

c) $\left(\frac{1}{2} - 3i\right) - \left(3 + \frac{1}{4}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{13}{4}i.$

d) $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} - i\sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{2} - (2 + \sqrt{3})i.$

e) $(\sqrt{k} + i\sqrt{h})(\sqrt{k} - i\sqrt{h}) = k + h.$

3. Phân tích các tổng sau thành tích của hai thừa số phức liên hợp :

a) $16 + a^2 = (4 + ai)(4 - ai) = (a + 4i)(a - 4i).$

b) $(a > 0)$ $a + 1 = (\sqrt{a} + i)(\sqrt{a} - i) = (1 + \sqrt{a}\ i)(1 - \sqrt{a}\ i).$

4. Thực hiện các phép tính :

a) $\frac{4}{1 - 2i} = \frac{4(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{4 + 8i}{1 + 4} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i.$

b) $\frac{-2\sqrt{3} + i}{1 + 2i\sqrt{3}} = \frac{(-2\sqrt{3} + i)(1 - 2i\sqrt{3})}{(1 + 2i\sqrt{3})(1 - 2i\sqrt{3})} = \frac{-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + (1 + 12)i}{1 + 12} = i.$

Ta có thể thấy ngay kết quả khi nhận xét : $-2\sqrt{3} + i = i(1 + 2\sqrt{3}i).$

5. Tính các lũy thừa :

a) Vì $i^2 = -1$ và $i^4 = 1$, nên : $(-i)^{21} = (-i)^{20+1} = (-i)^{20}(-i) = -i$; $(-i)^{36} = 1$;
$i^{15} = i^{12}i^3 = -i$; $i^{10} = i^8i^2 = -1.$

b) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(-1 + 3i\sqrt{3} + 9 - 3i\sqrt{3}) = 1.$

Ta có thể thấy ngay kết quả khi chuyển sang dạng lượng giác :

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1.$$

6. Tính các số thực x và y sao cho :

a) $2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y$. Để hai số phức đó bằng nhau, ta phải có phần thực của chúng bằng nhau, và phần ảo của chúng bằng nhau. Từ đó ta có hai phương trình sau đây với các ẩn là x và y :

$$3x - 5y = 2$$

$$5x - 3y = 14$$

Từ đó, ta được $x = 4$, $y = 2$.

b) $\frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{5i}{y}$. Tách phần thực và phần ảo của hai vế, ta được :

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{y}$$

Từ đó, $x = \frac{9}{2}$, $y = 18$.

7. Giải các phương trình :

a) $4x^2 + 3x + 1 = 0$. Ta tính biệt số $\Delta = 9 - 16 = -7 = 7i^2$. Vậy phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}i}{8}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{7}i}{8}.$$

b) $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$. Ta có $\Delta = (5 - i)^2 - 4(2 + i)(2 - 2i) =$ $= -2i = (1 - i)^2$. Vậy phương trình có các nghiệm như sau :

$$x_1 = \frac{5 - i + 1 - i}{2(2 + i)} = \frac{6 - 2i}{2(2 + i)} = \frac{3 - i}{2 + i} = 1 - i,$$

$$x_2 = \frac{5 - i - 1 + i}{2(2 + i)} = \frac{4}{2(2 + i)} = \frac{2}{2 + i} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i.$$

8. Thực hiện các phép tính sau dưới dạng lượng giác :

a) $= 3(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ) \,.\, \frac{1}{3}(\cos 42^\circ + i\sin 42^\circ) =$

$$= 3.\frac{1}{3}(\cos(18^\circ + 42^\circ) + i\sin(18^\circ + 42^\circ)) =$$

$$= \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^7 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^7 =$

$$= \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{3+3+1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ vì } \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3 = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1.$$

c) $\sqrt[9]{i} = \sqrt[9]{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$. Từ đó cho k lần lượt các giá trị 0, 1, 2, ..., 8, ta được 9 giá trị của $\sqrt[9]{i}$; đó là :

$$\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{9}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{6\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{6\pi}{9}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{8\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18} + \frac{8\pi}{9}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{10\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{10\pi}{9}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{12\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{12\pi}{9}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{14\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{14\pi}{9}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{16\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{16\pi}{9}\right).$$

d) $$\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=\frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2}{2(1-i)}=$$

$$=\frac{2(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3))(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)}{2\sqrt{2}(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right).$$

e) $$(1+i)^n=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos n\frac{\pi}{4}+i\sin n\frac{\pi}{4}\right).$$

9. Giải phương trình $x^4 - 1 = 0$. Ta viết :

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1).$$

Vậy các nghiệm của phương trình $x^4 - 1 = 0$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ và $x^2 + 1 = 0$. Phương trình $x^2 - 1 = 0$ cho ta hai nghiệm ± 1, và phương trình $x^2 + 1 = 0$ cho ta hai nghiệm $\pm i$; vì vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm : 1, -1, i, -i.

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng mọi phương trình bậc n :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_o = 0 \ ; \ a_i \in \mathbf{C}$$

có n nghiệm trong trường số phức **C**, các nghiệm có thể phân biệt hay trùng nhau ; ta bảo **C** là *đóng đại số*, trong khi trường số thực **R** không có tính chất như vậy.

10. a) Giả sử z_1 và z_2 là hai số phức. Chứng minh

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}.$$

Giả sử $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$. Ta có

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i} = a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)i =$$

$$a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2} \ ; \ \overline{z_1 z_2} = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} =$$

$= a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, $\overline{z_1}\ \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) =$

$= a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, vậy $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

b) Giả sử phương trình bậc n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_o = 0, \ a_i \in \mathbf{R}$$

có một nghiệm phức $z = a + bi$. Chứng minh liên hợp $\overline{z} = a - bi$ cũng là nghiệm của phương trình.

Thật vậy, vì z là nghiệm, nên ta có :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_o = 0$$

Lấy liên hợp của hai vế của đẳng thức :

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_o} = \overline{0} = 0$$

Áp dụng a) và chú ý liên hợp của một số thực là chính số thực đó, ta được :

$$a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_o = 0,$$

điều đó có nghĩa $\overline{z} = a - bi$ cũng là một nghiệm của phương trình.

11. Giải phương trình $x^n - 1 = 0$. Các nghiệm của phương trình là n căn bậc n của đơn vị :

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Viết tường minh ra, ta được

$$k = 0,\ x_o = 1 = x_1^o$$

$$k = 1,\ x_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2,\ x_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = x_1^2$$

...

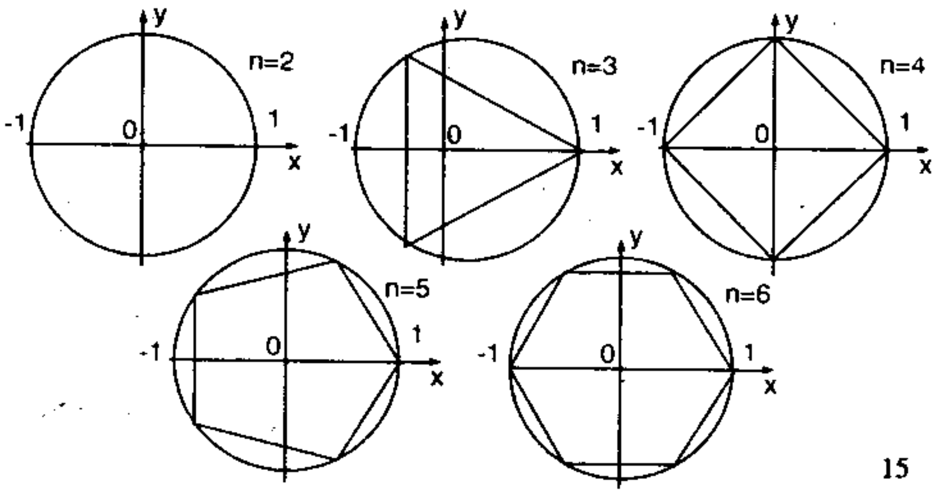
$$k = n-1,\ x_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = x_1^{n-1}.$$

n giá trị đó nằm trên đường tròn đơn vị, làm thành một đa giác đều n cạnh có đỉnh $x_o = 1$ là thực, và nếu m là chẵn thì đa giác còn có một đỉnh thực nữa, đó là -1, các đỉnh còn lại là liên hợp với nhau từng đôi một, chẳng hạn

$$x_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} =$$

$$= \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n} = \overline{x_1}.$$

Ta có các hình vẽ sau đây với n = 2, 3, 4, 5, 6 :



12. Xét tập hợp X các căn bậc n của đơn vị (xem bài tập 12) :

$$X = \{x_o = 1, x_1, ..., x_{n-1}\}.$$

a) Chứng minh $x_i x_j \in X$; $i = 0, ..., n-1, j = 0, ..., n-1$. Thật vậy ta có

$$(x_i x_j)^n = x_i^n x_j^n = 1.1 = 1,$$

vậy $x_i x_j$ là một căn bậc n của đơn vị, cho nên $x_i x_j \in X$. Ta có thể nói phép nhân các số phức là một phép toán trong X.

b) $x_i + x_j$ có thuộc X không ? Ta có thể trả lời ngay là không, vì nếu lấy $x_i = x_j = x_o = 1$, thì ta có $x_i + x_j = 1 + 1 = 2 \notin X$ (các phần tử của X đều nằm trên đường tròn đơn vị). Ta suy ra phép cộng các số phức không phải là một phép toán trong X.

c) Chứng minh X cùng với phép nhân là một nhóm giao hoán. Để trả lời câu này, ta lại làm như bài 1, viết ra trên nháp định nghĩa của nhóm giao hoán. Các tính chất kết hợp, giao hoán, có phần tử đơn vị, ta đã nhìn thấy trong bài tập 1. Bây giờ ta hãy lấy một phần tử tuỳ ý $x_i \in X$; x_i hiển nhiên là một số phức khác 0, nên nghịch đảo x_i^{-1} của nó tồn tại (bài tập 1). Ta phải chứng minh $x_i^{-1} \in X$. Muốn vậy, xét

$$(x_i^{-1})^n = (x_i^n)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Vậy x_i^{-1} cũng là một căn bậc n của đơn vị, nên $x_i^{-1} \in X$. Vậy X cùng với phép nhân là một nhóm giao hoán gọi là *nhóm các căn bậc n của đơn vị*. Nhóm này là một nhóm hữu hạn, nó có n phần tử, trong khi nhóm nhân $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ có vô hạn phần tử.

13. Giả sử $X \subset \mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ là một tập hợp có n phần tử ($n \geq 1$) và X là một nhóm đối với phép nhân các số phức. Chứng minh X là nhóm các căn bậc n của đơn vị (xem bài 12).

Trước hết ta xét trường hợp n = 1, nghĩa là $X = \{x\}$ chỉ có một phần tử x. Vì X là một nhóm đối với phép nhân, nghĩa là phép nhân các số phức là một phép toán trong X, cho nên $x^2 \in X$. Nhưng X chỉ có phần tử x, nên :

$$x^2 = x = 1.x,$$

hay sau khi giản ước với x (bạn đọc hãy nghĩ tại sao ta làm được) :

$$x = 1.$$

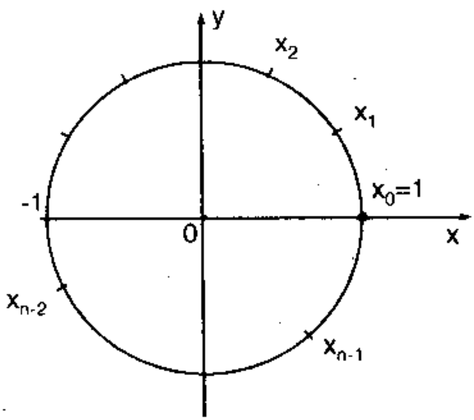
Vậy X = {1}.

Bây giờ ta xét trường hợp $n \geq 2$. Ta hãy chứng minh các phần tử của X đều nằm trên đường tròn đơn vị, nghĩa là với mọi $x \in X$ môđun $|x| = 1$. Giả sử $u, v \in X$ có môđun lần lượt bé nhất và lớn nhất trong các môđun của các số phức thuộc X. Nếu X có một số phức có môđun < 1, thì ắt có $|u| < 1$ (vì |u| bé nhất), nên $|u|^2 < |u|$. Vậy u^2 có môđun $|u^2| = |u|.|u| = |u|^2 < |u|$. Nhưng phép nhân các số phức là một phép toán trong X, nên $u^2 \in X$. Mâu thuẫn với giả thiết u có môđun bé nhất. Lý luận tương tự với trường hợp X có một số phức có môđun > 1 và sử dụng v, ta cũng đi đến một mâu thuẫn. Vậy $|x| = 1$ với mọi $x \in X$. Ta dễ dàng thấy $1 \in X$. Thật vậy, giả sử e là phần tử đơn vị của nhóm X và x là một phần tử tùy ý của X, ta có

$$e.x = x = 1.x,$$

hay sau khi giản ước với x :

$$e = 1.$$



Ta được hình vẽ sau đây về các phần tử $x_0 = 1, x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ của X trên đường tròn đơn vị :

Chúng được sắp xếp trên đường tròn, ngược kim đồng hồ, theo acgumen của chúng :

$$0 = \arg(x_0) < \arg(x_1) < \arg(x_2) < ... < \arg(x_{n-1}) < 2\pi.$$

Bây giờ ta hãy xét các lũy thừa $x_1^0 = 1$, x_1, x_1^2, ..., x_1^S, ... của x_1, chúng đều thuộc X và không thể phân biệt vì như vậy X sẽ vô hạn. Vậy phải có những lũy thừa trùng nhau, chẳng hạn $x_1^i = x_1^j$ với $i \neq j$, giả sử $i < j$. Vậy $x_1^{j-i} = 1$, nghĩa là tồn tại những số tự nhiên $k \neq 0$ sao cho

$x_1^k = 1$. Giả sử m là số tự nhiên $\neq 0$ bé nhất sao cho $x_1^m = 1$. Vậy x_1 là một căn bậc m của đơn vị ; $x_1^o = 1, x_1, x_1^2, ..., x_1^{m-1}$ đều thuộc X, vậy $m \leq n$. Ta chứng minh m = n. Thật vậy, giả sử $x_1 \neq z \in X$. Cũng lập luận tương tự như đối với x_1, ta có z là một căn bậc p của đơn vị và arg(z) phải bằng $\frac{2\pi}{p} > \frac{2\pi}{m} = \arg(x_1)$. Vậy m > p. Lấy m chia cho p, ta được

$$m = pq + r, 0 \leq r \leq p - 1$$

trong đó q là thương và r là dư. Xét $z.x_1^{-q} \in X$:

$$\arg(z.x_1^{-q}) = \frac{2\pi}{p} - \frac{2\pi q}{m} = 2\pi\frac{m - pq}{mp} =$$

$$= 2\pi\frac{r}{mp} < \frac{2\pi}{m}, \text{ vì } \frac{r}{p} < 1.$$

Vậy ta phải có $\frac{2\pi r}{mp} = 0$, nghĩa là $z.x_1^{-q} = 1$, hay $z = x_1^q$, vậy z là một căn bậc m của đơn vị. Ta vừa chứng xong mọi phần tử của X là một căn bậc m của đơn vị, nhưng X có n phần tử, vậy n = m.

14. Xét trường số thực **R** và nhóm nhân $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ của nó. Chứng minh trong $\mathbf{R}^*$, ta chỉ có hai nhóm hữu hạn đối với phép nhân của **R**, đó là {1} và {1, -1}. Đối với trường hữu tỉ **Q** thì sao ?

Bạn đọc có thể áp dụng bài 13 để thấy ngay kết quả.

Chương I

ĐỊNH THỨC

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Chúng ta đã gặp những hệ phương trình tuyến tính với một ẩn hay hai ẩn hay đôi khi ba ẩn trong chương trình trung học và qua đó chúng ta đã có khái niệm định thức cấp hai và ba. Trong thực tiễn ta phải xét những hệ phương trình tuyến tính với số phương trình và số ẩn lớn hơn nhiều và do đó phải tính những định thức có cấp rất lớn, chẳng hạn các kỹ sư thiết kế máy bay luôn gặp những định thức cấp 1000, tất nhiên lúc đó không thể tính tay được mà phải sử dụng máy tính. Để đưa ra định nghĩa định thức cấp n, ta phải có khái niệm phép thế và ma trận.

1.1. Định nghĩa phép thế của một tập hợp hữu hạn

Giả sử $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ hay để cho gọn $X = \{1, 2, ..., n\}$. Một song ánh $\sigma : X \to X$ gọi là một *phép thế* của X. Người ta ký hiệu S_n tập các phép thế của X.

Người ta thường viết một phép thế σ như sau :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Vì σ là một song ánh nên $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ khi $i \neq j$, cho nên $\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)$ là một hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$. Từ đó ta suy ra số các song ánh của X bằng số hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$, nghĩa là bằng n!.

Ví dụ. Lấy $X = \{1, 2, 3\}$, ta có $3! = 6$ phép thế của X, đó là :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

trong đó e là phép thế đồng nhất. Ta chú ý không nhất thiết phải viết dòng đầu của phép thế theo thứ tự tự nhiên, ta có thể viết theo thứ tự khác miễn là ảnh của các số phải viết trực tiếp dưới chúng ; chẳng hạn

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Để định nghĩa được định thức, ta còn phải đưa ra *dấu của một phép thế* σ. Giả sử

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dấu của σ, ký hiệu $sgn(\sigma)$, là

$$\prod_{\{i,j\}} \frac{i-j}{\sigma(i)-\sigma(j)},$$

$\{i, j\}$ chạy khắp tập hợp các bộ phận có 2 phần tử của **X**.

Ta thấy ngay

$$sgn(\sigma) = (-1)^s$$

trong đó s là số nghịch thế của σ (khi $\sigma(i) > \sigma(j)$ với $i < j$ thì ta bảo đó là một nghịch thế của σ); s là chẵn (lẻ) thì σ là phép thế chẵn (lẻ).

Trong ví dụ trên, ta có :

$$sgn(e) = (-1)^0 = 1, sgn(f_1) = (-1)^2 = 1, sgn(f_2) = (-1)^2 = 1,$$

$$sgn(f_3) = (-1)^1 = -1, sgn(f_4) = (-1)^3 = -1, sgn(f_5) = (-1)^{-1} = -1.$$

Ta cũng cần nhớ tính chất về *dấu của tích hai phép thế* để nghiên cứu định thức :

$$sgn(\sigma.\tau) = sgn(\sigma).sgn(\tau).$$

1.2. Định nghĩa ma trận

Trường **K** ở trong chương này có thể là trường số hữu tỷ **Q**, trường số thực **R**, hay trường số phức **C**.

Một *ma trận* A là một bảng có $m \times n$ số a_{ij} lấy ở trường K, viết như sau:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Các số a_{ij} được viết thành m dòng và n cột, chúng mang hai chỉ số : chỉ số i nói lên dòng và j nói lên cột mà a_{ij} được đặt trong bảng. Mỗi a_{ij} được gọi là một *thành phần* của ma trận. *Một ma trận kiểu (m, n)* là một ma trận có m dòng và n cột. Khi $m = n$ thì ta bảo ta có một *ma trận vuông cấp n.*

Ma trận B gọi là *ma trận chuyển vị* của ma trận A nếu mỗi thành phần b_{ij} của B ở dòng thứ i và cột thứ j bằng thành phần a_{ji} của A ở dòng thứ j và cột thứ i, nghĩa là ta được ma trận B từ ma trận A bằng cách viết các cột của A thành dòng của B không thay đổi thứ tự. Ta ký hiệu B bằng ${}^tA$. Như vậy nếu A có m dòng và n cột, thì B có n dòng và m cột.

1.3. Định nghĩa định thức

Giả sử A là một ma trận vuông cấp n ($n \geq 1$) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Định thức của ma trận A là một số D được định nghĩa là tổng sau đây :

(1) $$D = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

và được ký hiệu bởi

(2) $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Nhận xét : Theo (1) D là tổng của n! số hạng và σ chạy khắp S_n (S_n là tập hợp các phép thế của {1, 2, ..., n} có n! phần tử) ; mỗi số hạng có dạng :

$$\mathrm{sgn}(\sigma)\ a_{1\sigma(1)}\ a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

trong đó sgn(σ) = 1 hay −1 tuỳ theo phép thế σ là chẵn hay lẻ, tiếp theo là tích của n số lấy từ ma trận A mà mỗi dòng chỉ có mặt một lần và cũng như vậy với mỗi cột. Người ta đưa ra ký hiệu (2) của D để thấy các số mà từ đó người ta viết được (1), và để về sau ta (sẽ thấy) tính toán định thức dễ dàng hơn là tính trực tiếp từ tổng (1).

Người ta còn ký hiệu định thức của ma trận A bằng |A| hay det(A), det là ba chữ đầu của determinant (tiếng nước ngoài, mà ta dịch là định thức).

Ví dụ : Xét ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Vì S_3 có 3! = 6 phần tử, nên từ ví dụ trong (1.1) ta có

$$|A| = \mathrm{sgn}(e)\, a_{1e(1)} a_{2e(2)} a_{3e(3)} + \mathrm{sgn}(f_1)\, a_{1f_1(1)} a_{2f_1(2)} a_{3f_1(3)} +$$

$$+ \mathrm{sgn}(f_2)\ a_{1f_2(1)} a_{2f_2(2)} a_{3f_2(3)} + \mathrm{sgn}(f_3)\ a_{1f_3(1)} a_{2f_3(2)} a_{3f_3(3)} +$$

$$+ \mathrm{sgn}(f_4)\ a_{1f_4(1)} a_{2f_4(2)} a_{3f_4(3)} + \mathrm{sgn}(f_5)\, a_{1f_5(1)} a_{2f_5(2)} a_{3f_5(3)} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Từ ví dụ trên, ta thấy rằng để tính một định thức cấp n, ta phải viết ra tất cả các phép thế thuộc S_n và tính dấu của chúng, cuối cùng ta viết n! hạng tử của định thức trên cơ sở biết hết các phép thế thuộc S_n và dấu của chúng. Làm như vậy quá là dài, cho nên người ta đã nghiên cứu một số tính chất của định thức cho phép rút ngắn quá trình tính toán lại.

1.4. Các tính chất của định thức

Giả sử D là định thức của ma trận A vuông cấp n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tính chất 1. $|A| = |{}^tA|$.

Tính chất này sẽ cho phép ta sau này chuyển một tính chất về dòng của định thức $|A|$ thành một tính chất về cột của nó và đảo lại, vì dòng của định thức $|A|$ là cột của định thức $|{}^tA|$ và cột của $|A|$ là dòng của $|{}^tA|$.

Tính chất 2. Nếu các thành phần của một dòng thứ i của A có dạng $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, $j = 1, 2, ..., n$, thì $|A| = |A'| + |A''|$ trong đó các thành phần của dòng thứ i của A' là a'_{ij}, của A'' là a''_{ij}, còn các dòng khác của A' và A'' giống như của A.

Tính chất 3. Nếu các thành phần của dòng thứ i của A có dạng $a_{ij} = k a'_{ij}$, $j = 1, 2, ..., n$, thì $|A| = k|A'|$ trong đó A' là ma trận có các thành phần của dòng thứ i bằng a'_{ij}, $j = 1, 2, ..., n$, còn các dòng khác của A' giống như của A.

Tính chất 4. Nếu đổi chỗ hai dòng của A thì ta được một ma trận A' sao cho $|A| = -|A'|$.

Tính chất 5. Nếu A có hai dòng giống nhau thì $|A| = 0$. Tính chất này suy ra từ tính chất 4.

Tính chất 6. Nếu ta cộng vào các thành phần của dòng thứ i các thành phần của một dòng khác đã được nhân lên với một hệ số k thì ta được một ma trận A' sao cho $|A| = |A'|$. Tính chất này suy ra từ các tính chất 2, 3 và 5.

Tính chất 7. Các tính chất 2, 3, 4, 5, 6 phát biểu cho dòng cũng đúng cho cột. Điều đó suy ra từ tính chất 1.

1.5. Tính định thức

Giả sử D là định thức :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Bằng cách khai triển D theo các thành phần của dòng thứ i

(1) $$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}$$

trong đó $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ với M_{ij} là định thức cấp n - 1 suy ra từ D bằng cách bỏ dòng thứ i và cột thứ j, A_{ij} gọi là *phần bù đại số* của a_{ij}, ta đi đến việc tính n định thức cấp n - 1, có nghĩa là ta dẫn việc tính định thức cấp n đến việc tính định thức cấp n - 1. Tất nhiên trong (1) nếu ta có nhiều a_{ij} bằng 0 thì số định thức cấp n - 1 phải tính sẽ rút xuống nhiều. Để có nhiều a_{ij} bằng 0, ta sử dụng tính chất 6. Sau đó ta lại tiếp tục đưa việc tính định thức cấp n - 1 thành cấp n - 2, cứ như thế cho đến cấp 2 mà ta tính được dễ dàng. Trong (1) ta đã khai triển D theo dòng, ta cũng có thể khai triển theo cột do tính chất 1.

1.6. Ứng dụng định thức vào việc giải một hệ phương trình Cramer

Một hệ phương trình Cramer là một hệ n (n ≥ 1) phương trình tuyến tính đối với n ẩn $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

trong đó các a_{ij} và $b_i \in K$, i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n, và định thức D thành lập bởi các hệ số a_{ij} là khác 0. Nghiệm của hệ Cramer là duy nhất, cho bởi các công thức sau :

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{D_j}{D}, \ j = 1, 2, ..., n$$

trong đó D_j suy ra từ D bằng cách thay cột thứ j của D bằng cột các số hạng tự do b_i của hệ phương trình.

Qua công thức trên, ta thấy việc tìm nghiệm của một hệ Cramer được đưa về việc tính các định thức D và D_j, j = 1, 2, ..., n.

§2. BÀI TẬP

1. Tìm tất cả các phép thế của mỗi tập hợp sau :

$$X = \{1, 2\}, X = \{1, 2, 3\}, X = \{1, 2, 3, 4\}.$$

a) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{sgn}(e) = 1$, $\text{sgn}(f) = -1$.

b) Xem ví dụ trong 1.1.

c) S_4 có $4! = 24$ phần tử. Để viết 24 phần tử đó ra, ta xét một phép thế có một phần tử cố định, chẳng hạn ta xét phép thế σ có $\sigma(4) = 4$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) = 4 \end{pmatrix}$$

Vậy σ hạn chế vào bộ phận $\{1, 2, 3\}$ chính là một trong 6 phép thế của ví dụ trong 1.1. Như vậy mỗi lần cố định một phần tử của $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ta viết được 6 phép thế như ví dụ trong 1.1 ; 4 lần viết như vậy ta được 24 phép thế (tất nhiên là phân biệt).

Dấu của σ có 4 cố định bằng dấu của σ hạn chế vào $\{1, 2, 3\}$, cũng như vậy đối với dấu của σ có 1 cố định. Chỉ có các σ có 2 cố định và 3 cố định thì không như vậy. Chẳng hạn ta xét σ có 2 cố định :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma(1) & \sigma(2) = 2 & \sigma(3) & \sigma(4) \end{pmatrix}$$

Ở đây ta có $\text{sgn}(\sigma) = (\text{sgn}\sigma_{|\{1,3,4\}})$ nếu $\sigma(1) = 1$ và đối dấu nhau nếu $\sigma(1) = 3$ hay $\sigma(1) = 4$ vì ta có thêm một nghịch thế với cặp $(\sigma(1), \sigma(2))$.

2. Xét tập hợp S_n các phép thế của $X = \{1, 2, ..., n\}$. Chứng minh S_n là một nhóm đối với phép nhân ánh xạ.

Giả sử σ và τ thuộc S_n. Tích của hai song ánh $\sigma.\tau$ là một song ánh từ X đến X. Vậy $\sigma.\tau \in S_n$, cho nên phép nhân ánh xạ là một phép toán trong S_n. Ta hãy chứng minh phép toán đó thỏa mãn các tính chất của một nhóm.

Trước hết ta có $\xi.(\eta.\zeta) = (\xi.\eta).\zeta$ với $\xi, \eta, \zeta \in S_n$, vì tích ánh xạ có tính kết hợp.

Ánh xạ đơn vị e

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

là phần tử đơn vị vì $e\sigma = \sigma e$ với mọi $\sigma \in S_n$.

Cuối cùng với mọi $\sigma \in S_n$, vì σ là song ánh từ X đến X, nên tồn tại ánh xạ ngược $\sigma^{-1} : X \to X$ cũng là song ánh để $\sigma.\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$. Vậy $\sigma^{-1} \in S_n$ là nghịch đảo của σ.

Với ba tính chất trên, S_n là một nhóm đối với phép nhân ánh xạ, ta gọi S_n là *nhóm các phép thế* của X. Ta có thể đặt câu hỏi là S_n có aben không ? Hiển nhiên S_2 là aben. Lấy lại ví dụ trong 1.1, ta có $f_3f_1 = f_5$, $f_1f_3 = f_4$; vậy S_3 không giao hoán. Từ S_3 không giao hoán, ta có thể suy ra S_n $(n \geq 3)$ không giao hoán (hướng dẫn : xét hai phép thế thuộc S_n để cố định các phần tử $n \geq 4$ và thu hẹp của chúng vào $\{1, 2, 3\}$ là f_1 và f_3).

3. Xét nhóm các phép thế S_n (xem bài 2). Đặt

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid sgn(\sigma) = 1\}$$

và

$$X = \{\sigma \in S_n \mid sgn(\sigma) = -1\}.$$

a) Chứng minh A_n và X có số phần tử bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}n!$.

b) Chứng minh A_n làm thành một nhóm đối với phép nhân ánh xạ.

Trước hết ta hãy chứng minh a). Giả sử $\tau \in S_n$ là một chuyển trí, thế thì $sgn(\tau) = -1$. Xét tích $\tau\sigma$, $\sigma \in A_n$; ta có

$$sgn(\tau\sigma) = sgn(\tau)sgn(\sigma) = -1.1 = -1,$$

vậy $\tau\sigma \in X$. Với τ, ta thành lập được ánh xạ

$$\begin{aligned} t : A_n &\to X \\ \sigma &\mapsto t(\sigma) = \tau\sigma \end{aligned}$$

t là một đơn ánh vì từ đẳng thức

$$\tau\sigma_1 = \tau\sigma_2$$

ta suy ra $\sigma_1 = \sigma_2$ (bằng giản ước hai vế với τ, bạn đọc hãy suy nghĩ tại sao ta làm được như vậy ?). Ngoài ra t là một toàn ánh. Thật vậy, giả sử μ là một phép thế lẻ tùy ý, nghĩa là $\mu \in X$. Ta có $\tau\mu \in A_n$ vì $sgn(\tau\mu) = sgn(\tau)sgn(\mu) = (-1)(-1) = 1$. Ngoài ra, $t(\tau\mu) = \tau(\tau\mu) = \tau^2\mu = \mu$ ($\tau^2 = e$ vì τ là một chuyển trí). Như vậy, với mỗi $\mu \in X$, tồn tại $\sigma \in A_n$, sao cho $t(\sigma) = \mu$, nghĩa là t toàn ánh. t là song ánh từ A_n đến X, vậy số phần tử của chúng bằng nhau và bằng $\frac{1}{2}n!$ (số phần tử của S_n bằng n!).

Bây giờ ta chứng minh b). Trước hết ta phải chứng minh phép nhân ánh xạ là một phép toán trong A_n. Giả sử $\sigma, \tau \in A_n$. Theo a) ta có $\sigma\tau \in S_n$. Xét $sgn(\sigma\tau)$. Ta có $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma).sgn(\tau) = 1.1 = 1$, nghĩa là $\sigma\tau \in A_n$. Để chứng minh A_n làm thành một nhóm đối với phép toán đó, bạn đọc làm tương tự như trong bài tập 2. Người ta gọi A_n là *nhóm con thay phiên* của nhóm các phép thế S_n.

Bạn đọc có thể đặt câu hỏi và tự trả lời xem bộ phận X các phép thế lẻ có làm thành một nhóm đối với phép nhân ánh xạ không ?

4. Tính các định thức sau :

a) $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

Ta có thể khai triển chẳng hạn theo dòng thứ hai :

$$-4\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -20\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -20(-3 + 8) + 12(-9 + 16) + 5(3 - 2) =$$

$$= -100 + 84 + 5 = -11.$$

Ta cũng có thể trước khi khai triển, làm xuất hiện nhiều 0 trong định thức bằng cách áp dụng tính chất 6 trong (1.4). Muốn vậy, ta hãy lấy dòng thứ nhất trừ đi dòng thứ ba, ta được :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Tiếp theo, ta nhân cột 1 với 5 và cộng vào cột 3 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 19 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Cuối cùng ta nhân dòng thứ ba với -2 rồi cộng vào dòng thứ hai (việc làm này cốt để tính phần bù đại số đơn giản hơn):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Bây giờ ta hãy khai triển D theo dòng thứ nhất :

$$D = 1. \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 25 = -11.$$

b) $D = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ (cộng dòng hai vào dòng ba)

$= 2\begin{vmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (đưa thừa số chung ở dòng ba ra ngoài)

$= 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 14 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (cộng dòng hai và ba vào dòng một)

$= 2 \times 14 \times 7 = 196$ (khai triển theo dòng một).

5. Giải phương trình

a) $\begin{vmatrix} 4-x & 5 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

Sau khi tính định thức ở vế trái, ta được

$$(4 - x)(x - 1) + 10 = 0$$

hay
$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

Đây là một phương trình bậc hai có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 6$.

Ta cũng có thể lý luận như sau để thấy hai nghiệm của phương trình. Trước hết, nhìn định thức ta thấy ngay ta có một phương trình bậc hai đối với x. Nếu tinh ý, ta thấy ngay nghiệm $x = -1$, vì sau khi thay x bằng -1, ta được định thức

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

mà giá trị hiển nhiên bằng 0 vì có hai cột bằng nhau. Đối với nghiệm thứ hai $x = 6$, ta thấy định thức có giá trị 0 :

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

vì có hai dòng bằng nhau ; tất nhiên việc tìm ra nghiệm $x = 6$ cũng do làm toán nhiều thì nhìn thấy.

b) $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ x-1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

Tính định thức ở vế trái, ta được phương trình

$$2x(x + 2) - 5(x - 1) = 0$$

hay
$$2x^2 - x + 5 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm phức liên hợp

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{39}}{4}, \ x_2 = \frac{1 - i\sqrt{39}}{4}.$$

6. Tính định thức

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times (-4) \times (-7) \times 4 = 672$$

(tích các phần tử nằm trên đường chéo chính).

$$\text{b)}\ D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ta có thể đưa định thức D dưới dạng tam giác như sau :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(cộng cột hai vào cột bốn để làm xuất hiện ba 0 ở dòng hai với điều kiện trên ba 0 đó có ba 0 tương ứng ở dòng một).

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(nhân cột một với 2 rồi cộng vào cột bốn để làm xuất hiện hai 0 ở dòng bốn, đứng dưới hai 0 ở dòng hai).

(*) $$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 21 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(nhân cột bốn với 2 và cộng vào cột năm để có một 0 ở dòng năm, trên 0 đó là ba 0 của dòng một, hai và bốn).

Bây giờ ta thực hiện những việc đổi dòng và đổi cột để đưa định thức về dạng tam giác. Bạn đọc nên nhớ rằng khi trao đổi vị trí của hai dòng hay hai cột thì định thức đổi dấu.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 21 \end{vmatrix}$$

(đổi chỗ dòng ba lần lượt với dòng bốn và dòng năm).

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 10 & 21 \end{vmatrix}$$

(đổi chỗ cột ba lần lượt với cột hai và cột một).

$$D = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 10 & 21 \end{vmatrix}$$ (đổi chỗ hai cột hai và ba).

Cuối cùng $D = -(2 \times 1 \times 1 \times (-1) \times 21) = 42$.

Ta cũng có thể không cần thực hiện các việc đổi dòng và đổi cột mà có thể có kết quả ngay bằng cách nhìn vào D ở dạng (*), rồi đánh dấu các phần tử mà sau khi đổi dòng và cột chúng nằm trên đường chéo. Trước hết :

dòng một : chắc chắn số 2 là số ta lấy ;

dòng hai : có hai số khác 0, đó là 1 và 5, ta lấy số 1, vì số 5 cùng cột với 2 ;

dòng bốn : ta lấy số 1 (tại sao ?) ;

dòng năm : ta lấy số -1 (tại sao ?) ;

dòng ba : ta lấy số 21 (tại sao ?).

Trước mỗi số phải có một dấu, bạn đọc hãy tự tìm hiểu, vì sao lại có kết quả như sau :

$$D = (-1)^{1+3}2 \times (-1)^{1+2}1 \times (-1)^{2+1}1 \times (-1)^{2+1}(-1) \times (-1)^{1+1}21 =$$

$$= 2 \times (-1) \times (-1) \times 1 \times 21 = 42.$$

Ta cũng có thể tính D bằng khai triển theo dòng thứ nhất (vì có bốn 0) :

$$D = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ta được một định thức cấp 4. Ta hãy cộng cột thứ hai vào cột thứ tư :

$$D = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Bây giờ ta hãy khai triển định thức cấp 4 theo dòng thứ nhất, ta được một định thức cấp ba

$$D = (2)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Nhân cột thứ nhất với 2, rồi cộng vào cột thứ hai :

$$D = (2)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức cấp ba theo các phần tử của dòng thứ hai :

$$D = (2)(-1)(-1)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(-1)(-1)(20 + 1) = 42.$$

7. Tính định thức bằng cách đưa về dạng tam giác :

a) $$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}$$

Ta hãy nhân cột thứ nhất tuần tự với -5, 2, -3, rồi cộng vào với cột thứ hai, thứ ba và thứ tư :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -12 & 22 \end{vmatrix}$$

Bây giờ ta nhân dòng thứ ba với 4 rồi cộng vào dòng thứ tư :

(*) $$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix}$$

Để có dạng tam giác ta thực hiện việc đổi dòng và đổi cột, nhưng xin nhớ chú ý đến dấu khi đổi dòng và đổi cột :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 18 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 18 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 108.$$

Ta cũng có thể có ngay giá trị của D mà không cần đưa về dạng tam giác bằng cách khai triển theo dòng và cột từ dạng (*) của D :

$$D = 1.\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 . 2 . \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 18 = 108.$$

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

Cộng tuần tự dòng một với dòng hai, dòng một với dòng ba, ..., dòng một với dòng thứ n ; ta được :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2(n-1) & 2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!$$

$$\text{c) } D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

Nhân dòng một với -1 rồi cộng tuần tự với dòng hai, ba, ..., n - 1, n ; ta được :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & x - x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x - x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x - x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Ta cũng có thể có ngay kết quả trên bằng nhận xét sau đây : nếu khai triển D ta sẽ được một đa thức f(x) bậc n đối với x với hệ số của x^n là 1, hạng tử này nhận được từ việc nhân các thành phần nằm trên đường chéo chính của D. Mặt khác D = 0 khi ta thay $x = x_1$ ở dòng hai, hay $x = x_2$ ở dòng ba, ..., hay $x = x_n$ ở dòng n. Điều này nói lên $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là những nghiệm của f(x) ; nhưng f(x) bậc n, cho nên nó chỉ có n nghiệm, vậy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm của f(x). Vậy ta có :

$$D = f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

8. Tính định thức bằng cách áp dụng định lý Laplaxơ :

$$\text{a) } D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ta hãy chọn cột thứ tư và thứ năm vì có nhiều 0. Hai cột này chỉ cho ta một định thức cấp 2 khác 0, đó là

$$M = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Phần bù đại số của M là

$$A = (-1)^{1+2+4+5} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Các số 1, 2, 4, 5 chỉ các số dòng và cột mà định thức M được rút ra từ D. Khai triển định thức cấp ba trên theo cột một, ta được :

$$A = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -8.$$

Vậy D = M . A = 32.

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Trước hết ta hãy lấy dòng thứ ba trừ vào dòng thứ tư :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Bây giờ ta hãy chọn dòng thứ tư và dòng thứ năm. Hai dòng này cho ta chỉ một định thức cấp hai khác 0, đó là

$$M = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36$$

Phần bù đại số của M là

$$A = (-1)^{4+5+3+5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Vậy D = M . A = 36 × 2 = 72.

9. Tính định thức bằng phương pháp quy nạp :

$$\text{a) } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Để tính bằng quy nạp, ta hãy tính D_2 và D_3 để phỏng đoán dạng của D_n. Tính

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

ta được $D_2 = a_2 - a_1$, $D_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

Từ đó, ta phỏng đoán dạng của D_n :

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$$

$$= \prod_{i>j}(a_i - a_j),\ i = 2, \ldots, n\ ;\ j = 1, \ldots, n - 1.$$

Ta hãy chứng minh công thức trên bằng quy nạp theo n. Ta thấy công thức đúng cho n = 2, 3 ; ta giả sử đúng cho n - 1 và chứng minh đúng cho n. Trước hết ta nhận xét rằng $D_n = 0$ khi ta lần lượt cho $a_1 = a_2$, $a_1 = a_3$, ..., $a_1 = a_n$. Vậy nếu ta khai triển D_n theo cột thứ nhất, ta sẽ được một đa thức bậc n - 1 đối với ẩn a_1 và đa thức nhận n - 1 nghiệm : $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Cho nên D_n có dạng

$$D_n = \Delta(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n),$$

trong đó Δ là hệ số của a_1^{n-1}, đó là phần bù đại số của a_1^{n-1} trong định thức D_n, nó bằng :

$$\Delta = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Theo giả thiết quy nạp, ta được

$$\Delta = (-1)^{n-1}(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) \ldots (a_n - a_2)(a_n - a_3) \ldots (a_n - a_{n-1})$$

Từ đó

$$D_n = (-1)^{n-1}(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)\Delta = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$$

với $i = 2, 3, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n - 1$.

$$\text{b) } D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ta có thể tính D bằng phương pháp quy nạp, nhưng ở đây ta hãy đưa D về dạng tam giác vì nhanh hơn. Ta hãy cộng các cột 1, 2, ..., n vào cột n + 1, ta được :

$$D = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

Bây giờ khai triển D theo cột thứ n + 1, ta được :

$$D = (n+1)\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = (-1)^n(n+1)a_1a_2 \dots a_n.$$

10. Giải hệ phương trình bằng quy tắc Cramer :

a) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - \quad x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

Ta phải tính bốn định thức để có nghiệm của phương trình, nhưng ở đây ta may mắn nhìn thấy ngay nghiệm của phương trình

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

Thực ra vì đề bài nói tới quy tắc Cramer, điều đó có nghĩa hệ phương trình là Cramer, cho nên có nghiệm duy nhất. Nếu hệ phương trình không phải là Cramer thì nó có thể vô nghiệm hay có vô số nghiệm, cho nên việc nhẩm ra một nghiệm chưa có thể nói rằng đã giải xong bài toán.

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Bằng quy tắc Cramer, ta được $x_1 = 73/38$, $x_2 = 71/38$, $x_3 = 89/38$.

c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_1 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

d) $$\begin{cases} \quad\quad\; x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \quad\quad = 5 \end{cases}$$

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = -1.$

Chương II

KHÔNG GIAN VECTƠ

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong chương 0, chúng ta đã nói tới bốn cấu trúc đại số mà học sinh gặp trong suốt mười hai năm học ở phổ thông, từ lớp 1 đến lớp 12, đó là các cấu trúc nửa nhóm, nhóm, vành và trường. Trong chương này chúng ta đưa vào một cấu trúc đại số quan trọng: không gian vectơ, nền tảng của môn học Đại số tuyến tính. Cấu trúc không gian vectơ đã được học sinh làm quen khi học khái niệm vectơ trong hình học ở trung học phổ thông mà các em thường vẽ như những mũi tên. ở đây các vectơ đã được mở rộng, chỉ giữ lại những tính chất cơ bản nhất của vectơ ở trung học phổ thông, cho nên chúng không còn vẽ được như những mũi tên nữa rồi.

1.1. Định nghĩa không gian vectơ

Trong chương này và các chương sau **K** là một trường mà chủ yếu là các trường **C**, **R** hay **Q**.

Giả sử E là một tập hợp mà các phần tử được kí hiệu bằng $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ (trong nhiều tài liệu, người ta bỏ mũi tên và chỉ viết đơn giản x, y, z, ...; ở đây ta vẫn để mũi tên để giữ cách viết như trung học vì tổng quát hóa quá nhanh có thể gây bối rối cho người đọc) và K là một trường mà các phần tử được ký hiệu bằng λ, μ, ν, ... Giả sử cho hai phép toán :

- phép cộng :

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \vec{x} + \vec{y} \end{aligned}$$

và

- phép nhân một phần tử của K với một phần tử của E :

$$\begin{aligned} K \times E &\to E \\ (\lambda, \bar{x}) &\mapsto \lambda\bar{x} \end{aligned}$$

thỏa mãn các tính chất sau với mọi $\bar{x}, \bar{y} \in E$ và mọi $\lambda, \mu \in K$:

1) E cùng với phép cộng là một nhóm aben,

2) phép nhân phân phối đối với phép cộng của trường K :

$$(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{y} ,$$

3) phép nhân phân phối đối với phép cộng của E :

$$\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y} ,$$

4) phép nhân kết hợp :

$$\lambda(\mu\bar{x}) = (\lambda\mu)\bar{x} ,$$

5) $1\,\bar{x} = \bar{x}$, 1 là đơn vị của trường K.

Lúc đó ta bảo E cùng với hai phép toán : cộng trong E và nhân với một phần tử của trường K, thỏa mãn các tính chất 1), 2), 3), 4), 5) là một không gian vectơ trên trường K hay K - không gian vectơ (cũng gọi tắt là không gian vectơ khi không cần chỉ rõ K) ; khi K = **C**, ta bảo E là không gian vectơ phức ; K = **R**, E là không gian vectơ thực ; K = **Q**, E là không gian vectơ hữu tỷ. Các phần tử của E gọi là các vectơ ; các phần tử của K gọi là vô hướng (để phân biệt với vectơ). Phép toán + gọi là phép cộng vectơ, phép toán nhân với một phần tử của trường K gọi là phép nhân vectơ với vô hướng.

Một số hệ quả đơn giản suy ra ngay từ định nghĩa mà ta cần nhớ vì dùng tới luôn.

Vì E là một nhóm aben đối với phép cộng, nên E có các tính chất của một nhóm aben, mà ở đây chúng ta cũng nên nhắc lại một số tính chất.

1) Phần tử trung hòa $\bar{0}$ của phép cộng vectơ là duy nhất, gọi là vectơ không (hay vectơ zero).

2) Mọi vectơ $\vec{x} \in E$ chỉ có một vectơ đối duy nhất ký hiệu $-\vec{x}$.

3) Luật giản ước : $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

4) Phương trình đối với $\vec{x}$

$$\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$$

có một nghiệm duy nhất là $\vec{b} - \vec{a}$. Thật vậy, ta có $\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$, vậy $\vec{b} - \vec{a}$ là nghiệm của phương trình. Nếu phương trình có hai nghiệm $\vec{c}$ và $\vec{c'}$:

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{c'} = \vec{b},$$

thực hiện luật giản ước ở đẳng thức thứ nhất ta được $\vec{c} = \vec{c'}$.

Sau đây là những tính chất liên quan đến phép nhân vectơ với vô hướng.

5) Phép nhân phân phối đối với phép trừ trong K : $(\lambda - \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} - \mu\vec{x}$. Thật vậy, ta có :

$$\lambda\vec{x} = ((\lambda - \mu) + \mu)\vec{x} = (\lambda - \mu)\vec{x} + \mu\vec{x};$$

cộng $-\mu\vec{x}$ vào vế đầu và vế cuối ta được đẳng thức mong muốn.

6) $0\vec{x} = \vec{0}$. Thật vậy, ta chỉ cần lấy $\lambda = \mu$ trong đẳng thức trên.

7) $(-\mu)\vec{x} = -\mu\vec{x}$. Thật vậy, áp dụng 5) và 6) bằng cách đặt $\lambda = 0$.

Chứng minh tương tự, ta được :

8) Phép nhân phân phối đối với phép trừ trong E:

$$\lambda(\vec{x} - \vec{y}) = \lambda\vec{x} - \lambda\vec{y}.$$

9) $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

10) $\lambda(-\vec{x}) = -\lambda\vec{x}$.

11) Quan hệ $\lambda\vec{x} = \vec{0}$ kéo theo hoặc $\lambda = 0$ hoặc $\vec{x} = \vec{0}$. Thật vậy giả sử $\lambda \neq 0$, nên λ có nghịch đảo λ^{-1} ; vậy :

$$\vec{x} = 1\vec{x} = (\lambda^{-1}\lambda)\vec{x} = \lambda^{-1}(\lambda\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{0} = \vec{0}.$$

1.2. Định nghĩa không gian (vectơ) con

Giả sử E là một K - không gian vectơ, A là một bộ phận của E ổn định đối với hai phép toán của E, nghĩa là $\bar{x} + \bar{y} \in A$ và $\lambda\bar{x} \in A$ với mọi $\bar{x}$, $\bar{y} \in A$ và $\lambda \in K$. Như vậy hai phép toán của E cảm sinh hai phép toán trên A. Ta bảo A là một K - không gian vectơ con (gọi tắt là không gian con) của E nếu A cùng với hai phép toán cảm sinh làm thành một K - không gian vectơ.

Để nhận biết một bộ phận A không rỗng của K - không gian vectơ E là một không gian con của E, ta có định lý sau đây được luôn luôn sử dụng :

A là không gian con của E $\Leftrightarrow \forall \bar{x}, \bar{y} \in A, \forall\lambda, \mu \in K, \lambda\bar{x} + \mu\bar{y} \in A \Leftrightarrow \forall \bar{x}, \bar{y} \in A, \forall\lambda \in K, \bar{x} + \bar{y} \in A$ và $\lambda\bar{x} \in A$.

1.3. Không gian con sinh bởi một hệ vectơ

Giả sử E là một K - không gian vectơ, $(\bar{x}_i)_{1\le i\le n}$ là một hệ n vectơ của E. Người ta dễ dàng thấy bộ phận

$$A = \{\lambda_1\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 + \dots + \lambda_n\bar{x}_n \mid \lambda_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}$$

làm thành một không gian con của E, gọi là không gian con sinh bởi hệ vectơ $(\vec{x}_i)_{1\le i\le n}$.

1.4. Tổng của những không gian con

Giả sử E là một K - không gian vectơ, $(F_i)_{1\le i\le m}$ là một họ m không gian con của E. Dễ dàng thấy bộ phận

$$F = \{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m \mid \bar{x}_i \in F_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

là một không gian con của E, gọi là tổng của các không gian con $F_1, F_2, \dots, F_m$ và ký hiệu là $F_1 + F_2 + \dots + F_m$.

1.5. Giao của những không gian con

Giả sử E là một K - không gian vectơ, $(F_i)_{1\le i\le m}$ là một họ m không gian con của E. Giao

$$G = \bigcap_{1\le i\le m} F_i = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_m$$

là một không gian con của E, gọi là không gian giao của các F_i, i = 1, 2, ..., m.

1.6. Độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Giả sử $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ ($n \geq 1$) là n vectơ của K - không gian vectơ E và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là n phần tử của trường K. Vectơ

$$\vec{x} = \lambda_1 \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \overrightarrow{x_2} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{x_n}$$

còn được viết là :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_i} \in E$$

và gọi là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ với các hệ tử $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (hay của hệ vectơ $(\vec{x}_i)_{i=1,2,\ldots,n}$, với họ hệ tử $(\lambda_i)_{i=1,2,\ldots,n}$). Trong trường hợp K là một trường số, các λ_i sẽ gọi là hệ số thay cho hệ tử.

Khi $\vec{x}$ là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $(\vec{x}_i)_{i=1,2,\ldots,n}$, ta còn nói $\vec{x}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ vectơ đó. Qua các ví dụ sau, ta sẽ thấy cách biểu diễn

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_i}$$

không chắc duy nhất, tức là còn có thể có

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \overrightarrow{x_i}$$

mà không phải $\lambda'_i = \lambda_i$ với mọi i = 1, 2, ..., n.

Ví dụ. Trong **R** - không gian vectơ $\mathbf{R}^2$, cho các vectơ $\overrightarrow{x_1} = (0, -1)$, $\overrightarrow{x_2} = (1, 4)$, $\overrightarrow{x_3} = (2, 3)$. Khi đó :

$$-2\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} + 0\overrightarrow{x_3} = (1, 6) = 3\overrightarrow{x_1} + 3\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_3},$$

$$5\overrightarrow{x_1} + 2\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_3} = (0, 0) = \vec{0} = 0\overrightarrow{x_1} + 0\overrightarrow{x_2} + 0\overrightarrow{x_3}.$$

Tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\ldots,n}$ với họ hệ tử $(\lambda_i = 0)_{i=1,\ldots,n}$ gọi là tổ hợp tuyến tính tầm thường của hệ vectơ đó. Trong ví dụ trên, ta đã biểu thị tuyến tính vectơ $\vec{0}$ qua các vectơ $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}$ bằng hai cách, trong đó một biểu thị tuyến tính là tầm thường.

Tổng quát, vectơ $\vec{0}$ của một không gian vectơ E bao giờ cũng có ít nhất một biểu thị tuyến tính qua một hệ vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,2,\ldots,n}$ của E, đó là biểu thị tuyến tính tầm thường :

$$\vec{0} = 0\overrightarrow{x_1} + 0\overrightarrow{x_2} + \ldots + 0\overrightarrow{x_n}.$$

Hệ n vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\ldots,n}$ $(n \geq 1)$ trong K - không gian vectơ E gọi là *độc lập tuyến tính* khi vectơ $\vec{0}$ chỉ có một biểu thị tuyến tính, đó là biểu thị tuyến tính tầm thường, qua hệ vectơ đó. Vậy hệ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\ldots,n}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_i} = \vec{0} \text{ kéo theo } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Hệ vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\ldots,n}$ không độc lập tuyến tính thì gọi là *phụ thuộc tuyến tính*. Vậy hệ đó phụ thuộc tuyến tính khi vectơ $\vec{0}$ có ít nhất một biểu thị tuyến tính khác tầm thường, nghĩa là $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_i} = \vec{0}$ trong đó có ít nhất một $\lambda_i \neq 0$.

Ví dụ. Ta hãy lấy lại ví dụ trên. Hệ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3})$ độc lập tuyến tính vì $\vec{0}$ có 2 biểu thị tuyến tính qua hệ đó. Hệ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$ độc lập tuyến tính vì : nếu $\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \lambda\overrightarrow{x_2} = \vec{0}$, tức là $\lambda_1(0, -1) + \lambda_2(1, 4) = (0, 0)$ hay $(\lambda_2, -\lambda_1 + 4\lambda_2) = (0, 0)$ thì $\lambda_2 = 0$, $-\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$, do đó $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Sau đây là một số hệ quả đơn giản, nhưng rất quan trọng vì ta sẽ sử dụng luôn.

1) Giả sử I là một tập hợp hữu hạn và $\varnothing \neq J \subset I$. Cho hệ vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ trong K - không gian vectơ E và hệ con $(\overrightarrow{x_j})_{j\in J}$ của nó. Vì mọi tổ hợp tuyến tính của hệ con có thể xem là một tổ hợp tuyến tính của hệ ban đầu (coi mọi hệ tử $\lambda_i = 0$ với $i \in I - J$) nên :

- nếu hệ $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ độc lập tuyến tính thì hệ con $(\overrightarrow{x_j})_{j\in J}$ cũng độc lập tuyến tính ;

- nếu hệ con $(\overrightarrow{x_j})_{j\in J}$ phụ thuộc tuyến tính thì hệ ban đầu $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ phụ thuộc tuyến tính.

2) Cho hệ vectơ $(\vec{x})$ chỉ có một vectơ. Hệ này là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\vec{x} = \vec{0}$. Thật vậy, nếu $(\vec{x})$ phụ thuộc tuyến tính, điều đó có nghĩa có $0 \neq \lambda \in K$ sao cho $\lambda\vec{x} = \vec{0}$. Vì $\lambda \neq 0$ ta suy ra $\vec{x} = \vec{0}$. Đảo lại, giả sử $\vec{x} = \vec{0}$. Lấy $\lambda \neq 0$, ta có $\lambda\vec{x} = \vec{0}$, vậy $(\vec{x})$ phụ thuộc tuyến tính.

3) Cho hệ vectơ $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$, $n > 1$. Hệ là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ của hệ biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại của hệ. Thật vậy, giả sử hệ là phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là có hệ các hệ tử $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ trong đó có ít nhất một $\lambda_i \neq 0$ sao cho

$$\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \ldots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{x_{i-1}} + \lambda_i\overrightarrow{x_i} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{x_{i+1}} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{x_n} = \vec{0}$$

Vì $\lambda_i \neq 0$, nên có nghịch đảo λ_i^{-1}, và ta có

$$\overrightarrow{x_i} = -\lambda_i^{-1}(\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \ldots + \lambda_{i-1}\overrightarrow{x_{i-1}} + \lambda_{i+1}\overrightarrow{x_{i+1}} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{x_n}).$$

Đảo lại, giả sử có $\overrightarrow{x_i}$ biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại của hệ :

$$\overrightarrow{x_i} = \mu_1\overrightarrow{x_1} + \ldots + \mu_{i-1}\overrightarrow{x_{i-1}} + \mu_{i+1}\overrightarrow{x_{i+1}} + \ldots + \mu_n\overrightarrow{x_n}.$$

Thế thì ta có thể viết

$$\mu_1\vec{x}_1 + \ldots + \mu_{i-1}\overrightarrow{x_{i-1}} + \mu_i\overrightarrow{x_i} + \mu_{i+1}\overrightarrow{x_{i+1}} + \ldots + \mu_n\overrightarrow{x_n} = \vec{0}$$

với $\mu_i = -1 \neq 0$. Vậy hệ vectơ $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ phụ thuộc tuyến tính.

4) Nếu một vectơ $\vec{y}$ biểu thị tuyến tính qua một hệ vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,2,\dots,n}$ độc lập tuyến tính, thì $\vec{y}$ chỉ có một biểu thị tuyến tính qua hệ vectơ đó. Thật vậy, giả sử có

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \overrightarrow{x_i},$$

ta suy ra
$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda'_i)\overrightarrow{x_i} = \vec{0}.$$

Nhưng hệ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\dots,n}$ là độc lập tuyến tính, vậy $\lambda_i - \lambda'_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, hay $\lambda_i = \lambda'_i$, $i = 1, \dots, n$.

5) Nếu hệ vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\dots,n}$ độc lập tuyến tính thì hệ $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n},\bar{y})$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi vectơ $\vec{y}$ biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\dots,n}$. Thật vậy, nếu $\bar{y}$ biểu thị tuyến tính qua $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\dots,n}$ thì theo 3) hệ $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n},\bar{y})$ là phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, nếu hệ $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n},\bar{y})$ là phụ thuộc tuyến tính thì có tổ hợp tuyến tính không tầm thường

$$\lambda\overrightarrow{x_1} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{x_n} + \lambda\bar{y} = \vec{0}$$

trong đó λ không thể bằng 0, vì nếu $\lambda = 0$ thì tổ hợp tuyến tính không tầm thường đó chứng tỏ hệ $(\overrightarrow{x_i})_{i=1,\dots,n}$ phụ thuộc tuyến tính, trái với giả thiết. Vậy ta có :

$$\begin{aligned} y &= -\lambda^{-1}(\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \dots + \lambda_n\overrightarrow{x_n}) \\ &= -\frac{\lambda_1}{\lambda}\overrightarrow{x_1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\overrightarrow{x_n} \end{aligned}$$

1.7. Hạng của một hệ hữu hạn vectơ

Giả sử I là một tập hợp hữu hạn và $\varnothing \neq J \subset I$. Giả sử cho hệ vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ trong K - không gian vectơ E. Hệ con $(\overrightarrow{x_j})_{j\in J}$ gọi là một hệ con *độc lập tuyến tính tối đại* của hệ đã cho nếu nó là một hệ độc lập tuyến tính và nếu thêm bất cứ vectơ $\overrightarrow{x_i}$ nào, $i \in I - J$, vào hệ con đó thì ta đều được một hệ phụ thuộc tuyến tính.

Tính chất. 1) Nếu hệ con $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n})$ của hệ $(\overrightarrow{x_i})_{i \in I}$ là một hệ con độc lập tuyến tính tối đại thì mọi vectơ $\overrightarrow{x_i}$, $i \in I$, biểu thị tuyến tính được qua hệ con đó và biểu thị tuyến tính được một cách duy nhất.

2) Cho một hệ hữu hạn vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i \in I}$ trong E và cho hệ con độc lập tuyến tính $(\overrightarrow{x_j})_{j \in J}$, $(\varnothing \neq J \subset I)$, thì ta có thể xây dựng một hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ $(\overrightarrow{x_i})_{i \in I}$ chứa hệ $(\overrightarrow{x_j})_{j \in J}$.

Thật vậy, giả sử đã xây dựng được hệ con $(\overrightarrow{x_l})_{l \in L}$, $J \subset L \subset I$, độc lập tuyến tính mà vẫn chưa phải độc lập tuyến tính tối đại, tức vẫn còn có vectơ $\overrightarrow{x_i}$, $i \in I - L$, không phải là một tổ hợp tuyến tính của hệ $(\overrightarrow{x_l})_{l \in L}$, thế thì ta lấy hệ $(\overrightarrow{x_m})_{m \in M}$, $M = L \cup \{i\}$, hệ này vẫn độc lập tuyến tính. Vì số phần tử của I - L là hữu hạn, sau một số hữu hạn bước, ta xây dựng được hệ đòi hỏi.

Cho hệ hữu hạn vectơ $(\overrightarrow{x_i})_{i \in I}$ trong K - không gian vectơ E. Thế thì ta chứng minh được rằng số phần tử của mọi hệ con độc lập tuyến tính tối đại của nó là bằng nhau và gọi là hạng của hệ vectơ đã cho. Hạng của hệ vectơ $(\overline{0})$ được coi bằng 0.

1.8. Hạng của ma trận

Cho một ma trận $A = (a_{ij})$ m dòng và n cột với $a_{ij} \in K$. Hạng của A là hạng của hệ vectơ cột và người ta chứng minh nó cũng bằng hạng của hệ vectơ dòng và bằng cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của nó. Khẳng định cuối cùng này giúp ta tính hạng của ma trận.

Người ta chứng minh được rằng nếu ma trận A chứa một ma trận vuông cấp p có định thức khác 0 sao cho mọi ma trận vuông cấp p + 1 chứa nó có định thức bằng 0, thì ma trận có hạng p. Việc tính hạng của ma trận cho phép ta khẳng định một hệ phương trình tuyến tính tổng quát có nghiệm hay không.

1.9. Cơ sở và số chiều của một K - không gian vectơ

Ở đây chúng ta chỉ đề cập tới các không gian vectơ có chiều hữu hạn.

Giả sử E là một K - không gian vectơ. Giả sử tồn tại trong E một hệ vectơ độc lập tuyến tính $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ sao cho mọi vectơ của E đều biểu thị tuyến tính qua hệ đó. Lúc đó ta cũng có thể nói hệ $(\overrightarrow{e_i})_{i=1,2,...,n}$ là độc lập tuyến tính tối đại trong E. Hai hệ $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ và $(\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_{n'}})$ độc lập tối đại trong E phải có số vectơ bằng nhau : n = n'.

Ví dụ. Giả sử E là không gian vectơ gồm tất cả các vectơ có cùng điểm gốc O trong không gian. Hệ ba vectơ $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ không đồng phẳng là độc lập tuyến tính và mọi vectơ của E đều biểu thị tuyến tính qua chúng.

Giả sử E là một K - không gian vectơ. Giả sử $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính tối đại trong E, nghĩa là có các tính chất sau :

1) độc lập tuyến tính,

2) mọi vectơ của E đều biểu thị tuyến tính qua $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n})$ và một cách duy nhất vì $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ độc lập tuyến tính.

Lúc đó ta bảo $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ là một cơ sở của K - không gian vectơ E và số chiều (hay vắn tắt là chiều) của E, ký hiệu dim E, là số vectơ của cơ sở. Ta viết dimE = n ; và gọi E là K - không gian vectơ n chiều. Nếu dim E = n, ta suy ra mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính của E gồm n vectơ là một cơ sở của E.

Chú ý: Người ta chứng minh rằng mọi K - không gian vectơ E đều có cơ sở và số vectơ của cơ sở có thể hữu hạn hay vô hạn. Nếu E có một cơ sở hữu hạn thì mọi cơ sở khác của E cũng hữu hạn và có cùng số vectơ.

Nếu E có một cơ sở vô hạn thì mọi cơ sở khác của E cũng vô hạn, và chúng đẳng lực với nhau. Trong trường hợp E có cơ sở vô hạn, ta bảo dim E = ∞, và gọi E là K - *không gian vectơ vô hạn chiều.*

Ở đây khi nói tới cơ sở của một K - không gian vectơ ta hiểu rằng nó hữu hạn; vì lý do sư phạm. Tất nhiên ta cũng có thể tham khảo thêm những tài liệu khác để tìm hiểu về các K - không gian vectơ có cơ sở vô hạn. Giả sử E là một K - không gian vectơ, $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ là một cơ sở của E, và $\vec{x}$ là một vectơ tùy ý của E. Lúc đó $\vec{x}$ biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua cơ sở $(\overrightarrow{e_i})$:

$$\vec{x} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gọi là các tọa độ của vectơ $\vec{x}$ đối với các vectơ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ của cơ sở.

Ví dụ. Xét không gian thực $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Các vectơ : $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \dots, 0)$,

$\overrightarrow{e_2} = (0, 1, \dots, 0)$,

....

$\overrightarrow{e_n} = (0, 0, \dots, 1)$

làm thành một cơ sở của $\mathbf{R}^n$, gọi là cơ sở chính tắc. Mọi vectơ $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ có thể viết thành một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ như sau :

$$\vec{x} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n}.$$

Như vậy $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các tọa độ của $\vec{x}$ đối với cơ sở $(\overrightarrow{e_i})_{i=1,\dots,n}$.

Nếu A là một không gian con của K - không gian vectơ n chiều E, thì dim A ≤ n. Trong trường hợp dim A = n, thì A = E.

Sau đây là công thức cho số chiều của tổng hai không gian con, tiện lợi cho việc làm một số bài tập :

$$\dim (F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim (F_1 \cap F_2)$$

1.10. Ma trận chuyển từ cơ sở này sang cơ sở khác

Giả sử $\{ \overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_m} \}$ là cơ sở cũ của E và $\{ \overrightarrow{e'_1},\dots,\overrightarrow{e'_m} \}$ là cơ sở mới. Ta có :

$$\overrightarrow{e'_j} = \tau_{1j}\overrightarrow{e_1} + \dots + \tau_{mj}\overrightarrow{e_m}, \ j = 1, \dots, m.$$

Ta được ma trận vuông cấp m :

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_{m1} & \dots & \tau_{mm} \end{pmatrix}$$

Ma trận T có hạng m vì các vectơ cột của nó chính là các vectơ $\overrightarrow{e'_1},\dots,\overrightarrow{e'_m}$ của cơ sở mới biểu thị tuyến tính qua cơ sở cũ. Vậy T khả nghịch, và gọi là ma trận chuyển từ cơ sở $\{ \overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_m} \}$ sang cơ sở $\{ \overrightarrow{e'_1},\dots,\overrightarrow{e'_m} \}$.

1.11. Liên hệ giữa các tọa độ của một vectơ đối với hai cơ sở khác nhau

Giả sử $\vec{x} \in E$, $\{ \overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_m} \}$, $\{ \overrightarrow{e'_1},\dots,\overrightarrow{e'_m} \}$ là hai cơ sở của E, $T = (\tau_{ij})$ là ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai. Ta có các tọa độ của $\vec{x}$ đối với cơ sở thứ nhất biểu diễn qua các tọa độ của $\vec{x}$ đối với cơ sở thứ hai thông qua ma trận T như sau :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \xi_1\overrightarrow{e_1} + \dots + \xi_m\overrightarrow{e_m} = \xi'_1\overrightarrow{e'_m} + \dots + \xi'_m\overrightarrow{e'_m} = \\ &= \xi'_1(\tau_{11}\overrightarrow{e_1} + \dots + \tau_{m1}\overrightarrow{e_m}) + \dots + \xi'_m(\tau_{1m}\overrightarrow{e_1} + \dots + \tau_{mm}\overrightarrow{e_m}) \\ &= (\tau_{11}\xi'_1 + \dots + \tau_{1m}\xi'_m)\overrightarrow{e_1} + \dots + (\tau_{m1}\xi'_1 + \dots + \tau_{mm}\xi'_m)\overrightarrow{e_m} \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \tau_{11}\xi'_1 + \ldots + \tau_{1m}\xi'_m \\
\xi_2 &= \tau_{21}\xi'_1 + \ldots + \tau_{2m}\xi'_m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_m &= \tau_{m1}\xi'_1 + \ldots + \tau_{mm}\xi'_m
\end{aligned}$$

§2. BÀI TẬP

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Hãy chứng tỏ các tập sau là những không gian vectơ :

a) Tập số hữu tỉ **Q** với phép cộng và phép nhân các số hữu tỉ ;

b) Tập số thực **R** với phép cộng các số thực và phép nhân một số thực với một số hữu tỉ ;

c) Tập hợp các đa thức của ẩn x, với hệ số hữu tỉ với phép cộng đa thức và phép nhân một đa thức với một số hữu tỉ ;

d) Tập hợp các đa thức của ẩn x với hệ số thực với phép cộng các đa thức và phép nhân một đa thức với một số thực ;

e) $V = \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ với phép cộng xác định bởi :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) ;$$

phép nhân một phần tử của V với một số hữu tỉ xác định bởi :

$$r(a, b) = (ra, rb)$$

(ở đây **Q** là tập số hữu tỉ, **R** là tập số thực) ;

f) Tập số phức **C** với phép cộng hai số phức và phép nhân số phức với một số thực.

2. Các tập sau có phải là không gian vectơ trên **R** hay không ?

a) Tập **Q** với phép cộng và phép nhân một số hữu tỉ với một số thực ;

b) Tập số nguyên **Z** với phép cộng và phép nhân một số nguyên với một số thực ;

c) Tập V nói trong bài tập 1.e) với phép cộng và phép nhân với số thực r xác định bởi các đẳng thức trong bài 1.e).

3. Chứng minh rằng tập hợp F các hàm số thực xác định trên đoạn [a, b] với phép cộng các hàm số và phép nhân một hàm số với một số thực là một không gian vectơ trên **R**.

4. Cho A và B là hai không gian vectơ trên trường **R**, V = A × B. Trên V xác định phép cộng :

$$(\overrightarrow{\alpha_1},\overrightarrow{\beta_1})+(\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\beta_2})=(\overrightarrow{\alpha_1}+\overrightarrow{\alpha_2},\overrightarrow{\beta_1}+\overrightarrow{\beta_2}),$$

phép nhân với số thực r xác định bởi :

$$r(\vec{\alpha},\vec{\beta})=(r\vec{\alpha},r\vec{\beta}).$$

Chứng minh rằng V là một không gian vectơ trên **R**.

5. Trên tập M = {a} xác định phép cộng và phép nhân với một số hữu tỉ r như sau :

$$a+a=a\ ;\ ra=a,\ r\in\mathbf{Q}.$$

Chứng minh rằng M là một không gian vectơ trên **Q**.

6. Chứng minh tập hợp $\mathbf{R}^N$ các dãy số thực là một **R** - không gian vectơ đối với phép cộng và phép nhân với một số thực thông thường.

7. Chứng minh tập hợp $\mathbf{C}^N$ các dãy số phức là một **C** - không gian vectơ đối với phép cộng và phép nhân với một số phức thông thường.

Lời giải

1. a) Ta hãy nhìn lại định nghĩa không gian vectơ trong (§1, 1.1). Ở đây E = **Q** và K = **Q**. Các phép toán là như sau :

$$E\times E=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$$

$$(x,y)\mapsto x+y \text{ (phép cộng hai số hữu tỷ)}$$

$$K\times E=\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$$

$$(\lambda,x)\mapsto \lambda x \text{ (phép nhân hai số hữu tỷ)}$$

Dễ dàng kiểm nghiệm hai phép toán trên thỏa mãn 5 tính chất của định nghĩa không gian vecơ trong 1.1. Vậy **Q** là một không gian vectơ trên trường **Q**. Cần chú ý là các phần tử của **Q**, khi coi là không gian vectơ, là những vectơ ; còn khi nói tới trường **Q** (trường K trong lý thuyết) thì các phần tử của **Q** là những vô hướng.

b) Trong bài này $E = \mathbf{R}$ và $K = \mathbf{Q}$. Cũng làm như bài a) ta được **R** là một **Q** - không gian vectơ.

c) Ở đây $E = \mathbf{Q}[x]$ và $K = \mathbf{Q}$. Ta có $\mathbf{Q}[x]$ là một **Q** - không gian vectơ.

d) $\mathbf{R}[x]$ là một **R** - không gian vectơ.

e) Trong bài này $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$, $K = \mathbf{Q}$. Các phép toán cộng và nhân với vô hướng như sau :

$$E \times E = (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) \to \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$$
$$((a, b), (c, d)) \mapsto (a + c, b + d)$$
$$K \times E = \mathbf{Q} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) \to \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$$
$$(\lambda, (a, b)) \mapsto (\lambda a, \lambda b)$$

Ta hãy lần lượt chứng minh hai phép toán trên thỏa mãn 5 tính chất trong (§1, 1.1). Hiển nhiên vì **Q** và **R** là những nhóm aben đối với phép cộng các số, nên tích $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ cũng là một nhóm aben với phép cộng thực hiện trên các thành phần của cặp, người ta gọi nó là nhóm tích của các nhóm **Q** và **R**. Mặt khác ta có các đẳng thức sau đây :

$$(\lambda + \mu)(a, b) = ((\lambda + \mu)a, (\lambda + \mu)b) = (\lambda a + \mu a, \lambda b + \mu b)$$
$$= (\lambda a, \lambda b) + (\mu a, \mu b) = \lambda(a, b) + \mu(a, b) ;$$
$$\lambda((a, b) + (c, d)) = \lambda(a + c, b + d) = (\lambda(a + c), \lambda(b + d))$$
$$= (\lambda a + \lambda c, \lambda b + \lambda d) = (\lambda a, \lambda b) + (\lambda c, \lambda d) = \lambda(a, b) + \lambda(c, d) ;$$
$$(\lambda\mu)(a, b) = ((\lambda\mu)a, (\lambda\mu)b) = (\lambda(\mu a), \lambda(\mu b)) =$$
$$= \lambda(\mu a, \mu b) = \lambda(\mu(a, b)) ;$$

$$1(a, b) = (1a, 1b) = (a, b).$$

Vậy $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ là một $\mathbf{Q}$ - không gian vectơ, gọi là $\mathbf{Q}$ - không gian vectơ tích của $\mathbf{Q}$ - không gian vectơ $\mathbf{Q}$ và $\mathbf{Q}$ - không gian vectơ $\mathbf{R}$.

f) Ở đây $E = \mathbf{C}$ và $K = \mathbf{R}$. Ta dễ kiểm nghiệm $\mathbf{C}$ là một $\mathbf{R}$ - không gian vectơ. Nếu thay $\mathbf{R}$ bằng $\mathbf{C}$ ta cũng có $\mathbf{C}$ là một $\mathbf{C}$ - không gian vectơ. Tổng quát, mỗi trường K là một K - không gian vectơ.

2. a) ở đây ta lấy $E = \mathbf{Q}$ và $K = \mathbf{R}$. Phép cộng trong $\mathbf{Q}$ là phép cộng các số hữu tỷ ; hiển nhiên $\mathbf{Q}$ là một nhóm aben với phép cộng các số hữu tỷ. Ta hãy xét phép nhân với vô hướng :

$$K \times E = \mathbf{R} \times \mathbf{Q} \to E = \mathbf{Q}$$
$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

λ là một số thực, x là một số hữu tỷ, thế thì trừ khi λ là hữu tỷ, còn nếu $\lambda \notin \mathbf{Q}$ thì $\lambda x \in \mathbf{R}$, nhưng $\lambda x \notin \mathbf{Q}$. Với phép nhân vô hướng định nghĩa như vậy, ta không có một ánh xạ từ $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}$ vào $\mathbf{Q}$, nghĩa là ta không có phép nhân với một vô hướng, vậy $\mathbf{Q}$ không phải là một $\mathbf{R}$ - không gian vectơ.

b) $\mathbf{Z}$ không phải là một $\mathbf{R}$ - không gian vectơ cũng cùng lý do như bài a).

c) Trong bài 1.c) ta xét $\mathbf{Q}$ - không gian vectơ $\mathbf{Q}$ và $\mathbf{Q}$ - không gian vectơ $\mathbf{R}$, và ta được $\mathbf{Q}$ - không gian vectơ tích $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$. Bây giờ ta muốn sửa trường vô hướng bằng cách thay $\mathbf{Q}$ bằng $\mathbf{R}$, lúc đó $\mathbf{Q}$ không phải là $\mathbf{R}$ - không gian vectơ theo a), vậy ta sẽ không có không gian tích $\mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ vì không có phép nhân vô hướng :

$$K \times E = \mathbf{R} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) \to \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$$
$$(\lambda, (a, b)) \mapsto (\lambda a, \lambda b)$$

do $\lambda a \notin \mathbf{Q}$ với $\lambda \in \mathbf{R}$ và $a \in \mathbf{Q}$.

3. Ở đây $E = F$, với

$$F = \{f : [a, b] \to \mathbf{R} \mid f \text{ là ánh xạ}\}$$

và $K = \mathbf{R}$. Các phép cộng và phép nhân với vô hướng là như sau :

$$E \times E = F \times F \to F$$
$$(f, g) \mapsto f + g : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$K \times E = \mathbf{R} \times F \to F$$
$$(\lambda, f) \mapsto \lambda f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda.f(x)$$

Trước hết ta hãy chứng minh F là một nhóm aben đối với phép cộng :

$$f + g : [a, b] \to \mathbf{R} \quad ; \quad g + f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f(x) + g(x) \qquad\qquad x \mapsto g(x) + f(x)$$

Nhưng $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ với mọi $x \in [a, b]$ nên $f + g = g + f$, nghĩa là phép cộng giao hoán.

$$(f + g) + h : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto (f(x) + g(x)) + h(x)$$

$$f + (g + h) : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f(x) + (g(x) + h(x))$$

Do $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$ với mọi $x \in [a, b]$, nên $(f + g) + h = f + (g + h)$. Vậy phép cộng kết hợp.

$$O : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto 0$$

$$O + f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto 0 + f(x) = f(x)$$

Vậy $O + f = f$ với mọi $f \in F$, hàm O là phần tử không.

$$-f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto -f(x)$$

Dễ dàng thấy rằng -f xác định như trên là hàm đối của hàm f.

Vậy F là một nhóm aben đối với phép cộng. Mặt khác ta có :

$$(\lambda + \mu)f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto (\lambda + \mu).f(x) = \lambda.f(x) + \mu.f(x)$$

$$\lambda f + \mu f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \lambda.f(x) + \mu.f(x)$$

vậy $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$;

$$\lambda(f + g) : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \lambda.(f(x) + g(x)) = \lambda.f(x) + \lambda.g(x)$$

$$\lambda f + \lambda g : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \lambda.f(x) + \lambda.g(x)$$

vậy $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$;

$$(\lambda\mu)f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto (\lambda\mu).f(x)$$

$$\lambda(\mu f) : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \lambda.(\mu.f(x)) = (\lambda\mu).f(x)$$

vậy $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$;

$$1.f : [a, b] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto 1.f(x) = f(x)$$

vậy $1.f = f$ với mọi $f \in F$.

Ta kết luận F là một không gian vectơ trên **R**. Trong chứng minh ta nhận xét, sở dĩ các phép cộng và phép nhân với vô hướng thỏa mãn các yêu cầu của một không gian vectơ vì **R** là một **R** - không gian vectơ **R**. Cho nên ta có thể tổng quát hóa bài toán bằng cách thay **R** - không gian vectơ **R** bằng một K - không gian vectơ G, [a, b] bằng một tập hợp I tùy ý khác rỗng ; lúc đó tập hợp F là :

$$F = \{f : I \to G \mid f \text{ ánh xạ}\}$$

với phép cộng và phép nhân với vô hướng xác định tương tự như trên :

$$\begin{aligned} &F \times F \to F \\ &(f, g) \mapsto f + g : I \to G \\ &\qquad\qquad\qquad x \mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} &K \times F \to F \\ &(\lambda, f) \mapsto \lambda f : I \to G \\ &\qquad\qquad\qquad x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda.f(x) \end{aligned}$$

Việc chứng minh F là một K - không gian vectơ hoàn toàn tương tự như trên do G là một K - không gian vectơ. Người ta thường ký hiệu F bằng G^I. Nhưng tập hợp G^I lại là tích Đề các $\prod_{i \in I} G_i$, với $G_i = G$ cho mọi $i \in I$. Thật vậy cho

$$\begin{aligned} f : I &\to G \\ i &\mapsto f(i) \end{aligned}$$

ta được họ $\left(f(i)\right)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$, và ngược lại cho họ $(g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i$ ta được ánh xạ

$$\begin{aligned} f : I &\to G \\ i &\mapsto f(i) = g_i \end{aligned}$$

Cho nên người ta thường viết tích Đề các $\prod G_i$, với $G_i = G$ bằng G^I. Trong trường hợp $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ta có $G^n = \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_{n \text{ lần}}$.

Từ các điều nói trên, ta được : khi G là một K - không gian vectơ, thì ta cũng có tích Đề các G^I là một K - không gian vectơ, với phép cộng và phép nhân vô hướng xác định theo (1) mà người ta nói là cảm sinh bởi các phép toán của K - không gian vectơ G.

4. Ta tiến hành tương tự như bài 1.e) và được V là một **R** - không gian vectơ, tích của **R** - không gian vectơ A và **R** - không gian vectơ B. Chú ý: khi nói tới tích của hai không gian vectơ thì phép cộng phải là phép cộng trên các thành phần và phép nhân với vô hướng cũng là phép nhân trên các thành phần, nghĩa là các phép toán của không gian vectơ tích được cảm sinh bởi các phép toán của mỗi thành phần của tích. Bài này đã tổng quát hóa bài 1. e) lên một bước bằng cách thay **Q** bằng A, **R** bằng B và trường vô hướng **Q** bằng **R**. Ta cũng có thể tổng quát hơn nữa bằng cách thay A và B là những K - không gian, và ta được K - không gian vectơ tích A × B.

Trên đây ta đã xét tích của hai K - không gian vectơ, ta cũng có thể xét tích của nhiều K - không gian vectơ, cụ thể ta xét một hệ $(A_i)_{i\in I}$ những K - không gian vectơ và K - không gian vectơ tích $\prod_{i\in I} A_i$ có các phép toán sau đây :

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I},$$

$$\lambda(x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I}.$$

Khi các $A_i = A$, thì $\prod_{i\in I} A_i = A^I$, và ta thấy lại điều đã nói trong bài 3.

5. Hiển nhiên M = {a} là một nhóm aben với phép cộng đã xác định, đó là nhóm tầm thường chỉ chứa phần tử không mà ở đây là a. Đối với phép nhân với các số hữu tỷ, đóng vai trò các vô hướng, ta có đầy đủ các tính chất mà một **Q** - không gian vectơ phải thỏa mãn. Đây là **Q** - không gian vectơ tầm thường chỉ có một vectơ $\vec{0}$, đó là phần tử độc nhất a của M.

6. Tập hợp các dãy số thực chính là tập hợp $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ các ánh xạ từ **N** vào **R**. Đây là một trường hợp đặc biệt của trường hợp tổng quát đã đề cập ở trong các bài 3 và 4 ; $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ là một **R** - không gian vectơ với các phép toán :

$$(a_i)_{i\in \mathbf{N}} + (b_i)_{i\in \mathbf{N}} = (a_i + b_i)_{i\in \mathbf{N}},$$

$$\lambda(a_i)_{i\in \mathbf{N}} = (\lambda a_i)_{i\in \mathbf{N}}$$

7. $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ là một không gian vectơ trên trường số phức **C** ; đây cũng là một trường hợp đặc biệt của trường hợp tổng quát đã đề cập ở trong các bài 3 và 4.

KHÔNG GIAN CON

8. Chứng minh rằng :

a) $\mathbf{Q}$ là không gian vectơ con của không gian vectơ $\mathbf{R}$ trên $\mathbf{Q}$;

b) Tập P_n gồm đa thức 0 và các đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ với bậc $f(x) \leq n$, (n là một số tự nhiên cố định), là một không gian con của không gian vectơ $\mathbf{R}[x]$ trên trường $\mathbf{R}$.

9. Cho không gian vectơ $\mathbf{R}^3$ trên trường số thực $\mathbf{R}$. Các tập con sau của $\mathbf{R}^3$ có phải là không gian con của $\mathbf{R}^3$ hay không :

a) $E = \{(a_1, 0, a_3) \mid a_i \in \mathbf{R}\}$;

b) $F = \{(a_1, a_2, -a_1) \mid a_i \in \mathbf{R}\}$;

c) $G = \{(a_1, a_2, a_1 + a_2) \mid a_i \in \mathbf{R}\}$;

d) $H = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0, a_i \in \mathbf{R}\}$;

e) $L = \{(a_1, a_2, a_1a_2) \mid a_i \in \mathbf{R}\}$.

10. Chứng minh tập hợp E các hàm số thực liên tục trên một khoảng I của $\mathbf{R}$ là một $\mathbf{R}$ – không gian vectơ.

11. Chứng minh tập hợp E các hàm số thực có đạo hàm trên một khoảng I của $\mathbf{R}$ là một $\mathbf{R}$ – không gian vectơ.

12. Chứng minh tập hợp E các dãy số thực bị chặn là một $\mathbf{R}$ – không gian vectơ.

13. Chứng minh tập hợp F các dãy số thực bằng 0 tất cả trừ một số hữu hạn là một $\mathbf{R}$ – không gian vectơ.

14. Cho không gian vectơ V trên trường số thực $\mathbf{R}$, $\vec{\alpha}$ là một vectơ cố định thuộc V. Chứng minh rằng tập hợp

$$W = \{r\vec{\alpha} \mid r \in \mathbf{R}\} \text{ là một không gian con của V.}$$

15. Cho $(W_i \mid i \in I)$ là một họ tuỳ ý những không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng

$$W = \bigcap_{i \in I} W_i$$

là một không gian con của V.

16. Cho U, W là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng U + W là giao của tất cả các không gian con của V chứa U và W.

17. Hợp của hai không gian vectơ con của E là một không gian vectơ con của E khi và chỉ khi cái này chứa trong cái kia.

18. Giả sử A là một không gian vectơ con của E. Phần bù E - A của A trong E là một không gian vectơ con hay không ?

Lời giải

8. a) Để làm các bài tập loại này, ta xem lại (§1, 1.2) về không gian vectơ con. Trước hết ta có $\varnothing \neq \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Mặt khác, nếu $x, y, \lambda \in \mathbf{Q}$ ta dễ dàng thấy : $x + y \in \mathbf{Q}$ và $\lambda x \in \mathbf{Q}$. Vậy **Q** là không gian vectơ con của **Q** - không gian vectơ **R**.

b) Hiển nhiên $P_n \neq \varnothing$. Mặt khác giả sử $f(x), g(x) \in P_n$ và $\lambda \in \mathbf{R}$. Thế thì

$$\text{bậc } (f(x) + g(x)) \leq n, \text{ nếu } f(x) + g(x) \neq 0$$

$$\text{bậc } (\lambda f(x)) \leq n, \text{ nếu } \lambda f(x) \neq 0$$

Vậy $f(x) + g(x)$ và $\lambda f(x)$ là những đa thức thuộc P_n. Chú ý nếu $f(x) + g(x) = 0$ hay $\lambda f(x) = 0$ thì hiển nhiên chúng thuộc P_n.

9. Ta lần lượt có :

* $E \neq \varnothing$

* $(a_1, 0, a_3) + (b_1, 0, b_3) = (a_1 + b_1, 0, a_3 + b_3) \in E$

* $\lambda(a_1, 0, a_3) = (\lambda a_1, 0, \lambda a_3) \in E$.

Vậy E là một không gian vectơ con của $\mathbf{R}^3$.

b) * $F \neq \varnothing$

* $(a_1, a_2, -a_1) + (b_1, b_2, -b_1) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, -(a_1 + b_1)) \in F$

* $\lambda(a_1, a_2, -a_1) = (\lambda a_1, \lambda a_2, -\lambda a_1) \in F$.

Vậy F là một không gian vectơ con của $\mathbf{R}^3$.

c) Tương tự.

d) * $H \neq \varnothing$ vì $(0, 0, 0) \in H$

* $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \in H$ vì

$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 0 + 0 = 0$

* $\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) \in H$.

e) - $L \neq \varnothing$

* Xét $(1, 1, 1) \in L$. Ta có $(1, 1, 1) + (1, 1, 1) = (2, 2, 2) \notin L$. Vậy L không phải là một không gian vectơ con của $\mathbf{R}^3$.

10. Ở đây ta phải hiểu ngầm là phép cộng và phép nhân với vô hướng $\lambda \in \mathbf{R}$ được thực hiện như trong bài tập 3. Nếu chứng minh thẳng E là một không gian vectơ trên $\mathbf{R}$, ta phải lần lượt chứng minh tổng của hai hàm số liên tục trên I là một hàm số liên tục trên I và tích của một số thực với một hàm số liên tục trên I là một hàm số thực trên I. Tiếp theo ta còn phải chứng minh các tiên đề của một không gian vectơ được thỏa mãn đối với E. Chúng ta sẽ không làm như vậy. Ta lấy lại bài tập 3 với không gian F là không gian các hàm số thực xác định trên khoảng I. Như vậy $\varnothing \neq E \subset F$ vì hàm $0 \in E$. Mặt khác tổng của hai hàm liên tục trên I là liên tục trên I, và tích của một số thực với một hàm liên tục trên I là một hàm liên tục tục trên I. Vậy E là một không gian vectơ con của F, cho nên E là một không gian vectơ (trên $\mathbf{R}$).

11. Cũng làm như bài 10.

12. Cũng tiến hành với tinh thần như đã làm với các bài 10, 11, ta xem lại bài 6 trong đó $\mathbf{R}^N$ là một $\mathbf{R}$ - không gian vectơ. Ta hãy chứng minh $E \subset \mathbf{R}^N$ là một không gian vectơ con của $\mathbf{R}^N$. Ta lần lượt có :

* $E \neq \varnothing$ vì dãy $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ với mọi $a_i = 0$ thuộc E;

* Giả sử (a_i) và (b_i) thuộc E. Điều đó có nghĩa tồn tại hai số thực dương A và B sao cho $|a_i| < A$ và $|b_i| < B$ với mọi $i \in N$. Hiển nhiên ta có $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i| < A + B$. Vậy tổng của hai dãy bị chặn là một dãy bị chặn;

* Giả sử $(a_i) \in E$ và $\lambda \in \mathbf{R}$. Hiển nhiên ta có $|\lambda a_i| = |\lambda||a_i| < |\lambda|A$. Vậy tích của dãy (a_i) với một số thực λ cũng là một dãy bị chặn. Vậy E là

một không gian vectơ con của $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ cho nên nó là một không gian vectơ trên $\mathbf{R}$.

13. Giả sử $(a_i)_{i \in \mathbf{N}} \in F$, điều đó có nghĩa có một tập hợp hữu hạn $I \subset \mathbf{N}$ sao cho $a_i \neq 0$ với $i \in I$ và $a_i = 0$ với $i \notin I$. Ta lần lượt có :

* $F \neq \varnothing$ vì dãy $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ với mọi $a_i = 0$ thuộc F (trong trường hợp này $I = \varnothing$)

Giả sử (a_i) và (b_i) thuộc F. Điều đó có nghĩa tồn tại hai bộ phận hữu hạn I và J của $\mathbf{N}$ sao cho $a_i \neq 0$ với $i \in I$ và $a_i = 0$ với $i \notin I$, $b_i \neq 0$ với $i \in J$ và $b_i = 0$ với $i \notin J$. Hiển nhiên ta có $a_i + b_i = 0$ với $i \notin I \cup J$ và khi $i \in I \cup J$ thì $a_i + b_i$ có thể khác 0 hay bằng 0, nghĩa là $a_i + b_i$ khác 0 với i thuộc một bộ phận của $I \cup J$, nói một cách khác dãy $(a_i + b_i)_{i \in \mathbf{N}} \in F$.

* Giả sử $(a_i) \in F$ và $\lambda \in \mathbf{R}$. Hiển nhiên dãy $(\lambda a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ bằng 0 tất cả trừ một số hữu hạn. Vậy F là một không gian vectơ con của $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, cho nên nó là một $\mathbf{R}$ - không gian vectơ.

14. Trước hết $W \neq \varnothing$ vì $\vec{\alpha} = 1.\ \vec{\alpha} \in W$. Giả sử $r, s \in \mathbf{R}$, thế thì $r\vec{\alpha} + s\vec{\alpha} = (r + s)\vec{\alpha} \in W$, và $s(r\vec{\alpha}) = (sr)\vec{\alpha} \in W$. Vậy W là không gian con của không gian vectơ V, sinh bởi hệ vectơ $\{\vec{\alpha}\}$ chỉ có một vectơ $\vec{\alpha}$ (xem §1, 1.3).

15. $W \neq \varnothing$ vì vectơ $\vec{0}$ thuộc mọi W_i nên thuộc W. Giả sử $\vec{x}, \vec{y} \in W$ và $\lambda \in K$ (ta giả sử V là một không gian vectơ trên một trường K). Ta có $\vec{x}, \vec{y} \in W_i$ với mọi $i \in I$. Do các W_i là những không gian con của V, nên $\vec{x} + \vec{y} \in W_i$ và $\lambda\vec{x} \in W_i$ với mọi $i \in I$. Vậy $\vec{x} + \vec{y} \in W$ và $\lambda\vec{x} \in W$. Do đó W là không gian con của V.

16. Theo (§1, 1.4)

$$U + W = \{\vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U,\ \vec{w} \in W\}$$

là không gian con của V, tổng của U và W. Hiển nhiên U + W chứa U và W vì $\vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$ và $\vec{w} = \vec{0} + \vec{w}$ với $\vec{u} \in U$ và $\vec{w} \in W$. Mặt khác xét họ $(V_i)_{i \in I}$ các không gian con của V chứa U và W. Họ này không rỗng vì U + W là một không gian con thuộc họ. Vậy $\bigcap_{i \in I} V_i \subset U + W$.

Nhưng ta có $\vec{u} + \vec{w} \in V_i$ với mọi $\vec{u} \in U$ và $\vec{w} \in W$, vậy $U + W \subset V_i$, $\forall i \in I$. Từ đó $U + W \subset \bigcap_{i \in I} V_i$. Kết hợp với bao hàm thức ngược ở trên, ta được $U + W = \bigcap_{i \in I} V_i$.

17. Giả sử F và G là hai không gian con của E. Nếu $F \subset G$ thì $F \cup G = G$, vậy $F \cup G$ là một không gian con của E. Đảo lại giả sử $F \cup G$ là một không gian con của E. Ta hãy chứng minh hoặc $F \subset G$ hoặc $G \subset F$. Ta hãy chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $F \not\subset G$ và $G \not\subset F$, điều đó có nghĩa tồn tại $\vec{f} \in F$ sao cho $\vec{f} \notin G$ và tồn tại $\vec{g} \in G$ sao cho $\vec{g} \notin F$. Vì $F \cup G$ là không gian con, nên $\vec{f} + \vec{g} \in F \cup G$. Vậy $\vec{f} + \vec{g}$ thuộc F hoặc thuộc G. Nếu $\vec{f} + \vec{g} \in F$, thì $(\vec{f} + \vec{g}) - \vec{f} = \vec{g} \in F$, mâu thuẫn với $\vec{g} \notin F$. Nếu $\vec{f} + \vec{g} \in G$, thì $(\vec{f} + \vec{g}) - \vec{g} = \vec{f} \in G$, mâu thuẫn với $\vec{f} \notin G$. Vậy ta phải có hoặc $F \subset G$ hoặc $G \subset F$.

18. Xét E - A. Hiển nhiên E - A không thể là không gian con vì $\vec{0} \notin E - A$.

SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH - SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

19. Xét xem các hệ vectơ sau trong $\mathbf{R}^3$ hệ nào độc lập tuyến tính :

a) $\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{\varepsilon_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{\varepsilon_3} = (1, 0, 1)$;

b) $\overrightarrow{\alpha_1} = (2, 0, 3)$, $\overrightarrow{\alpha_2} = (1, 1, 2)$, $\overrightarrow{\alpha_3} = (-1, 2, -1)$;

c) $\overrightarrow{\beta_1} = (0, -2, 3)$, $\overrightarrow{\beta_2} = (4, 1, 0)$, $\overrightarrow{\beta_3} = (3, 1, 1)$;

d) $\overrightarrow{\gamma_1} = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{\gamma_2} = (2, 0, -1)$, $\overrightarrow{\gamma_3} = (-5, 6, 11)$.

20. Xét xem các hệ vectơ sau trong không gian các đa thức $\mathbf{R}[x]$ trên trường số thực $\mathbf{R}$, hệ nào độc lập tuyến tính :

a) $\overrightarrow{\alpha_1} = 1$, $\overrightarrow{\alpha_2} = x$, $\overrightarrow{\alpha_3} = x^2$;

b) $\overrightarrow{\beta_1} = 1$, $\overrightarrow{\beta_2} = x$, $\overrightarrow{\beta_3} = x^2$, $\overrightarrow{\beta_4} = 2x^2 + 3$.

21. Chứng minh rằng nếu hệ vectơ

$$\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_r}$$

của không gian vectơ V trên trường K có hai vectơ $\overrightarrow{\alpha_i}$ và $\overrightarrow{\alpha_j}$ sao cho $\overrightarrow{\alpha_i} = k\overrightarrow{\alpha_j}$ thì đó là hệ phụ thuộc tuyến tính.

22. Chứng minh rằng hệ vectơ

$$\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_r}$$

phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một vectơ $\overrightarrow{\alpha_i}$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

23. Chứng minh rằng nếu

$$\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}$$

là một hệ vectơ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ V trên trường K thì hệ vectơ :

$\overrightarrow{\beta_1} = \overrightarrow{\alpha_1}$, $\quad \overrightarrow{\beta_2} = \overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2}$,

$\overrightarrow{\beta_3} = \overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} + \overrightarrow{\alpha_3}$, $\quad \overrightarrow{\beta_4} = \overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} + \overrightarrow{\alpha_3} + \overrightarrow{\alpha_4}$

cũng là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của V.

24. Xét **R** - không gian vectơ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ các hàm số thực xác định trên **R**. Giả sử $F = \{ f_{a_1}, f_{a_2}, \ldots, f_{a_m} \}$ là một họ các hàm xác định như sau :

$$f_{a_i} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto |x - a_i|,\ a_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, \ldots, m$$

trong đó $a_i \neq a_j$ khi $i \neq j$. Chứng minh hệ F độc lập tuyến tính.

25. Xét $\mathbf{R}$ - không gian vectơ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Giả sử $G = \{ g_{a_1}, g_{a_2}, g_{a_3} \}$ là một họ các hàm xác định như sau :

$$g_{a_i} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$x \mapsto x - a_i,\ a_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, 3$$

trong đó $a_i \neq a_j$ khi $i \neq j$. Chứng minh hệ G phụ thuộc tuyến tính.

Lời giải

19. a) Chúng ta hãy tìm những số thực x, y, z để $x\overrightarrow{\varepsilon_1} + y\overrightarrow{\varepsilon_2} + z\overrightarrow{\varepsilon_3} = x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) + z(1, 0, 1) = (x + z, x + y, y + z) = (0, 0, 0)$. Ta được hệ phương trình tuyến tính :

$$\begin{cases} x + \quad\ z = 0 \\ x + y \quad\ = 0 \\ \quad\ y + z = 0 \end{cases}$$

mà định thức các hệ số là

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ta có một hệ Cramer với nghiệm duy nhất là $x = y = z = 0$. Vậy hệ vectơ độc lập tuyến tính.

b), c), d) làm tương tự như a), ta có các hệ vectơ đã cho là độc lập tuyến tính.

20. a) Chúng ta hãy tìm những số thực a, b, c để

$$a\overrightarrow{\alpha_1} + b\overrightarrow{\alpha_2} + c\overrightarrow{\alpha_3} = a.1 + b.x + c.x^2 = 0.$$

Để đa thức $a + bx + cx^2$ bằng đa thức 0, ta phải có $a = b = c = 0$. Vậy hệ vectơ $\{ \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3} \}$ là độc lập tuyến tính.

b) Chúng ta hãy tìm những số thực a, b, c, d để

$$a + bx + cx^2 + d(2x^2 + 3) = a + 3d + bx + x^2(c + 2d) = 0.$$

Vậy ta phải có

$$\begin{cases} a + 3d = 0 \\ b = 0 \\ c + 2d = 0 \end{cases}$$

Ta nhận xét ta có thể lấy a = -3, b = 0, c = -2, d = 1 để đa thức trên bằng 0. Vậy ta có :

$$-3\overrightarrow{\beta_1} + 0\overrightarrow{\beta_2} - 2\overrightarrow{\beta_3} + 1.\overrightarrow{\beta_4} = \vec{0},$$

nghĩa là hệ vectơ $\{\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_3}, \overrightarrow{\beta_4}\}$ phụ thuộc tuyến tính.

21. Xem (§1, 1.6, hệ quả 3).

22. Xem (§1, 1.6, hệ quả 3).

23. Ta hãy tìm những phần tử x, y, z, t ∈ K để

$x\overrightarrow{\beta_1} + y\overrightarrow{\beta_2} + z\overrightarrow{\beta_3} + t\overrightarrow{\beta_4} = x\overrightarrow{\alpha_1} + y(\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2}) + z(\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} + \overrightarrow{\alpha_3}) +$
$+ t(\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} + \overrightarrow{\alpha_3} + \overrightarrow{\alpha_4}) = (x + y + z + t)\overrightarrow{\alpha_1} + (y + z + t)\overrightarrow{\alpha_2} +$
$+ (z + t)\overrightarrow{\alpha_3} + t\overrightarrow{\alpha_4} = \vec{0}$. Vì hệ vectơ $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}\}$ độc lập tuyến tính nên ta phải có

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ \quad\; y + z + t = 0 \\ \qquad\;\; z + t = 0 \\ \qquad\qquad t = 0 \end{cases}$$

Đây là một hệ Cramer đối với x, y, z, t vì định thức các hệ số bằng

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Hệ có một nghiệm duy nhất : x = y = z = t = 0.Vậy hệ vectơ $\{\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_3}, \overrightarrow{\beta_4}\}$ độc lập tuyến tính.

24. Giả sử hệ F phụ thuộc tuyến tính. Thế thì theo (§1, 1.6, hệ quả 3) sẽ có một vectơ của F, ở đây là một hàm, chẳng hạn hàm f_{a_m} biểu thị tuyến tính qua các hàm còn lại của F, nghĩa là có $\lambda_i \in \mathbf{R}$, i = 1, 2, ..., m - 1, để

$$f_{a_m} = \lambda_1 f_{a_1} + \lambda_2 f_{a_2} + \ldots + \lambda_{m-1} f_{a_{m-1}}$$

hay $$|x - a_m| = \lambda_1|x - a_1| + \lambda_2|x - a_2| + \ldots + \lambda_{m-1}|x - a_{m-1}|$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$. Nhưng hiển nhiên vế trái của đẳng thức là một hàm không có đạo hàm tại $x = a_m$, trong khi vế phải lại có đạo hàm tại $x = a_m$. Vậy F không thể phụ thuộc tuyến tính, nói cách khác F là một hệ vectơ độc lập tuyến tính.

25. Nếu hệ G phụ thuộc tuyến tính, ta phải có một vectơ của hệ biểu thị tuyến tính qua các vectơ còn lại của hệ. Vì ba vectơ của G đều có vai trò như nhau, nên ta lấy g_{a_3} chẳng hạn, và tìm cách biểu thị tuyến tính nó qua g_{a_1} và g_{a_2}, nghĩa là tìm $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ sao cho

$$g_{a_3} = \lambda_1 g_{a_1} + \lambda_2 g_{a_2}$$

hay $$x - a_3 = \lambda_1(x - a_1) + \lambda_2(x - a_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)x - (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$. Từ đó ta phải có

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = a_3 \end{cases}$$

Đây là một hệ Cramer đối với λ_1 và λ_2 vì định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \neq 0$$

Từ đó ta được một nghiệm duy nhất

$$\lambda_1 = (a_2 - a_3)/(a_2 - a_1),\ \lambda_2 = (a_3 - a_1)/(a_2 - a_1).$$

Vậy hệ G là phụ thuộc tuyến tính, nhưng các vectơ g_{a_1} và g_{a_2} là độc lập tuyến tính vì g_{a_3} biểu thị tuyến tính một cách duy nhất qua chúng. Ta còn có thể nói các vectơ của G đôi một độc lập tuyến tính vì chúng có vai trò như nhau.

Ta có thể mở rộng bài toán bằng cách xét hệ

$$G' = \{ g_{a_1}, g_{a_2}, g_{a_3}, \ldots, g_{a_m} \}, a_i \in \mathbf{R}$$

trong đó $g_{a_i} = x - a_i$, với $a_i \neq a_j$ khi $i \neq j$. Hiển nhiên G' là phụ thuộc tuyến tính vì hệ con G của nó phụ thuộc tuyến tính (xem §1, 1.6, hệ quả 1).

HẠNG CỦA HỆ HỮU HẠN VECTƠ – HẠNG CỦA MA TRẬN

26. Tìm hạng của ma trận sau :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{pmatrix}$; b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

27. Trong $\mathbf{R}^4$ tìm hạng của các hệ vectơ sau :

a) $\overrightarrow{\alpha_1} = (-1, 2, 0, 1)$, $\overrightarrow{\alpha_2} = (1, 2, 3, -1)$, $\overrightarrow{\alpha_3} = (0, 4, 3, 0)$;

b) $\overrightarrow{\beta_1} = (-1, 4, 8, 12)$, $\overrightarrow{\beta_2} = (2, 1, 3, 1)$,

$\overrightarrow{\beta_3} = (-2, 8, 16, 24)$, $\overrightarrow{\beta_4} = (1, 1, 2, 3)$.

28. Tìm hệ con độc lập tuyến tính tối đại của hệ vectơ sau trong không gian $\mathbf{R}^4$:

$\overrightarrow{\alpha_1} = (1, 2, 0, -1)$, $\overrightarrow{\alpha_2} = (0, 1, 3, -2)$,

$\overrightarrow{\alpha_3} = (-1, 0, 2, 4)$, $\overrightarrow{\alpha_4} = (3, 1, -11, 0)$.

29. Tìm giá trị của x để hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & x & 6 \end{pmatrix}$$

bằng 2.

30. Coi **R** như một **Q** - không gian vectơ, tính hạng của hệ vectơ $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$.

31. Xét **R** - không gian vectơ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ các hàm số thực xác định trên **R**. Tính hạng của hệ vectơ $(f_i)_{1 \le i \le n}$ trong đó

$$f_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \sin ix \text{ , } i = 1, 2, \ldots, n$$

Lời giải

26. a) Ta có $|A| = 0$ và định thức con cấp 2 ở góc trái

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 12 = 10 \neq 0.$$

Vậy hg A = 2.

b) $|B| = 6 \neq 0$; vậy hg B = 3.

c) Ở đây hạng của C nhiều nhất là bằng 3 vì C chỉ có 3 dòng. Ta có định thức cấp 3 ở góc trái

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Vậy hg C = 3.

d) Ta có $|D| = 0$ và định con cấp 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vậy hg D = 3.

27. a) Ta thấy ngay :

$$\overrightarrow{\alpha_3} = \overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2}$$

trong khi $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}\}$ là độc lập tuyến tính vì các tọa độ của chúng không tỷ lệ với nhau. Vậy hạng của hệ là 2.

b) Ta thấy ngay $\overrightarrow{\beta_3} = 2\overrightarrow{\beta_1}$, cho nên vấn đề được đưa về tìm hạng của $\{\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_4}\}$. Ta xét ma trận nhận được từ hệ vectơ đó :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

trong đó định thức con cấp ba nằm ở góc trái có giá trị là 5. Vậy hg $\{\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_3}, \overrightarrow{\beta_4}\} = 3$.

28. Ta xét ma trận A tạo bởi hệ vectơ $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

với các vectơ dòng lần lượt là $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}$. Ta cũng có $|A| = 0$ và định thức con cấp 3 ở góc trái có giá trị $-4 \neq 0$. Vậy $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$ là một hệ con độc lập tối đại. Ta cũng có thể tính để thấy :

$$\overrightarrow{\alpha_4} = 2\overrightarrow{\alpha_1} - 3\overrightarrow{\alpha_2} - \overrightarrow{\alpha_3}.$$

29. Trước hết định thức con cấp 2 ở góc trái có giá trị $-5 \neq 0$. Vậy hg$A \geq 2$. Muốn hg $A = 2$, ta chỉ cần cho x một giá trị để $|A| = 0$. Tính $|A|$ ta được $|A| = 3x - 6$. Vậy chỉ có một giá trị của x làm $|A| = 0$, đó là $x = 2$. Thực ra nhìn ma trận ta cũng thấy ngay khi $x = 2$ thì dòng thứ nhất và thứ ba tỷ lệ với nhau và chỉ có một giá trị $x = 2$ làm triệt tiêu $|A|$ vì khai triển định thức $|A|$ theo dòng thứ ba ta được một đa thức bậc nhất đối với x.

30. Trước hết $\{1, \sqrt{2}\}$ là độc lập tuyến tính, nếu không ta sẽ có $\sqrt{2}$ biểu thị tuyến tính qua 1, nghĩa là sẽ có

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{với } p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0.$$

Bình phương hai vế của đẳng thức ta được :

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

hay

(1) $$2q^2 = p^2.$$

Vậy 2 có mặt ở vế trái của đẳng thức với lũy thừa lẻ và ở vế phải với lũy thừa chẵn, mâu thuẫn với sự phân tích duy nhất một số nguyên thành thừa số nguyên tố. Vậy hệ $\{1, \sqrt{2}\}$ độc lập tuyến tính.

Giả sử hệ $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ phụ thuộc tuyến tính. Thế thì ta phải có $\sqrt{3}$ biểu thị tuyến tính qua 1 và $\sqrt{2}$, nghĩa là có $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Q}$ sao cho :

$$\sqrt{3} = \lambda_1.1 + \lambda_2.\sqrt{2}.$$

Bình phương hai vế ta được :

$$3 = \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2\sqrt{2}.$$

Nếu $\lambda_2 = 0$, ta sẽ có :

$$3 = \frac{r^2}{s^2} \quad r, s \in \mathbf{Z}, s \neq 0$$

hay

(2) $$3s^2 = r^2.$$

Lý luận như đối với đẳng thức (1), ta đi tới một mâu thuẫn.

Nếu $\lambda_1 = 0$, ta sẽ có :

$$3 = 2\frac{u^2}{v^2} \quad u, v \in \mathbf{Z}, v \neq 0$$

hay

(4) $$3v^2 = 2u^2.$$

Ở đẳng thức (4), ta cũng đi tới mâu thuẫn như với (1).

Nếu λ_1 và λ_2 đều khác không, từ đẳng thức (2) ta sẽ đi tới $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ, nhưng điều này ta đã thấy là không thể sảy ra được ở đẳng thức (1). Kết luận hệ $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ là độc lập tuyến tính, cho nên hạng của hệ là 3.

31. Ta hãy chứng minh bằng quy nạp theo n rằng hệ vectơ $\{f_i\}_{1\le i\le n}$ là độc lập. Khi n = 1 hệ $\{f_1\}$ hiển nhiên là độc lập tuyến tính vì f_1 không phải là hàm 0. Ta giả sử $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}$ độc lập tuyến tính. Nếu $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_n\}$ phụ thuộc tuyến tính thì ta phải có f_n biểu thị tuyến tính qua $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, giả sử

$$f_n = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k + \ldots + \lambda_{n-1} f_{n-1}$$

hay với mọi $x \in \mathbf{R}$, ta có :

(1) $$\sin nx = \lambda_1 \sin x + \ldots + \lambda_k \sin kx + \ldots + \lambda_{n-1} \sin (n-1)x$$

trong đó các λ_i không đồng thời bằng 0 vì $f_n \neq 0$, giả sử $\lambda_k \neq 0$. Lấy đạo hàm hai lần hai vế của (1). Ta được :

(2) $$-n^2 \sin nx = -\lambda_1 \sin x + \ldots - \lambda_k k^2 \sin kx + \ldots - \lambda_{n-1}(n-1)^2 \sin (n-1)x$$

hay chia hai vế của đẳng thức (2) với $-n^2$, ta được :

(3) $$\sin nx = \frac{\lambda_1}{n^2}\sin x + \ldots + \frac{\lambda_k}{n^2}\sin kx + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{n^2}\sin(n-1)x$$

Vì $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ là độc lập, nên f_n biểu diễn một cách duy nhất qua chúng. So sánh (1) và (3), ta phải có các hệ số của vế phải bằng nhau, cụ thể ta phải có

$$\lambda_k = \frac{\lambda_k}{n^2}$$

hay $$\lambda_k\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=0$$

Nhưng $1 - \frac{1}{n^2} \neq 0$ vì $n \neq 1$, vậy $\lambda_k = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $\lambda_k \neq 0$.

Vậy hg $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} = n$.

CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

32. Các hệ vectơ sau có phải là cơ sở của không gian vectơ $\mathbf{R}^3$ hay không?

a) $\overrightarrow{\alpha_1} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{\alpha_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{\alpha_3} = (1, 1, 1)$;

b) $\overrightarrow{\beta_1} = (4, 2, -1)$, $\overrightarrow{\beta_2} = (0, 2, -1)$, $\overrightarrow{\beta_3} = (-2, 0, 1)$.

33. Với giá trị nào của x để các vectơ $\overrightarrow{\alpha_1} = (x, 1, 0)$, $\overrightarrow{\alpha_2} = (1, x, 1)$, $\overrightarrow{\alpha_3} = (0, 1, x)$ lập thành một cơ sở của không gian $\mathbf{R}^3$?

34. Trong các hệ vectơ sau có tồn tại một cơ sở của $\mathbf{R}^3$ không ? Hãy chỉ ra các cơ sở ấy nếu có.

a) $\overrightarrow{\alpha_1} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{\alpha_2} = (3, -2, 0)$, $\overrightarrow{\alpha_3} = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{\alpha_4} = (3, 0, -2)$;

b) $\overrightarrow{\beta_1} = (-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{\beta_2} = (0, 3, 1)$, $\overrightarrow{\beta_3} = (2, 9, -1)$, $\overrightarrow{\beta_4} = (-1, -15, -3)$.

35. Trong $\mathbf{R}^4$, xét tập

$$W = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}.$$

a) Chứng minh rằng W là một không gian con của $\mathbf{R}^4$.

b) Chứng minh rằng các vectơ

$$\overrightarrow{\alpha_1} = (1, 0, 0, -1),\ \overrightarrow{\alpha_2} = (0, 1, 0, -1),$$

$$\overrightarrow{\alpha_3} = (0, 0, 1, -1),\ \overrightarrow{\alpha_4} = (1, 1, -1, -1)$$

thuộc W.

c) Tìm cơ sở và số chiều của W.

36. Gọi P_3 là không gian vectơ gồm đa thức 0 và các đa thức $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ có bậc $f(x) \le 3$.

a) Chứng minh rằng hai hệ vectơ

$$\overrightarrow{\alpha_1} = 1,\ \overrightarrow{\alpha_2} = x,\ \overrightarrow{\alpha_3} = x^2,\ \overrightarrow{\alpha_4} = x^3;$$

$$\overrightarrow{\beta_1} = 1,\ \overrightarrow{\beta_2} = (x - 2),\ \overrightarrow{\beta_3} = (x - 2)^2,\ \overrightarrow{\beta_4} = (x - 2)^3$$

là hai cơ sở của P_3.

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai.

c) Tìm tọa độ của vectơ

$$\vec{\alpha} = x^3 - 2x + 1$$

đối với cơ sở thứ hai.

37. Cho hai hệ vectơ :

(1)
$$\overrightarrow{\alpha_1} = (0, 1, 0, 2),\ \overrightarrow{\alpha_2} = (1, 1, 0, 1),$$
$$\overrightarrow{\alpha_3} = (1, 2, 0, 1),\ \overrightarrow{\alpha_4} = (-1, 0, 2, 1);$$

(2)
$$\overrightarrow{\beta_1} = (1, 0, 2, -1),\ \overrightarrow{\beta_2} = (0, 3, 0, 2),$$
$$\overrightarrow{\beta_3} = (0, 1, 3, 1),\ \overrightarrow{\beta_4} = (0, -1, 0, 1)$$

trong không gian vectơ $\mathbf{R}^4$.

a) Chứng minh chúng là hai cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2).

c) Tìm tọa độ của $\bar{\alpha} = (2, 0, 4, 0)$ đối với cơ sở (2).

d) Tìm tọa độ của $\bar{\alpha}$ đối với cơ sở (1).

38. Trong K - không gian vectơ V, cho hệ vectơ độc lập tuyến tính

$$\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}\},$$

U là không gian con sinh bởi $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$, W là không gian con sinh bởi $\{\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}\}$.

a) Chứng minh rằng $U \cap W$ có cơ sở gồm $\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}$.

b) Tìm cơ sở và số chiều của U + W.

39. Giả sử U và W là hai không gian con của không gian vectơ V. Chứng minh rằng $V = U + W$ và $U \cap W = \{\bar{0}\}$ khi và chỉ khi mỗi $\bar{\alpha} \in V$ có cách biểu diễn duy nhất dưới dạng $\bar{\alpha} = \bar{\beta} + \bar{\gamma}$, với $\bar{\beta} \in U, \bar{\gamma} \in W$.

Trong trường hợp này ta nói rằng V là tổng trực tiếp của hai không gian con U và W và viết $V = U \oplus W$.

40. Xét **R** - không gian vectơ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ các hàm số thực xác định trên **R**. Đặt E là bộ phận các hàm số chẵn và F là bộ phận các hàm số lẻ. Chứng minh E và F là những không gian con của $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ và $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = E \oplus F$.

41. Xét không gian vectơ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ (xem bài 40).

a) Chứng minh hàm $f : x \mapsto \cos x$ thuộc E và hàm $g : x \mapsto \sin x$ thuộc F.

b) Chứng minh không gian con E_1 sinh bởi f chứa trong E và không gian con F_1 sinh bởi g chứa trong F.

c) Chứng minh $\{f, g\}$ là một cơ sở của $E_1 + F_1$.

d) Trong $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ xét ba hàm sau đây :

$$h_1 : x \mapsto \sin(x+1)$$

$$h_2 : x \mapsto \sin(x+2)$$

$$h_3 : x \mapsto \sin(x+3)$$

Chứng minh chúng thuộc $E_1 + F_1$. Chứng minh $\{h_1, h_2\}$ độc lập tuyến tính. Viết h_3 biểu thị tuyến tính qua h_1, h_2.

e) Viết ma trận chuyển từ cơ sở $\{f, g\}$ sang cơ sở $\{h_1, h_2\}$.

Lời giải

32. a) Xét ma trận của các vectơ $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta có $|A| = -1 \neq 0$. Vậy $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$ là một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

b) Ma trận của $\{\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_3}\}$ có định thức bằng 8, vậy hệ vectơ thành lập một cơ sở của $\mathbf{R}^3$.

33. Xét ma trận của $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Ta có $|A| = x(x^2 - 2)$. Đây là một đa thức bậc 3 có 3 nghiệm : 0 và $\pm\sqrt{2}$. Vậy $|A| \neq 0$ khi x không lấy giá trị nghiệm của đa thức.

34. a) Xét ma trận của $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_4}\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ta có $|A| = 10$. Vậy ta có thể lấy $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_4}\}$ làm cơ sở cho $\mathbf{R}^3$.

b) Ta có thể thấy ngay $\{\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}\}$ độc lập tuyến tính và $\overrightarrow{\beta_3} = -2\overrightarrow{\beta_1} + 3\overrightarrow{\beta_2}$, $\overrightarrow{\beta_4} = \overrightarrow{\beta_1} - 5\overrightarrow{\beta_2}$. Vậy hạng của $\{\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_3}, \overrightarrow{\beta_4}\}$ bằng 2, hệ vectơ không thể có một hệ con làm cơ sở cho $\mathbf{R}^3$.

35. a) Trước hết $W \neq \varnothing$ vì $(0, 0, 0, 0) \in W$. Mặt khác xét $(a_i)_{1 \le i \le 4}$, $(b_i)_{1 \le i \le 4} \in W$ và $\lambda \in \mathbf{R}$. Ta có

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \in W$$

vì
$$\sum_{1 \le i \le 4} (a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i = 0;$$

$$\lambda(a_1, a_2, a_3, a_4) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4) \in W$$

vì
$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \lambda a_4 = \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \lambda.0 = 0.$$

b) Hiển nhiên.

c) Ta thấy ngay $\overrightarrow{\alpha_4} = \overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} - \overrightarrow{\alpha_3}$ và ma trận A của $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

có định thức con cấp ba nằm ở góc trái bằng 1. Vậy có thể lấy $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$ làm cơ sở cho W, do đó $\dim W = 3$.

36. a) Ta biết mọi $f(x) \in P$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, viết duy nhất dưới dạng

$$f(x) = a_0\overrightarrow{\alpha_1} + a_1\overrightarrow{\alpha_2} + a_2\overrightarrow{\alpha_3} + a_3\overrightarrow{\alpha_4}.$$

Vậy $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}\}$ là một cơ sở của P, gọi là cơ sở chính tắc.

Mặt khác, áp dụng công thức Taylor cho f(x), ta có

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

và dạng trên là duy nhất. Vậy hệ vectơ

$$\{\overrightarrow{\beta_1} = 1,\ \overrightarrow{\beta_2} = x - 2,\ \overrightarrow{\beta_3} = (x-2)^2,\ \overrightarrow{\beta_4} = (x-2)^3\}$$

là một cơ sở của P.

b) Ta có

$\overrightarrow{\beta_1} = \overrightarrow{\alpha_1}$

$\overrightarrow{\beta_2} = -2\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2}$

$\overrightarrow{\beta_3} = 4\overrightarrow{\alpha_1} - 4\overrightarrow{\alpha_2} + \overrightarrow{\alpha_3}$ $((x-2)^2 = 4 - 4x + x^2)$

$\overrightarrow{\beta_4} = -8\overrightarrow{\alpha_1} + 12\overrightarrow{\alpha_2} - 6\overrightarrow{\alpha_3} + \overrightarrow{\alpha_4}$ $((x-2)^3 = -8 + 12x - 6x^2 + x^3)$.

Vậy ma trận T chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{\alpha_i}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{\beta_i}\}$ (xem §1, 1.10) là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Theo (1) tọa độ của $f(x) = x^3 - 2x + 1$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{\beta_i}\}_{1\le i\le 4}$ là

$f(2) = 5$, $f'(2) = 10$, $\dfrac{f''(2)}{2} = 6$, $\dfrac{f'''(2)}{6} = 1$.

37. a) Tính định thức của các ma trận làm thành bởi hệ (1) và (2), ta lần lượt có 2 và 15. Vậy (1) và (2) là hai cơ sở của $\mathbf{R}^4$.

b) Để tìm ma trận T chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2) ta phải lần lượt tìm tọa độ của các $\overrightarrow{\beta_i}$ qua cơ sở (1). Giả sử ta có

$$\overrightarrow{\beta_1} = (1, 0, 2, -1) = \lambda_1(0, 1, 0, 2) + \lambda_2(1, 1, 0, 1) +$$

$$+ \lambda_3(1, 2, 0, 1) + \lambda_4(-1, 0, 2, 1)$$

Ta đi tới hệ phương trình Cramer đối với λ_i :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_4 = 2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $\overrightarrow{\beta_1} = -2\overrightarrow{\alpha_1} + 2\overrightarrow{\alpha_2} + 0\overrightarrow{\alpha_3} + \overrightarrow{\alpha_4}$.

Tiến hành tương tự đối với các $\overrightarrow{\beta_i}$ còn lại, ta được :

$$\overrightarrow{\beta_2} = \overrightarrow{\alpha_1} - 2\overrightarrow{\alpha_2} + 2\overrightarrow{\alpha_3} + 0\overrightarrow{\alpha_4},$$

$$\overrightarrow{\beta_3} = -\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\alpha_3} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\alpha_4},$$

$$\overrightarrow{\beta_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\alpha_1} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\alpha_2} - \frac{3}{2}\overrightarrow{\alpha_3} + 0\overrightarrow{\alpha_4}.$$

Vậy ma trận T là :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

d) Làm tương tự như trong b), ta được

$$\vec{\alpha} = (2, 0, 4, 0) = -3\overrightarrow{\alpha_1} + 5\overrightarrow{\alpha_2} - \overrightarrow{\alpha_3} + 2\overrightarrow{\alpha_4}.$$

Vậy tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (1) là -3, 5, -1, 2.

c) Đặt $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$ là các tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (2), ta được :

$$(2, 0, 4, 0) = \xi'_1(1, 0, 2, -1) + \xi'_2(0, 3, 0, 2) + \xi'_3(0, 1, 3, 1) + $$
$$+ \xi'_4(0, -1, 0, 1)$$

Từ đó ta được một hệ Cramer đối với $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$, hệ cho ta $\xi'_1 = 2, \xi'_2 = 2/5, \xi'_3 = 0, \xi'_4 = 6/5$. Biết ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2) và biết các tọa độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (2), ta có thể viết các tọa độ $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở (1) theo các công thức cho trong (§1, 1.11) :

$$\xi_1 = -2\xi'_1 + \xi'_2 - \xi'_3 + \frac{1}{2}\xi'_4 = -4 + 2/5 + 3/5 = -3$$

$$\xi_2 = 2\xi'_1 - 2\xi'_2 + \xi'_3 + \frac{3}{2}\xi'_4 = 4 - 4/5 + 9/5 = 5$$

$$\xi_3 = 0\xi'_1 + 2\xi'_2 + \frac{1}{2}\xi'_3 - \frac{3}{2}\xi'_4 = 4/5 - 9/5 = -1$$

$$\xi_4 = \xi'_1 + 0\xi'_2 + \frac{3}{2}\xi'_3 + 0\xi'_4 = 2 = 2$$

Ta tìm lại các tọa độ của $\vec{\alpha}$ mà ta đã tìm thấy bằng cách biểu diễn $\vec{\alpha}$ trực tiếp qua cơ sở (1) , điều mà ta đã trình bày trong d).

33. a) Trước hết ta có $\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3} \in U \cap W$. Mặt khác, giả sử $\vec{\beta} \in U \cap W$, thế thì $\vec{\beta} \in U$ và $\vec{\beta} \in W$.

Vậy ta có :

$$\vec{\beta} = x_1\overrightarrow{\alpha_1} + x_2\overrightarrow{\alpha_2} + x_3\overrightarrow{\alpha_3}, \ x_i \in K,$$
$$\vec{\beta} = y_2\overrightarrow{\alpha_2} + y_3\overrightarrow{\alpha_3} + y_4\overrightarrow{\alpha_4}, \ y_i \in K.$$

Trừ vế với vế các đẳng thức trên, ta được :

$$\vec{0} = x_1\overrightarrow{\alpha_1} + (x_2 - y_2)\overrightarrow{\alpha_2} + (x_3 - y_3)\overrightarrow{\alpha_3} - y_4\overrightarrow{\alpha_4} \ .$$

Nhưng hệ vectơ $\{\overrightarrow{\alpha_i}\}_{1 \le i \le 4}$ là độc lập tuyến tính, nên ta phải có $x_1 = 0$, $x_2 = y_2, x_3 = y_3, y_4 = 0$.

Vậy mọi $\vec{\beta} \in U \cap W$ có dạng

$$\vec{\beta} = x_2\overrightarrow{\alpha_2} + x_3\overrightarrow{\alpha_3}, \ x_i \in K, i = 1, 2.$$

Thêm nữa $\{\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$ là độc lập tuyến tính vì là hệ con của một hệ độc lập tuyến tính (xem §1, 1.6, hệ quả 1), vậy $\{\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}\}$ là một cơ sở của $U \cap W$.

b) Giả sử $\vec{\beta} \in U + W$, $\vec{\beta}$ sẽ là tổng của hai vectơ $\vec{\xi} + \vec{\eta}$ với $\vec{\xi} \in U$ và $\vec{\eta} \in W$. Vậy $\vec{\beta}$ sẽ có dạng :

$$\vec{\beta} = \underbrace{x_1\overrightarrow{\alpha_1} + x_2\overrightarrow{\alpha_2} + x_3\overrightarrow{\alpha_3}}_{\vec{\xi}} + \underbrace{y_2\overrightarrow{\alpha_2} + y_3\overrightarrow{\alpha_3} + y_4\overrightarrow{\alpha_4}}_{\vec{\eta}}$$

$$= x_1\overrightarrow{\alpha_1} + (x_2 + y_2)\overrightarrow{\alpha_2} + (x_3 + y_3)\overrightarrow{\alpha_3} + y_4\overrightarrow{\alpha_4}.$$

Như vậy mọi $\vec{\beta} \in U + W$ là một tổ hợp tuyến tính của $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\alpha_3}, \overrightarrow{\alpha_4}$, mà các vectơ này lại độc lập tuyến tính. Vậy chúng lập thành một cơ sở của $U + W$.

39. Giả sử có $V = U + W$ và $U \cap W = \{\vec{0}\}$. Mọi $\vec{\alpha} \in V$ có thể viết dưới dạng

(1) $\qquad \vec{\alpha} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad ; \vec{\beta} \in U, \vec{\gamma} \in W$

Giả sử ta còn có :

(2) $\qquad \vec{\alpha} = \vec{\beta'} + \vec{\gamma'} \quad ; \vec{\beta'} \in U, \vec{\gamma'} \in W$

Trừ vế với vế các đẳng thức (1) và (2) :

$$\vec{0} = (\vec{\beta} - \vec{\beta'}) + (\vec{\gamma} - \vec{\gamma'})$$

hay $$U \ni \vec{\beta} - \vec{\beta'} = -(\vec{\gamma} - \vec{\gamma'}) \in W$$

Vậy $\vec{\beta} - \vec{\beta'}$ và $\vec{\gamma} - \vec{\gamma'} \in U \cap W = \{\vec{0}\}$; từ đó $\vec{\beta} = \vec{\beta'}$ và $\vec{\gamma} = \vec{\gamma'}$, hay (1) là dạng duy nhất của $\vec{\alpha}$.

Đảo lại giả sử (1) là dạng duy nhất của $\vec{\alpha}$ với mọi $\vec{\alpha} \in V$. Xét $\vec{\alpha} \in U \cap W$. Ta có $\vec{\alpha} \in U$ và $\vec{\alpha} \in W$; vậy ta có thể viết $\vec{\alpha}$ dưới hai dạng

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{0} \text{ ; } \vec{\alpha} \in U, \vec{0} \in W$$

$$\vec{\alpha} = \vec{0} + \vec{\alpha} \text{ ; } \vec{0} \in U, \vec{\alpha} \in W.$$

Vì $\vec{\alpha}$ chỉ có một dạng duy nhất dưới tổng của hai vectơ, một thuộc U và một thuộc W, cho nên ta phải có $\vec{\alpha} = \vec{0}$, nghĩa là $U \cap W = \{\vec{0}\}$. Khi $V = U + W$ và $U \cap W = \{\vec{0}\}$ người ta nói V là *tổng trực tiếp* của hai không gian con U và W, và viết $V = U \oplus W$.

40. Trước hết E và F khác rỗng vì chẳng hạn ta có hàm $f : x \to \cos x$ thuộc E và hàm $g : x \to \sin x$ thuộc F. Giả sử có $f_1, f_2 \in E$ và $\lambda \in \mathbf{R}$. Ta có

$$(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x),$$

$$\lambda f_1(-x) = \lambda(f_1(-x)) = \lambda(f_1(x)) = \lambda f_1(x)$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$. Vậy $f_1 + f_2 \in E$ và $\lambda f_1 \in E$, do đó E là một không gian con. Chứng minh tương tự ta có F là một không gian con.

Giả sử $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. Hàm

$$x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = h(x)$$

hiển nhiên thuộc E, và hàm

$$x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = k(x)$$

thuộc F. Từ đó ta có

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = h(x) + k(x)$$

Vậy $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = E + F$. Mặt khác xét $f \in E \cap F$. Ta có $f \in E$ và $f \in F$, vậy

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x) = -f(-x), \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Cộng vế với vế, ta được

$$2f(x) = 0$$

hay $$f(x) = 0, \text{ với mọi } x \in \mathbf{R}.$$

Vậy hàm f là hàm 0, ta suy ra $E \cap F = \{0\}$, và $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = E \oplus F$.

41. a) Ta có $\cos(-x) = \cos(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, và $\sin(-x) = -\sin(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$, vậy $f \in E$ và $g \in F$.

b) Ta có $E_1 = \{\lambda f \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$ và $F_1 = \{\mu g \mid \mu \in \mathbf{R}\}$(xem bài tập 14). Từ đó có thể thấy $E_1 \subset E$ và $F_1 \subset F$.

c) Vì $E \cap F = \{0\}$ nên $E_1 \cap F_1 = \{0\}$. Cho nên tổng $E_1 + F_1$ là tổng trực tiếp. Mỗi $h \in E_1 + F_1$ sẽ viết duy nhất dưới dạng (xem bài 39) :

$$h = \lambda f + \mu g, \lambda f \in E_1, \mu g \in F_1.$$

Điều đó chứng tỏ $\{f, g\}$ là một cơ sở của $E_1 + F_1$.

d) Ta lần lượt có :

$$\sin(x + 1) = \sin 1 \cos x + \cos 1 \sin x$$
$$\sin(x + 2) = \sin 2 \cos x + \cos 2 \sin x$$
$$\sin(x + 3) = \sin 3 \cos x + \cos 3 \sin x$$

với mọi $x \in \mathbf{R}$; vậy :

$$h_1 = (\sin 1)f + (\cos 1)g$$
$$h_2 = (\sin 2)f + (\cos 2)g$$
$$h_3 = (\sin 3)f + (\cos 3)g$$

hay $h_i \in E_1 + F_1$, $i = 1, 2, 3$.

Xét ma trận các tọa độ của h_1 và h_2 đối với cơ sở $\{f, g\}$:

$$T = \begin{pmatrix} \sin 1 & \sin 2 \\ \cos 1 & \cos 2 \end{pmatrix}$$

Ta có $|T| = \sin 1 \cos 2 - \sin 2 \cos 1 = \sin(-1) \neq 0$.

Vậy $\{h_1, h_2\}$ là độc lập tuyến tính, cho nên $\{h_1, h_2\}$ thành lập một cơ sở của $E_1 + F_1$.

Vì $\{h_1, h_2\}$ là một cơ sở, nên tồn tại $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ duy nhất để :

$$\sin(x+3) = \lambda_1\sin(x+1) + \lambda_2\sin(x+2), \forall x \in \mathbf{R}$$

Đạo hàm hai vế, ta được :

$$\cos(x+3) = \lambda_1\cos(x+1) + \lambda_2\cos(x+2)$$

Khi $x = 0$, ta được :

$$\sin 3 = \lambda_1\sin 1 + \lambda_2\sin 2$$

$$\cos 3 = \lambda_1\cos 1 + \lambda_2\cos 2$$

Đây là một hệ Cramer đối với λ_1, λ_2 mà nghiệm là -1 và 2cos1.

Vậy $\sin(x+3) = -\sin(x+1) + 2\cos 1\sin(x+2)$, nghĩa là

$$h_3 = -h_1 + 2h_2\cos 1.$$

e) Ma trận từ cơ sở $\{f, g\}$ sang cơ sở $\{h_1, h_2\}$ chính là ma trận T trong d).

Chương III

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Giả sử K là một trường ; ta đặt vấn đề giải hệ phương trình tuyến tính với m phương trình và n ẩn trên K :

(1) $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \ (1 \le i \le m).$$

Hệ (1) cho ta ma trận A các hệ số

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

và ma trận bổ sung **B**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ta gọi S là tập hợp các $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ thỏa mãn hệ phương trình (1).

1.1. Định lý Kronecker - Capelli

$$S \neq \varnothing \Leftrightarrow hgA = hgB.$$

Như vậy khi cho hệ (1), nếu hgA ≠ hgB, ta nói ngay (1) vô nghiệm ; nếu hgA = hgB, ta sẽ giải hệ phương trình (1).

1.2. Cách giải hệ (1) (ta phải chắc chắn có hgA = hgB thì mới đặt vấn đề giải)

1.2.1. Hệ phương trình là vuông ($n = m$) và $|A| \neq 0$. Trong trường hợp này ta có một hệ Cramer, (1) chỉ có một nghiệm duy nhất cho bởi quy tắc Cramer mà ta đã biết trong chương I.

1.2.2. Trường hợp tổng quát. Đặt r = hgA, đó là cấp của một định thức con Δ lấy ra từ A sao cho giá trị của nó khác 0 và mọi định thức con cấp $r + 1$ lấy ra từ A và chứa Δ đều bằng 0. Các dòng của Δ xác định các *phương trình chính*, các cột của nó xác định các *ẩn chính*. Các phương trình và ẩn còn lại, nếu có, là không chính. Hệ (1) lúc đó tương đương với hệ gồm r phương trình chính ; ta cho những giá trị tùy ý cho $(n - r)$ ẩn không chính, tiếp đó ta giải một hệ Cramer đối với các ẩn chính trong các phương trình chính.

Chú ý, trong thực tiễn, người ta thường dùng phương pháp Gauss khử dần các ẩn số để xem hgA có bằng hgB và nếu chúng bằng nhau thì bắt đầu giải (trên một hệ đơn giản hơn hệ đầu tiên vì một số ẩn đã bị khử, điều thường làm ở trung học).

1.3. Trường hợp đặc biệt : hệ phương trình tuyến tính thuần nhất ($b_i = 0$, $i = 1, 2, ..., m$)

Trong trường hợp này S là một không gian con của K^n có chiều $(n - r)$. Mỗi cơ sở của S gọi là một hệ nghiệm cơ bản. Như vậy ta chỉ cần biết một hệ nghiệm cơ bản (gồm n - r nghiệm), các nghiệm khác sẽ là các tổ hợp tuyến tính của hệ nghiệm cơ bản.

1.4. Quan hệ giữa nghiệm của hệ (1) và hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (2) được từ (1) bằng cách đặt các $b_i = 0$

Gọi S_1 là tập nghiệm của (1), S_2 là tập nghiệm của (2), và $\gamma_1 \in S_1$. Thế thì

$$S_1 = \{\gamma_1 + \gamma_2 \mid \gamma_2 \in S_2\}.$$

§2. BÀI TẬP

ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI NGHIỆM

1. Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm ?

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 2 \\ 4x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

2. Chứng minh định lí, mục 1.2.b), §1.

3. Tìm điều kiện cần và đủ để hệ phương trình sau có nghiệm :

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3. \end{cases}$

4. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 2 \\ 6x_1 + 9x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 7x_3 - 5x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$

5. Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $M_1(2, 1)$, $M_2(1, 2)$, $M_3(0, 1)$.

6. Tìm các hệ số a, b, c, d để đồ thị của hàm số

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

đi qua bốn điểm $M_1(1, 0)$, $M_2(0, -1)$, $M_3(-1, -2)$, $M_4(2, 7)$.

7. Trong $\mathbf{R}^3$ cho hai cơ sở :

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1, 0, 0),\ \overrightarrow{\varepsilon_2} = (0, 1, 0),\ \overrightarrow{\varepsilon_3} = (0, 0, 1)$$

và $$\overrightarrow{\varepsilon'_1} = (2, -1, 3),\ \overrightarrow{\varepsilon'_2} = (-3, 1, -2),\ \overrightarrow{\varepsilon'_3} = (0, 4, 5).$$

Hãy tìm ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai và tìm tọa độ của $\overrightarrow{\alpha} = (-1, 2, 0)$ đối với cơ sở thứ hai.

8. Trong $\mathbf{R}^3$ cho hai cơ sở :

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1, 1, -1),\ \overrightarrow{\varepsilon_2} = (1, 1, 0),\ \overrightarrow{\varepsilon_3} = (2, 0, 0)$$

và $$\overrightarrow{\varepsilon'_1} = (1, -1, 0),\ \overrightarrow{\varepsilon'_2} = (2, -1, 0),\ \overrightarrow{\varepsilon'_3} = (1, 1, -1).$$

Tìm ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

9. Giải các hệ phương trình :

a) $$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

10. Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ 3x_1 - 12x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_2 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 - 12x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

11. Với mỗi hệ phương trình trong bài tập 9, hãy tìm một cơ sở của không gian các nghiệm.

12. Cho hệ vectơ trong không gian $\mathbf{R}^3$

$$\overrightarrow{\alpha_1} = (-1, 2, -4),\ \overrightarrow{\alpha_2} = (2, 1, 5),\ \overrightarrow{\alpha_3} = (12, 1, 33).$$

Hãy tìm các số x_1, x_2, x_3 sao cho

$$x_1\overrightarrow{\alpha_1} + x_2\overrightarrow{\alpha_2} + x_3\overrightarrow{\alpha_3} = \vec{0}.$$

13. Trong không gian vectơ $\mathbf{R}^4$ cho hệ vectơ :

$$\overrightarrow{\alpha_1} = (1, 1, 1, 1)\ ;\ \overrightarrow{\alpha_2} = (2, 2, 2, 2),\ \overrightarrow{\alpha_3} = (3, 0, -1, 1).$$

Hãy biểu thị $\overrightarrow{\alpha_4} = (-12, 3, 8, -2)$ qua hệ vectơ đã cho.

Lời giải

1. a) Ta có

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{và} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(cột 3 là tổng của cột 1 và cột 2)

Vậy hgA = hgB = 2. Ta có thể lấy hai phương trình cuối làm phương trình chính, đó là một hệ Cramer, nó cho ta một nghiệm duy nhất.

b) Ta xét các phép biến đổi sau đây trên các ma trận A và B :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Vậy ta đi tới hệ phương trình tương đương với hệ đã cho trong đó một phương trình của hệ là :

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2.$$

Hiển nhiên một hệ như vậy không có nghiệm. Trên ma trận cuối cùng ta có thể thấy :

$$2 = \text{hg}A \neq \text{hg}B = 3.$$

c) Trong trường hợp này ta có : $2 \geq \text{hg}B \geq \text{hg}A$. Nhưng ta nhìn thấy ngay $\text{hg}A = 2$. Vậy $\text{hg}A = \text{hg}B = 2$. Hệ phương trình có vô số nghiệm.

d) Ở đây ta có $|A| \neq 0$; vậy hệ phương trình là Cramer, có một nghiệm duy nhất.

e) Ta có $\text{hg}A = 4$, do định thức con nằm ở góc trái khác 0. Mặt khác, $4 \geq \text{hg}B \geq \text{hg}A$. Vậy $\text{hg}B = 4 = \text{hg}A$. Hệ phương trình có vô số nghiệm.

2. Xét một hệ phương trình tuyến tính trên một trường K

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + \dots \quad + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots \quad + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a) Bây giờ ta hãy xét hệ phương trình (2) sau đây, nhận được bằng cách đổi chỗ hai phương trình thứ i và thứ k cho nhau :

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots \quad + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + \dots \quad + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Hai hệ phương trình (1) và (2) chứa các phương trình như nhau, hiển nhiên nếu $(c_1, c_2, ..., c_n) \in K^n$ nghiệm (1) thì nó cũng nghiệm (2) và đảo lại. Vậy (1) và (2) tương đương.

b) Xét hệ (3) sau đây nhận được từ (1) bằng cách nhân hai vế của phương trình thứ k với $0 \neq \lambda \in K$:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ \dots \ + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda a_{k1}x_1 + \dots + \lambda a_{kn}x_n = \lambda b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots \ + \ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(1) và (3) chứa các phương trình y hệt nhau, trừ hai phương trình thứ k khác nhau bởi nhân tử $\lambda \neq 0$. Giả sử $(c_1, c_2, ..., c_n) \in K^n$. Thế thì nó là nghiệm của (1) khi và chỉ khi nó là nghiệm của (3). Thật vậy :

$$a_{k1}c_1 + \dots + a_{kn}c_n = b_k \Leftrightarrow \lambda(a_{k1}c_1 + \dots + a_{kn}c_n) = \lambda b_k$$

vì $\lambda \neq 0$.

c) Cuối cùng xét hệ (4) sau đây nhận được từ (1) bằng cách nhân hai vế của phương trình thứ k với $0 \neq \lambda \in K$ rồi cộng, vế với vế, vào một phương trình thứ i của hệ :

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots \qquad\qquad\qquad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{i1} + \lambda a_{k1})x_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{kn})x_n = b_i + \lambda b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots \qquad\qquad\qquad + a_{kn}x_n = b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots \qquad\qquad\qquad + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(1) và (4) chứa các phương trình y hệt nhau trừ hai phương trình thứ i. Giả sử $(c_1, ..., c_n) \in K^n$ là một nghiệm của (1). Thế thì ta có các kéo theo sau :

$$\begin{cases} a_{i1}c_1 + \dots + a_{in}c_n = b_i \\ a_{k1}c_1 + \dots + a_{kn}c_n = b_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_{i1} + \lambda a_{k1})c_1 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{kn})c_n = b_i + \lambda b_k.$$

$$\begin{cases}(a_{i1}+\lambda a_{k1})c_1+\ldots+(a_{in}+\lambda a_{kn})c_n=b_i+\lambda b_k\\ a_{k1}c_1+\ldots+a_{kn}c_n=b_k\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{i1}c_1+\ldots+a_{in}c_n=b_i$$

(do ta nhân đẳng thức thứ hai với λ rồi trừ, vế với vế, vào đẳng thức thứ nhất). Ta nhận xét ở đây ta không cần đến giả thiết $\lambda \neq 0$ như trong b), nhưng $\lambda = 0$ thì (1) và (4) y hệt nhau kể cả thứ tự viết, trong khi mục đích của việc làm là tạo ra (4) khác (1), với số ẩn ở phương trình thứ i bớt đi.

3. a) Ta có $|A| = (a-1)^2(a+2)$.

Trường hợp 1: $a \neq 1$ và $a \neq -2$. Hệ phương trình là Cramer, có nghiệm duy nhất.

Trường hợp 2: $a = 1$. Hệ phương trình trở thành một hệ có 3 phương trình giống nhau và bằng phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

được coi là phương trình chính mà ta có thể lấy x_1 là ẩn chính. Trong trường hợp này có vô số nghiệm.

Trường hợp 3 : $a = -2$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=1\\ x_1-2x_2+x_3=1\\ x_1+x_2-2x_3=1\end{cases}$$

với hgA = 2, hgB = 3. Hệ phương trình không có nghiệm.

Kết luận : hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $a \neq -2$.

b) Cũng làm như a), trước hết ta tính $|A| = (a-b)(b-c)(c-a)$.

Trường hợp 1 : a, b, c đôi một phân biệt. Ta có một hệ Cramer với nghiệm duy nhất.

Trường hợp 2 : $a = b$, $a \neq c$. Hệ phương trình thu gọn lại thành

$$\begin{cases}x+ay+a^2z=a^3\\ x+cy+c^2z=c^3\end{cases}$$

Hệ phương trình là Cramer đối với x, y chẳng hạn. Ở đây ta có vô số nghiệm.

Trường hợp 3 : a = b = c. Hệ phương trình chỉ còn :

$$x + ay + a^2z = a^3$$

Ta có thể lấy x làm ẩn chính, hệ phương trình có vô số nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm với mọi $(a, b, c) \in K^3$.

4. a) Ta có thể lấy x_2 và x_3 làm ẩn chính, từ đó ta được :

$$\begin{cases} x_2 = 6 - 4x_1 \\ x_3 = -5 + 5x_1 + x_4 + x_5 \end{cases}$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi gán cho x_1, x_4, x_5 những giá trị tùy ý lấy trong K.

b) Ta có :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -5 & 2 \\ 6 & 9 & -4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -4 & 3 \\ 6 & 9 & -4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

c) Ta có :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình vô nghiệm.

d) hgA = 3, hgB = 4. Vô nghiệm.

e) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Bảng thứ hai suy ra từ bảng thứ nhất bằng cách nhân dòng thứ ba với -1, dòng thứ tư với 1, rồi cộng chúng vào dòng thứ nhất. Hệ phương trình vô nghiệm.

f) Ta có $|A| = (a - b)(b - c)(c - a)$

Trường hợp 1 : a, b, c đôi một phân biệt. Ta có một hệ Cramer với nghiệm :

$$x = \frac{(d-b)(c-d)}{(a-b)(c-a)},\ y = \frac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)},\ z = \frac{(b-d)(d-a)}{(b-c)(c-a)}.$$

Trường hợp 2 : a = b ; a, c, d đôi một phân biệt. Trong trường hợp này hgA = 2, hgB = 3. Hệ không có nghiệm.

Trường hợp 3 : $a = b$, $a \neq c$, $c = d$. HgA = hgB = 2. Hệ phương trình là Cramer đối với y, z :

$$\begin{cases} y + z = 1 - x \\ ay + cz = c - ax \end{cases}$$

Ta được $y = -x$, $z = 1$. Hệ có vô số nghiệm khi ta gán cho x những giá trị tùy ý.

Trường hợp 4 : $a = b = c$, $a \neq d$. HgA = 1, hgB = 2. Vô nghiệm.

Trường hợp 5 : $a = b = c = d$. HgA = hgB = 1. Ta được : $x = 1 - y - z$ với y, z lấy giá trị tùy ý.

5. Phương trình đường tròn có dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 ;\ a, b, c \in \mathbf{R}.$$

Vì đường tròn đi qua ba điểm $M_1(2, 1)$, $M_2(1, 2)$, $M_3(0, 1)$ nên ta được hệ phương trình sau đây đối với a, b, c :

$$\begin{cases} 4a + 2b - c = 5 \\ 2a + 4b - c = 5 \\ 2b - c = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình là Cramer, cho ta một nghiệm duy nhất : $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Vậy phương trình của đường tròn là

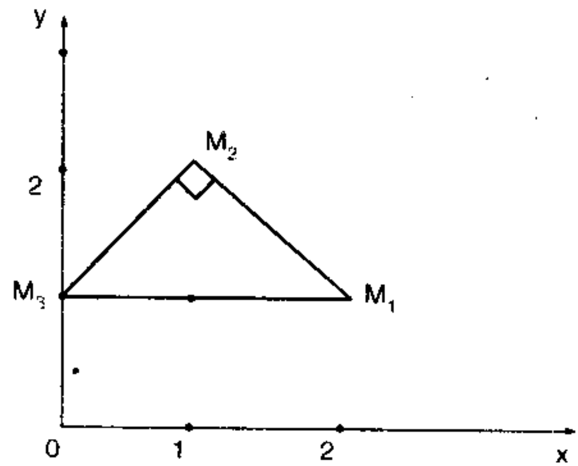
(1) $$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

mà ta còn có thể viết như sau để làm nổi bật tâm và bán kính của đường tròn

(2) $$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Vậy tâm là điểm (1, 1) và bán kính bằng 1.

Ta cũng có thể có ngay phương trình đường tròn nếu ta xét tam giác $M_1M_2M_3$:



Trên hình vẽ ta thấy ngay tam giác là vuông và cân, đường tròn đi qua M_1, M_2, M_3 nhận điểm giữa (1, 1) của M_1M_3 làm tâm và có bán kính bằng 1, từ đó ta có phương trình đường tròn dưới dạng (2).

6. a = 1, b = c = 0, d = −1.

7. Ma trận T chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai chính là ma trận mà các cột là các toạ độ của các vectơ thuộc cơ sở thứ hai đối với hệ cơ sở chính tắc, cho nên ta có ngay

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ta có các toạ độ của $\vec{\alpha}$ đối với cơ sở thứ hai là : −17/25, −3/25, 9/25.

8. Giả sử x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x_3, y_3, z_3 là tọa độ của lần lượt các vectơ $\overrightarrow{\varepsilon'_1}, \overrightarrow{\varepsilon'_2}, \overrightarrow{\varepsilon'_3}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$. Thế thì x_1, y_1, z_1 là nghiệm của hệ Cramer

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + 2z_1 = 1 \\ x_1 + y_1 = -1 \\ -x_1 = 0 \end{cases}$$

Cũng vậy, x_2, y_2, z_2 là nghiệm của hệ Cramer :

$$\begin{cases} x_2 + y_2 + 2z_2 = 2 \\ x_2 + y_2 = -1 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

Cuối cùng, x_3, y_3, z_3 là nghiệm của hệ Cramer :

$$\begin{cases} x_3 + y_3 + 2z_3 = 1 \\ x_3 + y_3 = 1 \\ -x_3 = -1 \end{cases}$$

Lần lượt giải ba hệ phương trình Cramer đó, ta được $x_1 = 0$, $y_1 = -1$, $z_1 = 1$; $x_2 = 0$, $y_2 = -1$, $z_2 = 3/2$; $x_3 = 1$, $y_3 = 0$, $z_3 = 0$. Ta chú ý ta không cần viết hệ Cramer thứ ba để giải vì $\overrightarrow{\varepsilon'_3} = \overrightarrow{\varepsilon_1}$, cho nên ta có thể viết ngay $\overrightarrow{\varepsilon'_3} = 1.\overrightarrow{\varepsilon_1} + 0\overrightarrow{\varepsilon_2} + 0\overrightarrow{\varepsilon_3}$, do đó $x_3 = 1$, $y_3 = z_3 = 0$. Mặt khác, cả ba hệ phương trình đều có ma trận các hệ số mà các cột là các tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{\varepsilon_1}$, $\overrightarrow{\varepsilon_2}$, $\overrightarrow{\varepsilon_3}$ và cột các số hạng tự do lần lượt là các tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{\varepsilon'_1}$, $\overrightarrow{\varepsilon'_2}$, $\overrightarrow{\varepsilon'_3}$ (đối với hệ cơ sở chính tắc). Ta có thể viết ba hệ phương trình dưới dạng ma trận như sau

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Chú ý này giúp ta thực hiện những phép biến đổi trên ma trận trên để giải cùng lúc ba hệ phương trình.

Ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai là :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

9. a) Ma trận các hệ số có định thức con cấp hai :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Ta có thể lấy x_3 và x_4 là ẩn chính :

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = -3x_1 + 4x_2 \\ 2x_3 + 3x_4 = -6x_1 + 8x_2 \end{cases}$$

Từ đó :

$$x_3 = -3x_1 + 4x_2$$

$$x_4 = 0$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi ta gán cho x_1, x_2 những giá trị tùy ý, không gian các nghiệm ở đây có số chiều n - r = 4 - 2 = 2. Để có một cơ sở của không gian nghiệm, ta hãy gán cho x_1, x_2 các giá trị (1, 0) và (0, 1) chẳng hạn, ta được một cơ sở làm bởi các vectơ sau đây (hệ nghiệm cơ bản) :

$$(1, 0, -3, 0)$$

$$(0, 1, 4, 0)$$

b) Ta hãy thực hiện những phép biến đổi trên ma trận các hệ số :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -7 & 11 & 0 \\ -7 & 11 & -17 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -7 & 11 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -14 & 22 & 0 \\ -7 & 14 & -21 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 14 & -21 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Trên ma trận cuối cùng, ta thấy ngay hgA = 3. Ta có thể lấy x_2, x_3, x_4 làm ẩn chính, và gán cho x_1 những giá trị tùy ý. Không gian nghiệm ở đây có chiều bằng 1. Giải hệ phương trình đối với x_2, x_3, x_4, ta được :

$$x_2 = -4x_1$$

$$x_3 = -3x_1$$

$$x_4 = 0$$

Gán cho x_1 giá trị 1, ta được một cơ sở chỉ có một vectơ của không gian nghiệm :

$$(1, -4, -3, 0).$$

Các nghiệm khác của hệ phương trình sẽ có dạng

$$\lambda(1, -4, -3, 0), \lambda \in K.$$

c) Thực hiện những phép biến đổi trên ma trận các hệ số, ta được ma trận :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy hgA = 3. Ta có thể lấy x_3, x_4, x_5 làm ẩn chính và gán cho x_1, x_2 những giá trị tùy ý. Ta được :

$$x_3 = x_1 + 3x_2$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

Không gian nghiệm có chiều bằng 2, mà một cơ sở của nó là

$$(1, 0, 1, 0, 0),$$
$$(0, 1, 3, 0, 0).$$

10. b) Biến đổi ma trận các hệ số

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Lấy x_3 và x_5 làm ẩn chính, ta được :

$$x_3 = -4x_1 + 8x_2 + 7x_4$$
$$x_5 = 3x_1 - 6x_2 - 3x_4$$

Một hệ nghiệm cơ bản :

$$(1, 0, -4, 0, 3), (0, 1, 8, 0, -6), (0, 0, 7, 1, -3)$$

d) Sau khi biến đổi ma trận các hệ số, ta được :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta hãy lấy x_4, x_5, x_6 làm ẩn chính, ta được :

$$x_4 = x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$x_5 = -x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_6 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

Ta có một hệ nghiệm cơ bản :

$$(1, 0, 0, 1, -1, -1), (0, 1, 0, 2, 1, 3), (0, 0, 1, -1, 1, 2).$$

Ta chú ý rằng nếu ta nhìn ma trận trên, ta hoàn toàn có thể lấy x_1, x_2, x_3 làm ẩn chính và giải hệ phương trình đối với các ẩn chính đó ; nhưng lấy như vậy ta sẽ bị hệ số phân, chẳng hạn dòng cuối cùng của ma trận cho ta

$$x_2 = \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5,$$

điều đó sẽ phức tạp cho ta khi tiếp tục tìm x_1 và x_3.

e) Biến đổi ma trận các hệ số, ta được :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Lấy x_1 và x_2 làm ẩn chính và giải :

$$x_1 = \ x_3 - x_4$$

$$x_2 = 2x_3 + x_4$$

Một hệ nghiệm cơ bản :

$$(1, 2, 1, 0),$$

$$(-1, 1, 0, 1).$$

11. Đã giải quyết trong bài 9.

12. Ta hãy tìm x_1, x_2, x_3 sao cho :

$$x_1(-1, 2, -4) + x_2(2, 1, 5) + x_3(12, 1, 33) = (0, 0, 0)$$

Điều này dẫn tới hệ phương trình :

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 12x_3 = 0 \\ 2x_1 + \ x_2 + \ \ \ \ x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 33x_3 = 0 \end{cases}$$

Các nghiệm của hệ có dạng

$$x_1 = 2\lambda$$

$$x_2 = -5\lambda$$

$$x_3 = \lambda$$

với $\lambda \in K$.

13. $\overrightarrow{\alpha_4} = \overrightarrow{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} - 5\overline{\alpha_3}$.

Chương IV

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.1. Ánh xạ tuyến tính

Một ánh xạ tuyến tính (còn gọi là đồng cấu tuyến tính hay đồng cấu của các không gian vectơ) là một ánh xạ f từ một K - không gian vectơ E vào một K - không gian vectơ F sao cho:

$$\begin{cases} \text{(i)}\ f(\vec{x}+\vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}') \\ \text{(ii)}\ f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \end{cases}$$

với mọi $\vec{x}, \vec{x}' \in E$ và $\lambda \in K$.

Dễ thấy (i) và (ii) tương đương với

$$f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$$

với mọi $\vec{x}, \vec{y} \in E$ và $\lambda, \mu \in K$.

1.2. Đơn cấu - Toàn cấu - Đẳng cấu

Định nghĩa. Một ánh xạ tuyến tính được gọi là:

1) một đơn cấu nếu nó là một đơn ánh;

2) một toàn cấu nếu nó là một toàn ánh;

3) một đẳng cấu nếu nó là một song ánh.

1.3. Sự xác định một ánh xạ tuyến tính

Giả sử $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\right)$ là một cơ sở của K - không gian vectơ E và $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_n}$ là n vectơ (không nhất thiết khác nhau) của K - không gian vectơ F. Thế thì tồn tại duy nhất một đồng cấu f: E → F sao cho $f(\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{b_i}$. Ta có f là đơn cấu khi và chỉ khi hệ vectơ $\left(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right)$ là độc lập tuyến tính ; f là đẳng cấu khi và chỉ khi hệ vectơ $\left(\overrightarrow{b_1}, \ldots, \overrightarrow{b_n}\right)$ là độc lập tuyến tính tối đại.

1.4. Ảnh, hạt nhân của một ánh xạ tuyến tính

Giả sử f: E → F là một ánh xạ tuyến tính.

1) Với X là một tập con của E tập hợp:

$$F(X) = \left\{\vec{y} \in F \middle| \vec{y} = f(\vec{x}), \vec{x} \in X\right\}$$

được gọi là *ảnh của tập X* (bởi f).

Nếu X = E thì f(E) được gọi là *ảnh của E* (bởi f) hay ảnh của f và được ký hiệu bởi Imf.

2) Với Y là một tập con của F, tập hợp:

$$f^{-1}(Y) = \left\{\vec{x} \in E \middle| \vec{y} = f(\vec{x}) \in Y\right\}$$

được gọi là *ảnh ngược của Y* (bởi f).

Nếu Y = { $\vec{0}$ } thì

$$f^{-1}(Y) = \left\{\vec{x} \in E \middle| f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$

được gọi là *hạt nhân của f*, ký hiệu Kerf.

Như vậy:

$$\text{Imf} = f(E)$$

$$\text{Kerf} = f^{-1}(\vec{0}) = \left\{\vec{x} \in E \middle| f(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$

Ta phải luôn luôn nhớ rằng:

Imf là một không gian con của F,

Kerf là một không gian con của E,

và

f là một toàn cấu khi và chỉ khi Imf = F.

f là một đơn cấu khi và chỉ khi Kerf = $\{\vec{0}\}$

1.5. Liên hệ giữa số chiều của ảnh, của hạt nhân và của không gian nguồn

Giả sử f : E → F là một ánh xạ tuyến tính trong đó E có số chiều hữu hạn. Khi đó

$$\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f.$$

1.6. Sự đẳng cấu của hai không gian vectơ cùng số chiều

Giả sử E và F là hai không gian vectơ có số chiều hữu hạn trên trường K. Thế thì dim E = dim F khi và chỉ khi có một đẳng cấu

$$f : E \xrightarrow{\sim} F$$

1.7. Các phép toán trên các ánh xạ tuyến tính

Cho hai không gian vectơ E, F trên trường K. Ký hiệu tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ E đến F bởi $\mathrm{Hom}_K(E, F)$. Trên tập này có thể xác định phép cộng hai ánh xạ và phép nhân một ánh xạ với một số k ∈ K để nó lại trở thành một không gian vectơ trên K.

1.7.1. *Tổng của hai ánh xạ tuyến tính*

Giả sử f, g ∈ $\mathrm{Hom}_K(E, F)$. Ánh xạ ký hiệu bởi : f + g : E → F xác định bởi :

$$(f+g)\left(\vec{\alpha}\right) = f\left(\vec{\alpha}\right) + g\left(\vec{\alpha}\right) \ \forall \vec{\alpha} \in E$$

là một ánh xạ tuyến tính.

Ánh xạ tuyến tính f + g được gọi là *tổng của f và g.*

1.7.2. *Tích của một ánh xạ tuyến tính với một vô hướng*

Cho f ∈ $\mathrm{Hom}_K(E, F)$, k ∈ K. Ánh xạ kf: E → F xác định bởi

$$(kf)\left(\vec{\alpha}\right) = k\left(f\left(\vec{\alpha}\right)\right), \forall \vec{\alpha} \in E$$

là một ánh xạ tuyến tính. Nó được gọi là *tích của ánh xạ tuyến tính f với vô hướng k.*

1.8. Không gian vectơ $Hom_K(E, F)$

Với phép cộng hai ánh xạ tuyến tính và phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một vô hướng, $Hom_K(E, F)$ là một không gian vectơ trên trường K.

1.9. Tích của hai ánh xạ tuyến tính

Giả sử E, F, G là ba không gian vectơ trên trường K,

$$f: E \to F, \ g: F \to G$$

là hai ánh xạ tuyến tính. Khi đó

$$gf: E \to G$$

là một ánh xạ tuyến tính. Nó được gọi là tích của hai ánh xạ tuyến tính f và g.

1.10. $End_K(E)$

Giả sử E là một không gian vectơ trên trường K. Đặt

$$End_K(E) = Hom_K(E, E).$$

Với mọi f, g, h $\in End_K(E)$ ta có:

$$(fg)h = f(gh);$$

$$f(g + h) = fg + fh;$$

$$(g + h)f = gf + hf.$$

End (E) là một vành gọi là vành các tự đồng cấu của E.

§2. BÀI TẬP

ĐỊNH NGHĨA - TÍNH CHẤT

1. Trong các ánh xạ sau đây, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính:

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$;

b) $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_3)$;

c) $h : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$, $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 - x_4)$;

d) $k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $k(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, x_3)$;

e) $l : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $l(x_1, x_2, x_3) = (x_1+3, x_2, x_3)$.

2. Cho f: V→ V' là một ánh xạ tuyến tính và hệ vectơ $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_r}$ của V. Chứng minh rằng nếu hệ vectơ $f(\overrightarrow{\alpha_1}), f(\overrightarrow{\alpha_2}), \ldots, f(\overrightarrow{\alpha_r})$ độc lập tuyến tính trong V' thì hệ vectơ đã cho cũng độc lập tuyến tính.

3. Cho V và V' là hai không gian vectơ trên trường K, f: V → V' là một toàn cấu, $\overrightarrow{\varepsilon_1}', \overrightarrow{\varepsilon_2}', \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n}'$ là một cơ sở của V'. Với mỗi $\overrightarrow{\varepsilon_i}'$ chọn một vectơ $\overrightarrow{\alpha_i}$ sao cho $f(\overrightarrow{\alpha_i}) = \overrightarrow{\varepsilon_i}', i = 1, \ldots, n$. Chứng minh rằng:

a) Hệ vectơ $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_n}$ độc lập tuyến tính;

b) Nếu f là một đẳng cấu thì $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_n}$ lập thành một cơ sở của V.

4. Cho V, V' là hai không gian vectơ trên trường K với số chiều của V' hữu hạn, f: V → V' là một toàn cấu. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ tuyến tính g: V' → V sao cho fg là ánh xạ đồng nhất trên V'. Ánh xạ g có duy nhất không?

5. Giả sử E = K[X] là không gian vectơ các đa thức của ẩn X trên trường K, và p là một số tự nhiên. Xét tự đồng cấu

$$f: E \to E$$
$$P \mapsto f(P) = (1 - pX)P + X^2P'$$

trong đó P' là đạo hàm của đa thức P. Chứng minh f là đơn cấu, nhưng không phải là toàn cấu.

Lời giải

1. Tất cả là ánh xạ tuyến tính trừ d) và e).

2. Ta giả sử V và V' là hai K - không gian vectơ. Giả sử có $x_1, x_2, \ldots, x_r \in K$ để

$$x_1\overrightarrow{\alpha_1} + x_2\overrightarrow{\alpha_2} + \ldots + x_r\overrightarrow{\alpha_r} = \vec{0}$$

Lấy ảnh bởi f của hai vế, ta được:

$$f(x_1\overrightarrow{\alpha_1} + \ldots + x_r\overrightarrow{\alpha_r}) = f(x_1\overrightarrow{\alpha_1}) + \ldots + f(x_r\overrightarrow{\alpha_r}) =$$
$$= x_1 f(\overrightarrow{\alpha_1}) + \ldots + x_r f(\overrightarrow{\alpha_r}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$$

Nhưng $\{f(\overrightarrow{\alpha_1}), \ldots, f(\overrightarrow{\alpha_r})\}$ độc lập tuyến tính, nên $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Điều đó cho ta kết luận hệ $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_r}\}$ độc lập tuyến tính.

3. a) Áp dụng bài 2.

b) Nếu f là một đẳng cấu thì dim V = n, do đó hệ n vectơ độc lập tuyến tính $\{\overrightarrow{\alpha_1}, \ldots, \overrightarrow{\alpha_r}\}$ là một cơ sở của V.

4. Giả sử $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$ là một cơ sở của V'. Vì f là toàn cấu nên

$$f^{-1}(\overrightarrow{\varepsilon_i}) \neq 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Với mỗi i, chọn $\overrightarrow{\alpha_i} \in f^{-1}(\overrightarrow{\varepsilon_i})$, ta có $f(\overrightarrow{\alpha_i}) = \overrightarrow{\varepsilon_i}$, i = 1, 2, ..., n.

Xét ánh xạ tuyến tính g: V' → V xác định bởi

$$g : \overrightarrow{\varepsilon_i} \mapsto g(\overrightarrow{\varepsilon_i}) = \overrightarrow{\alpha_i}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ta có, với mỗi $\vec{x} = x_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + x_2\overrightarrow{\varepsilon_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{\varepsilon_n} \in V'$:

$$fg(\vec{x}) = fg\left(\sum_i^n x_i\overrightarrow{\varepsilon_i}\right) = f\left(\sum_i^n x_i g(\overrightarrow{\varepsilon_i})\right) = f\left(\sum_i^n x_i\overrightarrow{\alpha_i}\right)$$
$$= \sum_i^n x_i f(\overrightarrow{\alpha_i}) = \sum_i^n x_i\overrightarrow{\varepsilon_i} = \vec{x}$$

Vậy fg là ánh xạ đồng nhất trên V'.

g có thể không duy nhất vì mỗi $f^{-1}(\overrightarrow{\varepsilon_i})$ có thể có nhiều hơn một phần tử. Ta lấy ví dụ toàn cấu sau đây:

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

Xét cơ sở {1} của **R**. Ta có $f^{-1}(1)$ với rất nhiều nhiều phần tử, chẳng hạn (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) đều thuộc $f^{-1}(1)$, từ đó ta có rất nhiều g sao cho $fg = 1_{\mathbf{R}}$, chẳng hạn:

$$x \mapsto (x, 0, 0)$$

$$x \mapsto (0, x, 0)$$

$$x \mapsto (0, 0, x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ta chú ý bài toán có thể bỏ giả thiết dim V' hữu hạn.

5. Ta lần lượt có:

$$P = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$$

$$P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$$

$$X^2 P' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (i-1) a_{i-1} X^i$$

$$pXP = pa_0 X + \sum_{i=1}^{n} pa_i X^{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} pa_{i-1} X^i$$

Từ đó:

$$f(P) = P - pXP + X^2P' =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}(p+1-i))X^i + a_n(n-p)X^{n+1}$$

Giả sử f(P) = 0, thế thì ta phải có

$$a_0 = 0,$$
$$a_i = (p + 1 - i)a_{i-1},\ i = 1, 2, ..., n$$

nghĩa là $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$, hay P = 0, hay f là đơn ánh.

f không phải là toàn ánh. Thật vậy ta xét bậc (P) = n. Hai trường hợp xảy ra: hoặc n = p hoặc n ≠ p.

* n = p, bậc (f(P)) ≤ n ,

* n ≠ p, bậc (f(P)) = n + 1.

Từ đó ta thấy ngay rằng không có một đa thức P nào để bậc của f(P) bằng p + 1. Vậy f không toàn ánh.

ẢNH - HẠT NHÂN

6. Tìm ảnh và hạt nhân của những ánh xạ tuyến tính trong bài tập 1.

7. Cho A và B là hai không gian vectơ trên trường K, V = A × B là một không gian vevtơ trên K với phép cộng và phép nhân với số k xác định như sau:

$$(\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\beta_1}) + (\overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\beta_2}) = (\overrightarrow{\alpha_1} + \overrightarrow{\alpha_2}, \overrightarrow{\beta_1} + \overrightarrow{\beta_2}),$$
$$k(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (k\vec{\alpha}, k\vec{\beta})$$

(Xem bài tập 4, Ch.II).

Chứng minh rằng:

a) Ánh xạ p : V → A xác định bởi $p(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \vec{\alpha}$ là toàn cấu;

b) Ánh xạ u : B → V xác định bởi $\vec{u}(\vec{\beta}) = (\vec{0}, \vec{\beta})$ là một đơn cấu.

Tìm Kerp và Imu.

8. Cho f: V → V' là một toàn cấu, hệ vectơ $\overrightarrow{\varepsilon'_1}, \overrightarrow{\varepsilon'_2}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon'_n}$ là một cơ sở của V'. Với mỗi $\overrightarrow{\varepsilon_i}'$ chọn một $\overrightarrow{\varepsilon_i}$ cố định sao cho $f(\overrightarrow{\varepsilon_i}) = \overrightarrow{\varepsilon_i}'$, i = 1, 2, ...,n.

Gọi W là không gian con của V sinh bởi hệ vectơ $\{\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}, \ldots, \overline{\varepsilon_n}\}$ và $U = \mathrm{Ker} f$.

Chứng minh rằng $V = U \oplus W$.

9. Giả sử E là một K - không gian vectơ, E_1 và E_2 là hai không gian con của E. Giả sử:

$$\phi: E_1 \times E_2 \to E$$

$$(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \mapsto \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

a) Chứng minh ϕ là một ánh xạ tuyến tính và cho biết $\mathrm{Im}\phi$.

b) Chứng minh $\mathrm{Ker}\phi$ đẳng cấu với $E_1 \cap E_2$.

c) Từ a) và b) hãy suy ra

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

khi $\dim E_1$ và $\dim E_2$ hữu hạn.

10. Giả sử E là một K - không gian vectơ và $f: E \to E$ là một tự đồng cấu. Chứng minh

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im} f$$

11. Giả sử $f: E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính và $\dim E = \dim F = n$. Chứng minh các khẳng định sau là tương đương:

i) f là toàn ánh;

ii) f là đơn ánh;

iii) f là song ánh;

iv) $\mathrm{hg} f = n$ (hạng của f, ký hiệu hg f, được định nghĩa bằng $\dim(\mathrm{Im} f)$).

12. Giả sử E là một K- không gian vectơ có số chiều bằng $n > 0$, và $f: E \to E$ là một tự đồng cấu khác 0. Giả sử f là luỹ linh, nghĩa là $\exists k \in \mathbb{N}^*$ để $f^k = 0$. Chứng minh $f^n = 0$.

Lời giải

6. a) $\text{Ker } f = \{(0, x_2, x_3) \mid (x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2\} \simeq \mathbf{R}^2$,

$\text{Im} f = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\} \simeq \mathbf{R}$.

b) $\text{Ker } g = \{(0, x_2, 0) \mid x_2 \in \mathbf{R}\} \simeq \mathbf{R}$,

$\text{Im } g = \mathbf{R}^2$

c) $\text{Ker } h = \{(x, -x, y, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \simeq \mathbf{R}^2$.

$\text{Im } h = \mathbf{R}^2$.

7. a) $\text{Ker } p = \{(\vec{0}, \vec{\beta}) \mid \vec{\beta} \in B\} \simeq B$.

b) $\text{Im } u = \{(\vec{0}, \vec{\beta}) \mid \vec{\beta} \in B\} \simeq B$.

8. Theo bài tập 3, hệ vectơ $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$ là độc lập tuyến tính, như vậy hệ vectơ là một cơ sở của không gian con W sinh bởi các vectơ của hệ. Vậy $W \simeq V'$ bởi đẳng cấu g mà sự tồn tại được xác định bởi quan hệ $fg = 1_{V'}$ (bài tập 4).

Giả sử $\vec{x} \in V$. Xét vectơ $\vec{x} - gf(\vec{x})$. Ta có:

$$f(\vec{x} - gf(\vec{x})) = f(\vec{x}) - 1_{V'} f(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$$

Vậy $\vec{y} = \vec{x} - gf(\vec{x}) \in \text{Ker} f$, trong đó $g(f(\vec{x})) \in g(V') = W$. Từ đó, $\vec{x} = \vec{y} + gf(\vec{x}) \in U + W$. Xét $\vec{z} \in U \cap W$. $\vec{z} \in U$ cho ta $f(\vec{z}) = \vec{0}$. Mặt khác $\vec{z} \in W$ cho ta $\vec{z} = g(\vec{z'})$ với $\vec{z'} \in V'$. Từ đó:

$$\vec{0} = f(\vec{z}) = \underbrace{fg}_{1_{V'}}(\vec{z'}) = \vec{z'}$$

Vậy $\vec{z} = g(\vec{z'}) = g(\vec{0}) = \vec{0}$, nghĩa là $U \cap W = \{\vec{0}\}$, do đó $V = U \oplus W$. Từ tổng trực tiếp này ta suy ra:

$$\dim V = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f).$$

9. a) $\mathrm{Im}\phi = E_1 + E_2$.

b) Ta có $\mathrm{Ker}\phi = \{(\vec{x}, -\vec{x}) \mid \vec{x} \in E_1 \cap E_2\}$. Xét ánh xạ sau:

$$f: E_1 \cap E_2 \to \mathrm{Ker}\,\phi$$
$$\vec{x} \mapsto (\vec{x}, -\vec{x})$$

Hiển nhiên f là một ánh xạ tuyến tính và là một đẳng cấu.

c) Giả sử $\dim E_1 = n_1$ và $\dim E_2 = n_2$. Thế thì $E_1 \cong K^{n_1}$ và $E_2 \cong K^{n_2}$. Từ đó $E_1 \times E_2 \cong K^{n_1} \times K^{n_2} \cong K^{n_1+n_2}$. Vậy $\dim(E_1 \times E_2) = n_1 + n_2 = \dim E_1 + \dim E_2$. Bây giờ áp dụng bài 8, ta được:

$\dim E_1 + \dim E_2 = \dim(E_1 \times E_2) = \dim(\mathrm{Ker}\phi) + \dim(\mathrm{Im}\phi)$,

hay (theo a) và b)):

$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

10. "$\Rightarrow$". Từ $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$, ta có $f|_{\mathrm{Im}f}$ là một đẳng cấu từ Imf lên $\mathrm{Im}f^2$. Đặt $g: \mathrm{Im}f^2 \to \mathrm{Im}f$ là đẳng cấu ngược của $f|_{\mathrm{Im}f}$, ta có $fg = 1_{\mathrm{Im}f^2}$ và $g(\mathrm{Im}f^2) = \mathrm{Im}f$. Ta ở trong tình hình như bài tập 8, vậy $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$.

"$\Leftarrow$". Giả sử $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$. Vậy $\mathrm{Im}f = f(E) = f(\mathrm{Im}f) = \mathrm{Im}f^2$.

11. Từ công thức $\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\,f) + \dim(\mathrm{Im}f)$ ta có các khẳng định i), ii), iii), iv) là tương đương.

12. Trước hết ta chú ý f không thể là một đẳng cấu. Vì nếu f là đẳng cấu ta sẽ có:

$$E = \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 = \ldots = \mathrm{Im}f^k = 0,$$

nhưng E đã giả sử có số chiều >0, vậy $E \neq 0$; f không phải là đẳng cấu, theo bài tập 11, $\dim \mathrm{Im}\,f \leq n - 1$.

Các không gian con Imf, $\mathrm{Im}f^2$,..., $\mathrm{Im}f^p$,...làm thành một dãy giảm

$$\mathrm{Im}f \supset \mathrm{Im}(f^2) \supset \ldots \mathrm{Im}(f^p) \supset \mathrm{Im}(f^{p+1}) \supset \ldots$$

Ta hãy chứng minh rằng nếu $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$, thì ta sẽ có $\mathrm{Im}(f^s) = \mathrm{Im}(f^p)$ với mọi $s \geq p+1$.

Thật vậy, ta có các đẳng thức:

$$f^p(E) = f^{p+1}(E)$$

$$f^{p+1}(E) = f^{p+2}(E)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{s-1}(E) = f^s(E)$$

Từ đó ta suy ra $\mathrm{Im}\,(f^s) = \mathrm{Im}(f^p)$ với mọi $s \ge p + 1$.

Bây giờ ta hãy chứng minh $f^n = 0$. Giả sử $f^n \ne 0$. Thế thì từ dãy giảm

$$n - 1 \ge \dim(\mathrm{Im}f) \ge \dim(\mathrm{Im}f^2) \ge \dots \ge \dim(\mathrm{Im}f^n) \ge 1$$

ta có n số là các $\dim(\mathrm{Im}f^i)$, $1 \le i \le n$, lấy giá trong $\{1, 2, \dots, n-1\}$, thế thì ắt phải có hai số liên tiếp trùng nhau, giả sử $\dim(\mathrm{Im}f^p) = \dim(\mathrm{Im}f^{p+1})$, vậy $\mathrm{Im}f^p = \mathrm{Im}f^{p+1}$. Nhưng theo trên, ta sẽ có $\mathrm{Im}f^s = \mathrm{Im}f^p$, với mọi $s \ge p + 1$. Từ đó $\mathrm{Im}f^k = \mathrm{Im}0 = \mathrm{Im}f^p$, và do đó $\dim(\mathrm{Im}f^p) = 0$. Nhưng điều đó mâu thuẫn với $\dim(\mathrm{Im}\,f^p)$ lấy giá trị trong $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Vậy phải có $f^n = 0$.

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

13. $\mathrm{Hom}_K(V, V')$ là tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ không gian vectơ V đến không gian vectơ V'. Chứng minh rằng $\mathrm{Hom}_K(V, V')$ là một không gian vectơ trên trường K.

14. Xác định $f + g$, gf và fg trong các trường hợp sau, rồi tìm hạt nhân của chúng:

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$

$g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_3)$;

b) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (2x_1, 0)$

15. Cho $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_3 - x_2)$;

$g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3)$. Tìm $f - g$.

16. Cho $f: V \to V'$, $g: V \to V''$ là những ánh xạ tuyến tính sao cho $\mathrm{Ker}f \subset \mathrm{Ker}g$; hơn nữa f là một toàn cấu. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h: V' \to V''$ sao cho $hf = g$.

17. Cho f và g là hai ánh xạ tuyến tính từ V đến V'. Chứng minh rằng

$$\mathrm{Ker}(f + g) \supset \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Ker}g.$$

18. Cho $f: V \to V'$, $g: V' \to V''$ là hai ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) $\mathrm{Im}(gf) = g(\mathrm{Im}f)$;

b) $\mathrm{Ker}(gf) = f^{-1}(\mathrm{Ker}g)$.

19. Giả sử $f: V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính trong đó dim V và dim V' hữu hạn. Chứng minh rằng f là một đẳng cấu khi và chỉ khi nó biến một cơ sở của V thành một cơ sở của V'.

20. Cho $f: V \to V'$, $g: V' \to V''$ là những ánh xạ tuyến tính. Chứng minh rằng:

a) Nếu gf là một đơn cấu thì f là một đơn cấu;

b) Nếu gf là một toàn cấu thì g là một toàn cấu.

21. Cho $f: V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính. A là một không gian con của V, B là một không gian con của V'. Chứng minh rằng

a) $f^{-1}f(A) = A + \mathrm{Ker}f$;

b) $ff^{-1}(B) = B \cap \mathrm{Im}f$.

22. Giả sử E, F_1, F_2 là ba K - không gian vectơ. Chứng minh

$$\mathrm{Hom}_K(E, F_1 \times F_2) \cong \mathrm{Hom}_K(E, F_1) \times \mathrm{Hom}_K(E, F_2).$$

23. Giả sử E, E_1, E_2 là ba K - không gian vectơ. Chứng minh

$$\mathrm{Hom}_K(E_1 \times E_2, F) \cong \mathrm{Hom}_K(E_1, F) \times \mathrm{Hom}_K(E_2, F).$$

24. Giả sử E là một K - không gian vectơ có số chiều hữu hạn. Đặt $E^* = \mathrm{Hom}_K(E, K)$, E^* gọi là đối ngẫu của E, mỗi $u \in E^*$ gọi là một dạng tuyến tính trên E. Chứng minh $\dim E^* = \dim E$.

25. Giả sử E và F là hai K - không gian vectơ có số chiều hữu hạn. Tính dim $(Hom_K(E, F))$.

26. Giả sử E là một K - không gian vectơ, F là một không gian con của E. Ta gọi F là một *siêu phẳng* của E nếu có một $\vec{a} \in E$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ sao cho $E = F \oplus K\vec{a}$. Chứng minh F là một siêu phẳng khi và chỉ khi có một dạng tuyến tính u khác 0 sao cho F = Ker u.

27. Giả sử E và F là hai K - không gian vectơ có số chiều hữu hạn. Xét ánh xạ ϕ xác định như sau:

$$\phi : Hom_K(E,F) \to Hom_K(F^*, E^*)$$
$$u \mapsto \phi(u): F^* \to E^*$$
$$s \mapsto s \circ u$$

trong đó E^* và F^* là đối ngẫu của E và F. Người ta ký hiệu $\phi(u)$ bằng ${}^tu$ và gọi là chuyển vị của u.

a) Chứng minh ϕ là một đơn cấu. ϕ có phải là một đẳng cấu không?

b) Giả sử E = F, lúc đó ta có

$$\phi: End_K(E) \to End_K(E^*)$$

Chứng minh:

$$\phi(u \circ v) = \phi(v) \circ \phi(u)$$
$$\phi(1_E) = 1_{E^*}$$
$$\phi(u^{-1}) = \phi(u)^{-1} \text{ (u là đẳng cấu).}$$

c) Giả sử có $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ là hai ánh xạ tuyến tính, từ đó có $G^* \xrightarrow{{}^tv} F^* \xrightarrow{{}^tu} E^*$; chứng minh ${}^t(v \circ u) = {}^tu \circ {}^tv$ với ${}^tu$, ${}^tv$, ${}^t(v \circ u)$ là chuyển vị của u,v và $v \circ u$.

28. Giả sử E là **R** - không gian vectơ gồm các đa thức của ẩn x với hệ số thực có bậc ≤ 3 và đa thức 0, và u là một tự đồng cấu của E xác định bởi:

$$u: p(x) \mapsto p'(x + 1) + p'(x - 1) - p'(x)$$

trong đó p'(x) là đạo hàm của đa thức p(x). Giả sử f là dạng tuyến tính trên E : $p(x) \mapsto \int_0^1 p(x)dx = f(p)$.

a) Hãy xác định dạng tuyến tính ${}^t u(f) = \phi$.

b) Trong đối ngẫu E* của E, ta xác định bốn phần tử $e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*$ bởi

$$\forall p \in E \quad e_1^*(p) = p(0), e_2^*(p) = p(1),$$
$$e_3^*(p) = p'(0), e_4^*(p) = p'(1).$$

Chứng minh B* = $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ là một cơ sở của E*, và xác định cơ sở B= $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ của E để B* là đối ngẫu của B, nghĩa là

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \ ; i, j = 1,2,3,4$$

c) Tính các toạ độ của ϕ trong cơ sở B*.

29. Giả sử E là K- không gian vectơ, và $f \in End_K(E)$. Ta gọi f là lũy đẳng nếu $f^2 = f$.

a) Chứng minh f là lũy đẳng khi và chỉ khi $1_E - f$ là luỹ đẳng.

b) Chứng minh nếu f luỹ đẳng thì E = Kerf ⊕ Imf.

c) Giả sử A và B là hai không gian con của E sao cho E =A ⊕ B và p: E → E là phép chiếu: $\vec{a} + \vec{b} \mapsto \vec{b}$ $(\vec{a} \in A, \vec{b} \in B)$. Chứng minh $p^2 = p$.

d) Giả sử f: E → E là một lũy đẳng. Từ b) hãy chứng minh f là một phép chiếu.

30. Giả sử E là **R** - không gian vectơ. Cho $\alpha \in \mathbf{R}$, $\vec{u} \in E$ và $f \in End_K(E)$ sao cho $f^3 = 1_E$. Tìm $\vec{x} \in E$ sao cho $\vec{x} + \alpha f(\vec{x}) = \vec{u}$.

Lời giải

13. Ta lần lượt chứng minh $Hom_K(V, V')$ cùng với phép cộng hai ánh xạ tuyến tính và phép nhân một ánh xạ tuyến tính với một phần tử của K có các tính chất sau đây:

1) $f + (g + h) = (f + g) + h$. Thật vậy, ta có:

$$\left(f + (g + h)\right)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (g + h)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + (g(\vec{x}) + h(\vec{x}))$$

$$= (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) + h(\vec{x}) \text{ (vì phép cộng trong V' là kết hợp)}$$

$$= (f + g)(\vec{x}) + h(\vec{x}) = \left((f + g) + h\right)(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V.$$

Vậy ta suy ra $f + (g + h) = f + (g + h)$.

2) $f + g = g + f$. Chứng minh tương tự.

3) $0: V \to V'$, $\vec{x} \mapsto \overrightarrow{0_V}$, $0 + f = f$.

4) $- f: V \to V'$, $\vec{x} \mapsto -f(\vec{x})$, $f + (-f) = 0$.

5) $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$; $\lambda, \mu \in K$, $f: V \to V'$

Thật vậy, ta có:

$$((\lambda + \mu)f)\ (\vec{x}) = (\lambda + \mu)\ f(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{x}) =$$

$$= (\lambda f)\vec{x} + (\mu f)\vec{x} = (\lambda f + \mu f)(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V.$$

6) $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$; $\lambda \in K$, $f, g \in Hom_K(V, V')$.

Chứng minh tương tự.

7) $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$; $\lambda, \mu \in K$, $f \in Hom_K(V, V')$

8) $1.f = f$. $1 \in K$, $f \in Hom_K(V, V')$.

Ta nhận xét tám tính chất của cấu trúc K - không gian vectơ được thỏa mãn do V' là một K - không gian vectơ; việc chứng minh tám tính chất đó y hệt như khi ta chứng minh bài tập 4 của chương II.

Như vậy $Hom_K(V, V')$ là một K - không gian vectơ gọi là *không gian vectơ các ánh xạ tuyến tính từ K - không gian vectơ V vào K - không gian vectơ V'*.

14. a) $f + g: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0) + (x_1 - x_2, 0, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2, x_3)$,

$gf: (x_1, x_2, x_3) \overset{f}{\mapsto} (x_1, x_2, 0) \overset{g}{\mapsto} (x_1 - x_2, 0, 0)$,

$fg: (x_1, x_2, x_3) \overset{g}{\mapsto} (x_1 - x_2, 0, x_3) \overset{f}{\mapsto} (x_1 - x_2, 0, 0)$,

$\mathrm{Ker}(f+g) = \{(0,0,0)\}$,

$\mathrm{Ker}\, gf = \{(x, x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Ker}\, fg$.

b) $f+g: (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2) + (2x_1, 0) = (3x_1 + x_2, x_1 - x_2)$,

$gf: (x_1, x_2) \overset{f}{\mapsto} (x_1 + x_2, x_1 - x_2) \overset{g}{\mapsto} (2(x_1 + x_2), 0)$,

$fg: (x_1, x_2) \overset{g}{\mapsto} (2x_1, 0) \overset{f}{\mapsto} (2x_1, 2x_1)$,

$\mathrm{Ker}\,(f+g) = \{(0,0)\}$,

$\mathrm{Ker}\, gf = \{(x, -x) \mid x \in \mathbf{R}\}$,

$\mathrm{Ker}\, fg = \{(0, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

15. $f - g: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1, x_3 - x_2) - (x_1 - x_2, x_3) = (x_1 + x_2, -x_2)$.

16. Giả sử $\vec{y} \in V'$. Vì f là toàn cấu, nên $f^{-1}(\vec{y}) \neq \emptyset$. Giả sử $\vec{x} \in f^{-1}(\vec{y})$, thế thì $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Ta hãy chứng minh $f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x} + \mathrm{Ker}\, f$. Hiển nhiên ta có $\vec{x} + \mathrm{Ker}\, f \subset f^{-1}(\vec{y})$. Giả sử $\overrightarrow{x_1} \in f^{-1}(\vec{y})$ thế thì $f(\overrightarrow{x_1}) = \vec{y}$, vậy $f(\overrightarrow{x_1} - \vec{x}) = \vec{0}$, hay $\overrightarrow{x_1} - \vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f$, hay $\overrightarrow{x_1} = \vec{x} + \vec{z}$ với $\vec{z} \in \mathrm{Ker}\, f$, vậy $\overrightarrow{x_1} \in \vec{x} + \mathrm{Ker}\, f$, hay $f^{-1}(\vec{y}) \subset \vec{x} + \mathrm{Ker}\, f$. Từ hai bao hàm thức đó ta có $\vec{x} + \mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(\vec{y})$. Vì $\vec{x}$ lấy tùy ý trong $f^{-1}(\vec{y})$, nên ta cũng có $\vec{x} + \mathrm{Ker}\, f = \overrightarrow{x_1} + \mathrm{Ker}\, f$, với $\vec{x}, \overrightarrow{x_1} \in f^{-1}(\vec{y})$.

Bây giờ ta hãy xây dựng ánh xạ tuyến tính h: $V' \to V''$. Lấy $\vec{y} \in V'$

$$\vec{y} \longrightarrow f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x} + \mathrm{Ker}\, f \longmapsto g(\vec{x}) \overset{\text{đặt}}{=} h(\vec{y})$$

Vấn đề đặt ra là h trước hết có phải là một ánh xạ không, nghĩa là nếu ta lấy một $\overrightarrow{x_1}$ khác $\vec{x}$, nhưng vẫn thuộc $f^{-1}(\vec{y})$, thì $g(\overrightarrow{x_1})$ có bằng $g(\vec{x})$ không ? $\overrightarrow{x_1} \in f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x} + \mathrm{Ker}\, f \subset \vec{x} + \mathrm{Ker}\, g$ $(\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g)$, vậy

$\overrightarrow{x_1} = \vec{x} + \vec{z}, \vec{z} \in$ Kerg, cho nên $g(\overrightarrow{x_1}) = g(\vec{x})$, nghĩa là h xác định như vậy là một ánh xạ.

Để chứng minh h là ánh xạ tuyến tính, ta chỉ cần chú ý rằng

$$f^{-1}(\vec{y}) = \vec{x} + \text{Ker } f,$$

$$f^{-1}(\vec{y'}) = \vec{x'} + \text{Ker } f,$$

$$f^{-1}(\vec{y} + \vec{y'}) = \vec{x} + \vec{x'} + \text{Ker } f,$$

$$f^{-1}(\lambda \vec{y}) = \lambda \vec{x} + \text{Ker } f, \lambda \in K$$

ta sẽ được

$$\vec{y} + \vec{y'} \mapsto \vec{x} + \vec{x'} + \text{Ker } f \mapsto h(\vec{y} + \vec{y'}) = g(\vec{x} + \vec{x'})$$

$$= g(\vec{x}) + g(\overrightarrow{x'}) = h(\vec{y}) + h(\vec{y'})$$

$$\lambda \vec{y} \mapsto \lambda \vec{x} + \text{Ker } f \mapsto h(\lambda \vec{y}) = g(\lambda \vec{x}) = \lambda g(\vec{x}) = \lambda h(\vec{y}).$$

Hiển nhiên ta có hf = g, với h xây dựng như vậy. Giả sử có h': V' $\to$ V" để h'f = g. Ta hãy chứng minh h' = h. Thật vậy giả sử $\vec{y} \in V'$. Vì f là toàn ánh, nên $\exists \vec{x} \in V, f(\vec{x}) = \vec{y}$. Từ đó ta có $h(\vec{y}) = h(f(\vec{x})) = h'(f(\vec{x})) = h'(\vec{y})$, với mọi $\vec{y} \in V'$. Vậy h = h'.

17. $\vec{x} \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g \Rightarrow f(\vec{x}) = g(\vec{x}) = \vec{0}$

$$\Rightarrow (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(f + g).$$

18. a) Imf gf = (gf) (V) = g(f(V)) = g(Imf).

b) $\vec{x} \in \text{Ker } gf \Leftrightarrow g(f(\vec{x})) = \vec{0} \Leftrightarrow f(\vec{x}) \in \text{Ker } g \Leftrightarrow \vec{x} \in f^{-1}(\text{Ker } g)$.

19. Xem (§1, 1.3).

20. a) $\vec{x} \in V, f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ (vì gf đơn cấu). Vậy f là đơn cấu.

b) Kết hợp 18 a) với giả thiết gf toàn cấu, ta có:

$$V'' = \mathrm{Im}(gf) = g(\mathrm{Im} f) \subset g(V')$$

Vậy $g(V') = V''$, nghĩa là g toàn cấu.

21. a) Hiển nhiên ta có $A + \mathrm{Ker}\, f \subset f^{-1}(f(A))$. Lấy $\vec{x} \in f^{-1}(f(A))$ $\Rightarrow f(\vec{x}) \in f(A) \Rightarrow \exists \vec{a} \in A, f(\vec{x}) = f(\vec{a}) \Rightarrow f(\vec{x} - \vec{a}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} - \vec{a} \in \mathrm{Ker}\, f$ $\Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{b} \in \mathrm{Ker}$. Vậy $f^{-1}(f(A)) \subset A + \mathrm{Ker}\, f$. Kết hợp hai bao hàm thức, ta có $A + \mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(f(A))$.

b) $\vec{b} \in B \cap \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow \vec{b} = f(\vec{x}) \in B, \vec{x} \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \vec{b} \in ff^{-1}(B)$.

22. Đặt p_1 và p_2 là các phép chiếu:

$$\begin{aligned} F_1 \times F_2 &\xrightarrow{p_1} F_1 \\ (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) &\mapsto \overrightarrow{x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 \times F_2 &\xrightarrow{p_2} F_2 \\ (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) &\mapsto \overrightarrow{x_2} \end{aligned}$$

Ta hãy chứng minh với mỗi cặp ánh xạ tuyến tính $f_1: E \to F_1$, $f_2: E \to F_2$, ta có một ánh xạ tuyến tính duy nhất $f: E \to F_1 \times F_2$ làm hai tam giác sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
 & F_1 \times F_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
F_1 & & F_2 \\
 & E \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Nghĩa là $f_1 = p_1 \circ f$, $f_2 = p_2 \circ f$. Thật vậy, đặt

$$\begin{aligned} f: E &\to F_1 \times F_2 \\ \vec{x} &\mapsto \left(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})\right) \end{aligned}$$

Ta kiểm tra dễ dàng rằng f là ánh xạ tuyến tính duy nhất làm hai tam giác trên giao hoán.

Bây giờ ta hãy xét ánh xạ ϕ sau đây:

$$\begin{aligned} \phi: \mathrm{Hom}_K(E, F_1 \times F_2) &\to \mathrm{Hom}_K(E, F_1) \times \mathrm{Hom}_K(E, F_2) \\ f \quad &\mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f) \end{aligned}$$

Dễ kiểm tra ϕ là ánh xạ tuyến tính. Mặt khác với mỗi cặp

$$(f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}_K(E,F_1) \times \mathrm{Hom}_K(E,F_2)$$

ta đã thấy ở trên rằng tồn tại duy nhất $f: E \to F_1 \times F_2$ để $\phi(f) = (f_1, f_2)$. Sự tồn tại của f nói lên ϕ là toàn ánh và tính duy nhất của nó nói lên ϕ là đơn ánh. Vậy ϕ là một đẳng cấu.

23. Đặt s_1 và s_2 là các đơn cấu:

$$\begin{aligned} s_1 &: F_1 \to F_1 \times F_2 \\ &\quad \vec{x_1} \mapsto (\vec{x_1}, \vec{0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &: F_2 \to F_1 \times F_2 \\ &\quad \vec{x_2} \mapsto (\vec{0}, \vec{x_2}) \end{aligned}$$

Ta hãy chứng minh với mỗi cặp ánh xạ tuyến tính $f_1: F_1 \to E$, $f_2: F_2 \to E$, ta có một ánh xạ tuyến tính duy nhất $f: F_1 \times F_2 \to E$ làm hai tam giác sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
& F_1 \times F_2 \arrow[dd, "f"] & \\
F_1 \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & & F_2 \arrow[ul, "s_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

nghĩa là $f_1 = f \circ s_1$, $f_2 = f \circ s_2$. Thật vậy, đặt

$$f: \quad F_1 \times F_2 \to E$$
$$(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) \mapsto f_1(\overrightarrow{x_1}) + f_2(\overrightarrow{x_2})$$

Ta kiểm tra dễ dàng rằng f là một ánh xạ tuyến tính làm hai tam giác trên giao hoán. Để chứng minh f duy nhất, trước hết ta hãy nhận xét rằng ta có:

(1) $$s_1p_1 + s_2p_2 = 1_{F_1 \times F_2}$$

trong đó p_1 và p_2 là các phép chiếu trong bài 22. Bây giờ giả sử có $f': F_1 \times F_2 \to E$ cũng cho:

$$f' \circ s_1 = f_1$$
$$f' \circ s_2 = f_2.$$

Từ đó

$$f' \circ s_1 \circ p_1 = f_1 \circ p_1,$$
$$f' \circ s_2 \circ p_2 = f_2 \circ p_2.$$

Cộng vế với vế các đẳng thức và chú ý tới (1)

$$f' \circ s_1 \circ p_1 + f' \circ s_2 \circ p_2 = f'(s_1p_1 + s_2p_2) = f' = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2 = f$$

(theo xác định f).

Bây giờ ta hãy xác định ánh xạ tuyến tính ψ sau đây:

$$\Psi : \mathrm{Hom}_K(F_1 \times F_2, E) \to \mathrm{Hom}_K(F_1, E) \times \mathrm{Hom}_K(F_2, E)$$
$$f \mapsto (f \circ s_1, f \circ s_2)$$

Dễ kiểm tra ψ là ánh xạ tuyến tính. Mặt khác với mỗi cặp $(f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}_K(F_1, E) \times \mathrm{Hom}_K(F_2, E)$ ta đã thấy ở trên rằng tồn tại duy nhất $f: F_1 \times F_2 \to E$ để $\psi(f) = (f_1, f_2)$. Vậy ψ là toàn ánh và đơn ánh, do đó ψ là đẳng cấu.

24. Giả sử $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ là một cơ sở của E. Xét ánh xạ f xác định bởi

$$f: E \to E^*$$
$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = x^* : E \to K$$
$$\vec{y} \mapsto x^*(\vec{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

trong đó $x_1, \dots x_n$ và $y_1, \dots, y_n$ lần lượt là các toạ độ của $\vec{x}$ và $\vec{y}$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$. Dễ kiểm tra x^* là một dạng tuyến tính và f là một ánh xạ tuyến tính. Ta hãy chứng minh f là đẳng cấu. Giả sử có $f(\vec{x}) = 0$, điều đó có nghĩa $x^*(\vec{y}) = 0$ với mọi $\vec{y} \in E$. Lấy $\vec{y}$ lần lượt bằng $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$, ta được

$$x^*(\overrightarrow{e_1}) = x_1 = 0$$
$$x^*(\overrightarrow{e_2}) = x_2 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x^*(\overrightarrow{e_n}) = x_n = 0$$

nghĩa là $f(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$; vậy f đơn ánh. Để chứng minh f toàn ánh, ta lấy một dạng tuyến tính tùy ý $u \in E^*$. Đặt $u(\overrightarrow{e_i}) = x_i$, ta có

$$\begin{aligned} u(\vec{y}) &= y_1 u(\overrightarrow{e_1}) + \dots + y_n u(\overrightarrow{e_n}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ &= x^*(\vec{y}) = f(\vec{x})(\vec{y}), \quad \forall (\vec{y}) \in E \end{aligned}$$

trong đó $\vec{x} = x_1 \overrightarrow{e_1} + \dots + x_n \overrightarrow{e_n}$. Vậy $u = f(\vec{x})$, nghĩa là f toàn ánh. f đã là đẳng cấu, nó sẽ biến cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ của E thành cơ sở $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ của E^*. Các dạng tuyến tính e_i^* được xác định theo (1): $e_i^*(\overrightarrow{e_j}) = \delta_{ij}$; $\{e_1^*, \dots e_n^*\}$ gọi là *cơ sở đối ngẫu* của cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$. Từ đó ta có $\dim(E) = \dim(E^*)$.

25. Giả sử dim E = n, dim F = m. Ta có $F \cong K^m$. Vậy theo bài 22, ta có đẳng cấu:

$$Hom_K(E,F) \cong Hom_K(E, K^m) \cong (Hom_K(E,K))^m = (E^*)^m.$$

Nhưng theo bài 24, dim E^*=n. Vậy:

$$(E^*)^m \cong (K^n)^m \cong K^{nm}$$

Từ đó dim $(Hom_K(E,F))$ = nm.

Trên đây ta chỉ thuần túy tính số chiều của $Hom_K(E, F)$, bạn đọc có thể kiểm tra rằng không gian vectơ đó có một cơ sở là $\{u_{ij}\}$ xác định bởi:

$$u_{ij}(\overrightarrow{e_k}) = \delta_{jk}\overrightarrow{f_i}$$

$k = 1, ..., n; j = 1, ..., n; i = 1, ..., m$; trong đó $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ là một cơ sở của E và $\{\overrightarrow{f_1}, ..., \overrightarrow{f_m}\}$ là một cơ sở của F. Trong trường hợp $m = 1$, $Hom_K(E,F) = E^*$, lúc đó các u_{1j} chính là các e_j^* trong bài 24.

26. Giả sử có $E = F \oplus K\vec{a}$. Dễ thấy ánh xạ

$$\begin{aligned} F \oplus K\vec{a} &\to F \times K\vec{a} \\ \vec{x} + \lambda\vec{a} &\mapsto (\vec{x}, \lambda\vec{a}), \quad \vec{x} \in F, \lambda \in K \end{aligned}$$

là một đẳng cấu. Thế thì theo bài 23, cặp ánh xạ tuyến tính

$$\begin{aligned} f_1 : F &\to K \\ \forall\vec{x}, \quad \vec{x} &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_2 : K\vec{a} &\to K \\ \lambda\vec{a} &\mapsto \lambda \end{aligned}$$

cho ta một ánh xạ tuyến tính duy nhất $u \neq 0$ sao cho $u_{|F} = f_1 = 0$ và $u_{|K\vec{a}} = f_2$. Hiển nhiên Ker $u = F$.

Đảo lại giả sử F là một không gian con của E sao cho $F = \text{Ker } u$, với $u: E \to K$ là một dạng tuyến tính khác 0. Vì $u \neq 0$ nên $\exists\, \vec{x} \in E,\ u(\vec{x}) = \lambda \neq 0$. Ta hãy chứng minh u toàn ánh. Thật vậy giả sử $\mu \in K$. Đặt $\vec{y} = \frac{\mu}{\lambda}\vec{x}$, ta có $u(\vec{y}) = u\left(\frac{\mu}{\lambda}\vec{x}\right) = \frac{\mu}{\lambda}u(\vec{x}) = \frac{\mu}{\lambda}.\lambda = \mu$. Vậy theo bài 4, ta có một đơn cấu v xác định bởi:

$$\begin{aligned} v: K &\to E \\ 1 &\mapsto \vec{a}, \quad u(\vec{a}) = 1 \end{aligned}$$

sao cho $uv = 1_K$; và theo bài 8, ta có $E = \text{Ker } u \oplus K\vec{a}$. Vậy $E = F \oplus F\vec{a}$, do đó F là một siêu phẳng của E.

27. Giả sử $e = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ là một cơ sở của E, $f = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, ..., \overrightarrow{f_m}\}$ là một cơ sở của F, $e^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ là cơ sở đối ngẫu của e và $f^* = \{f_1^*, ..., f_m^*\}$ là cơ sở đối ngẫu của f (xem bài 24). Không gian vectơ $Hom_K(E, F)$ có cơ sở $\{u_{ij}\}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$ xác định bởi

$$u_{ij}(\overrightarrow{e_k}) = \delta_{jk}\overrightarrow{f_i} \quad \text{(xem bài 25)}$$

a) Hiển nhiên ánh xạ ϕ là tuyến tính nghĩa là $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$ và $\phi(\lambda u) = \lambda\phi(u)$ với $\lambda \in K$, ta hãy chứng minh ϕ đơn ánh. Giả sử có $\phi(u) = 0$, vậy $\phi(u)(s) = s \circ u = 0$ với mọi $s \in F^*$, vậy ta lại càng có $f_h^* \circ u = 0$, $h = 1,..., m$. Ta hãy biểu diễn u qua cơ sở $\{u_{ij}\}$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$

$$u = \sum_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}} \lambda_{ij}.u_{ij}, \quad \lambda_{ij} \in K.$$

Ta có:

$$f_h^*(u(\overrightarrow{e_k})) = \sum_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}} f_h^*(\lambda_{ij}u_{ij}(\overrightarrow{e_k})) = \sum_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}} \lambda_{ij}\delta_{jk}f_h^*(\overrightarrow{f_i})$$

$$= \sum_{j=1,...,m} \lambda_{hj}\delta_{jk} = \lambda_{hk} = 0$$

với $h = 1, ..., m$ và $k = 1, ..., n$. Ta suy ra $u = 0$, nghĩa là ϕ đơn ánh. Mặt khác theo bài 25, $\dim_K(E, F) = nm = \dim Hom_K(F^*, E^*)$. Theo bài 11, ϕ là đẳng cấu.

b) $\phi(u \circ v)$: $\quad E \to K$

$$\begin{aligned} s &\mapsto s \circ (u \circ v) \\ &= (s \circ u) \circ v \\ &= \phi(v)(\phi(u)(s)) \end{aligned}$$

Vậy $\phi(u \circ v) = \phi(v) \circ \phi(u)$. Hiển nhiên $\phi(1_E) = 1_{E^*}$. Giả sử u là một đẳng cấu, vậy:

$$\phi(u^{-1} \circ u) = \phi(1_E) = 1_{E^*} = \phi(u) \circ \phi(u^{-1})$$

$$\phi(u \circ u^{-1}) = \phi(1_E) = 1_{E^*} = \phi(u^{-1}) \circ \phi(u)$$

Ta suy ra: $\phi(u^{-1}) = (\phi(u))^{-1}$

c) Chứng minh như trong b).

28. a) Theo định nghĩa của ${}^t u$ (xem bài 27):

$$\begin{aligned} {}^t u : \quad & E^* \to E^* \\ & s \mapsto {}^t u(s) = s \circ u \end{aligned}$$

Vậy ${}^t u(f) = \phi$ là dạng song tuyến tính sau đây :

$$E \xrightarrow{u} E \xrightarrow{f} \mathbf{R}$$

$$p(x) \mapsto p'(x+1) + p'(x-1) - p'(x) \mapsto \int_0^1 (p'(x+1) + p'(x-1) - p'(x))dx$$

$$\begin{aligned} &= \left| p(x+1) \right|_0^1 + \left| p(x-1) \right|_0^1 - \left| p(x) \right|_0^1 \\ &= p(2) - 2p(1) + 2p(0) - p(-1) \\ &= \phi(p) \end{aligned}$$

b) Chúng ta hãy tìm bốn phần tử e_1, e_2, e_3, e_4 thuộc E sao cho

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad ,i, j = 1,2,3,4.$$

Theo cách cho các e_i^*, ta được:

$e_1(0) = 1$; $e_1(1) = e'(0) = e'(1) = 0$. Như vậy e_1 là một đa thức thuộc E và nhận 1 là nghiệm kép, vậy có dạng: $e_1 = (\lambda x + \mu)(x - 1)^2$. Từ $e_1(0) = 1$ và $e'_1(0) = 0$, ta được

$$e_1 = (2x + 1)(x - 1)^2.$$

Tương tự ta được:

$$e_2 = (-2x+3)x^2;\ e_3 = (x-1)^2x;\ e_4 = (x-1)x^2.$$

Ta hãy chứng minh $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ độc lập tuyến tính. Giả sử có

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_j e_j = 0$$

Thế thì với mỗi e_i^*:

$$0 = e_i^*(0) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^{4} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i$$

Vậy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, từ đó B độc lập tuyến tính và hơn nữa là một cơ sở của E vì dim E = 4. Hiển nhiên $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ là đối ngẫu của B vì ta đã đặt $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}\ ; i, j = 1, 2, 3, 4$.

c) Giả sử $\phi = \lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \lambda_3 e_3^* + \lambda_4 e_4^*$, vậy

$$\phi(e_j) = \lambda_j,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

a) và b) cho ta

$$\lambda_1 = \phi(e_1) = e_1(2) - 2e_1(1) + 2e_1(0) - e_1(-1) = 11$$
$$\lambda_2 = \phi(e_2) = -11$$
$$\lambda_3 = \phi(e_3) = 6$$
$$\lambda_4 = \phi(e_4) = 6$$

Vậy $\phi = 11e_1^* - 11e_2^* + 6e_3^* + 6e_4^*$.

29. a) $f^2 = f \Leftrightarrow (1_E - f)^2 = 1_E - 2f + f^2 = 1_E - f$.

b) $f^2 = f \Rightarrow \mathrm{Im}f^2 = \mathrm{Im}f \Rightarrow E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$ (xem bài tập 10).

c) Xét

$$\begin{array}{lcccc} E = A \oplus B & \xrightarrow{p} & A \oplus B & \xrightarrow{p} & A \oplus B \\ \forall \vec{a} + \vec{b} \in E, & \vec{a} + \vec{b} \mapsto & \vec{b} & \mapsto & \vec{b} \end{array}$$

Vậy $p(\bar{a}+\bar{b})=\bar{b}=p^2(\vec{a}+\bar{b})$, hay $p^2 = p$.

d) Giả sử $f^2 = f$. Theo b) ta có $E = \mathrm{Kerf} \oplus \mathrm{Imf}$.

Xét :

$$E = \mathrm{Kerf} \oplus \mathrm{Imf} \xrightarrow{f} \mathrm{Kerf} \oplus \mathrm{Imf}$$
$$\bar{a}+\bar{b}=f(\bar{x}) \mapsto f(\bar{a}+f(\bar{x}))=f(\bar{a})+f^2(\bar{x})=\bar{0}+f(\bar{x})=\bar{b}.$$

Vậy f là phép chiếu.

30. Ta tìm $\vec{x} \in E$ để $(1_E+\alpha f)(\vec{x})=\vec{u}$. Từ $f^3 = 1_E$ ta có:

$$\alpha^3 1_E = \alpha^3 f^3 = ((\alpha f+1_E)-1_E)^3 = (\alpha f+1_E)^3 - 3(\alpha f+1_E)^2 + 3(\alpha f+1_E) - 1_E$$

hay

(1) $\quad (\alpha^3+1)1_E = (\alpha f+1_E)[(\alpha f+1_E)^2 - 3(\alpha f+1_E) + 3\,1_E] =$

$$= [(\alpha f+1_E)^2 - 3(\alpha f+1_E) + 3\,1_E](\alpha f+1_E).$$

Trường hợp $\alpha^3+1 \neq 0$, $\alpha f + 1_E$ là một đẳng cấu. Từ (1) ta có:

$$(\alpha f+1_E)^{-1} = \frac{1}{\alpha^3+1}\left[(\alpha f+1_E)^2 - 3(\alpha f+1_E)+3\,1_E\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha^3+1}(\alpha^2 f^2 - \alpha f + 1_E).$$

Vậy ta có một nghiệm $\vec{x}$ duy nhất:

$$\vec{x} = (\alpha f+1_E)^{-1}(\vec{u}) = \frac{1}{\alpha^3+1}(\alpha^2 f^2 - \alpha f + 1_E)(\vec{u})$$
$$= \frac{1}{\alpha^3+1}(\alpha^2 f^2(\vec{u}) - \alpha f(\vec{u}) + \vec{u}).$$

Trường hợp $\alpha^3 + 1 = 0$, nghĩa là $\alpha = -1$. Trong trường hợp này ta phải tìm $\overrightarrow{x_0}$ để

$$(1_E - f)(\overrightarrow{x_0}) = \vec{u}$$

Muốn vậy, ta xét (1) với $\alpha = -1$, ta có

$$(1_E + f + f^2)(1_E - f)(\overrightarrow{x_o}) = (1_E + f + f^2)(\vec{u}) = 0(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$$

i) $(1_E + f + f^2)(\vec{u}) \neq \vec{0}$, không có $\overrightarrow{x_0}$ nào thỏa mãn phương trình.

ii) $(1_E + f + f^2)(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow -f^2(\vec{u}) = \vec{u} + f(\vec{u})$ và ta thấy một nghiệm $\overrightarrow{x_0} = \frac{1}{3}(2\vec{u} + f(\vec{u}))$. Thật vậy

$$\begin{aligned}(1_E - f)\left(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}f(\vec{u})\right) &= \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}f(\vec{u}) - \frac{2}{3}f(\vec{u}) - \frac{1}{3}f^2(\vec{u}) \\ &= \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}f(\vec{u}) - \frac{2}{3}f(\vec{u}) + \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}f(\vec{u}) \\ &= \vec{u}\end{aligned}$$

Tập hợp nghiệm của phương trình sẽ là $\overline{x_o} + \mathrm{Ker}(1_E - f)$.

Chương V

MA TRẬN

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các K- không gian véctơ trong chương này được giả thiết là có số chiều hữu hạn. Việc nghiên cứu K-không gian vectơ $Hom_K(E,F)$ với E và F có số chiều hữu hạn sẽ dẫn tới khái niệm ma trận của một ánh xạ tuyến tính f mà các thành phần của ma trận chính là các tọa độ của ánh xạ tuyến tính f trong không gian vectơ $Hom_K(E,F)$.

1.1. Ma trận của một ánh xạ tuyến tính

Giả sử E và F là hai K-không gian vectơ, dim E=n, dim F = m, với cơ sở lần lượt là : $\mathscr{E} = \{\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}\}, \mathscr{F} = \{\overrightarrow{f_1},...,\overrightarrow{f_m}\}$ và f: E $\rightarrow$ F là một ánh xạ tuyến tính xác định bởi :

$$
(1.1.1)\qquad
\begin{aligned}
f(\overrightarrow{e_1}) &= a_{11}\overrightarrow{f_1} + a_{21}\overrightarrow{f_2} + ... + a_{m1}\overrightarrow{f_m}\\
f(\overrightarrow{e_2}) &= a_{12}\overrightarrow{f_1} + a_{22}\overrightarrow{f_2} + ... + a_{m2}\overrightarrow{f_m}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(\overrightarrow{e_n}) &= a_{1n}\overrightarrow{f_1} + a_{2n}\overrightarrow{f_2} + ... + a_{mn}\overrightarrow{f_m}
\end{aligned}
$$

Ma trận kiểu (m,n):

$$
(1.1.2)\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở* $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.

Ta chú ý : Các vectơ cột của ma trận A là các tọa độ của các vectơ $f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2}), ..., f(\overrightarrow{e_n})$ đối với cơ sở $\mathscr{F}$.

Ký hiệu $Mat_{(m,n)}(K)$ tập hợp các ma trận kiểu (m, n) với thành phần thuộc K, ta có $A \in Mat_{(m,n)}(K)$.

1.2. Song ánh giữa $Hom_K(E,F)$ và $Mat_{(m,n)}(K)$

Ta cố định các cơ sở $\mathscr{E}$ và $\mathscr{F}$ trong E và F. Ta được ánh xạ:

$$\phi: Hom_K(E, F) \to Mat_{(m,n)}(K)$$
$$f \mapsto A$$

với A xác định bởi (1.1.2). Đảo lại cho A, ta có ánh xạ tuyến tính f duy nhất xác định bởi (1.1.1) sao cho $\phi(f) = A$. Vậy ϕ là một song ánh.

1.3. K-không gian vectơ $Hom_K(E,F)$. Tổng của hai ma trận và tích của một ma trận với một vô hướng

Song ánh ϕ trong 1.2. sẽ cho ta phép cộng hai ma trận $A, B \in Mat_{(m,n)}(K)$ và phép nhân một vô hướng $\lambda \in K$ với A để $Mat_{(m,n)}(K)$ là một K-không gian vectơ và ϕ là một đẳng cấu. Cụ thể giả sử :

$$\phi^{-1}(A) = f, \phi^{-1}(B) = g$$

ta định nghĩa *tổng của hai ma trận A và B*, ký hiệu A+B, là ma trận

$$A + B = \phi(f + g)$$

và *tích của λ với A*, ký hiệu λA, là ma trận

$$\lambda A = \phi(\lambda f)$$

Như vậy, nếu $A = (a_{ij})$, $B= (b_{ij})$, thì

(1.3.1) $$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

(1.3.2) $$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Theo (Chương IV, bài 25), không gian vectơ $Hom_K(E, F)$ có một cơ sở $\{u_{ij}\}$, i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n, xác định bởi

(1.3.3) $$u_{ij}(\overrightarrow{e_k}) = \delta_{jk}\overrightarrow{f_i}\ .$$

Để chứng minh $\{u_{ij}\}$ là một cơ sở ta chỉ cần chứng minh nó độc lập tuyến tính vì số chiều của $Hom_K(E,F)$ là $n \times m$ (chương IV, bài 25).

Giả sử có :

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} u_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n)$$

Lấy một vectơ $\vec{e}_k$ tùy ý thuộc cơ sở $\mathscr{E}$, ta có theo (1.3.3) :

$$0(\vec{e_k}) = \vec{0} = \sum_{i,j} \lambda_{ij} u_{ij}(\vec{e_k}) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \delta_{jk} \vec{f_i} = \sum_{i} \lambda_{ik} \vec{f}_i$$

Nhưng $\mathscr{F}$ là độc lập tuyến tính nên $\lambda_{ik} = 0$ với $i = 1, 2, ..., m$. Mặt khác $\vec{e}_k$ lấy tùy ý , nên ta cũng có $\lambda_{ik} = 0$ với $k = 1, 2, ..., n$.

Giả sử $f \in Hom_K(E, F)$, ta có :

$$f = \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij} , \; i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$$

Từ đó :

$$f(\vec{e}_k) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij}(\vec{e}_k) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \delta_{jk} \vec{f}_i = \sum_{i} \alpha_{ik} f_i$$

So sánh với (1.1.1) ta thấy ma trận (α_{ij}) chính là ma trận của f đối với cặp cơ sở $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$.

Ma trận E_{ij} của ánh xạ tuyến tính u_{ij}, theo công thức (1.3.3) là ma trận có các thành phần bằng 0 trừ thành phần ở dòng thứ i và cột thứ j là bằng 1 và $\{E_{ij}\}$, $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$ là một cơ sở của K-không gian vectơ $Mat_{(m,n)}(K)$.

1.4. K-không gian vectơ $Hom_K(E^*,F^*)$. Ma trận chuyển vị

Giả sử $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ là một cơ sở của E và $\mathscr{F} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_m\}$ là một cơ sở của F; $\mathscr{E}^* = \{e_1^*, ..., e_n^*\}$ và $\mathscr{F}^* = \{f_1^*, ..., f_m^*\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\mathscr{E}$ và $\mathscr{F}$ trong E* và F* (chương IV, bài 24). Không gian vectơ $Hom_K(F^*, E^*)$ có một cơ sở $\{u_{ij}^*\}$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$, xác định bởi

(1.4.1) $$u_{ij}^*(f_k^*) = \delta_{jk}\, e_i^*$$

tương tự như công thức (1.3.3) khi ta đã xác định cơ sở của không gian nguồn và không gian đích. Theo (chương IV, bài 27), ánh xạ

$$\mathrm{Hom}_K(E, F) \to \mathrm{Hom}_K(F^*, E^*)$$

$$f \mapsto {}^t f$$

trong đó ${}^t f$ là chuyển vị của f, là một đẳng cấu. Giả sử (a_{ij}), $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, là ma trận của f đối với cặp cơ sơ $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$; ta hãy tìm ma trận của ${}^t f$ đối với cặp cơ sở $(\mathscr{F}^*, \mathscr{E}^*)$. Giả sử (α_{ij}), $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, là ma trận của ${}^t f$. Thế thì theo 1.3 ta có

(1.4.2) $${}^t f = \sum_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}} \alpha_{ij}\, u_{ij}^*$$

Theo định nghĩa của ${}^t f$: ${}^t f(f_k^*) = f_k^* \circ f$

Từ đó :

$$(f_k^* \circ f)(\vec{e}_j) = f_k^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, \vec{f}_i\right) = a_{kj}$$

Mặt khác theo (1.4.2) và (1.4.1) ta có

$${}^t f(f_k^*) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, u_{ij}^*(f_k^*) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \delta_{jk}\, e_i^* = \sum_i \alpha_{ik}\, e_i^*$$

Vậy :

$${}^t f(f_k^*)(\vec{e}_j) = (f_k^* \circ f)(\vec{e}_j) = \left(\sum_i \alpha_{ik}\, e_i^*\right)(\vec{e}_j) = \alpha_{jk}$$

Vậy: $\alpha_{jk} = a_{kj}$, $j = 1, ..., n$, $k = 1, ..., m$.

Như vậy ma trận (α_{jk}) của ánh xạ tuyến tính ${}^t f$, chuyển vị của f, là ma trận có n dòng và m cột, nó suy ra từ ma trận A của f bằng cách viết các cột của A thành các dòng của nó. Người ta ký hiệu ma trận của ${}^t f$ đối với cặp cơ sở đối ngẫu $(\mathscr{F}^*, \mathscr{E}^*)$ bằng ${}^t A$ và gọi là *ma trận chuyển vị của ma trận A*. Từ

$${}^t(f + g) = {}^t f + {}^t g$$

$${}^t(\lambda f) = \lambda\, {}^t f, \ \ \lambda \in K$$

(xem ch IV, bài 27), ta có

$${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B,$$

$${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^t A.$$

1.5. Tích của hai ánh xạ tuyến tính và tích của hai ma trận

Giả sử $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $\mathscr{F} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_m\}$, $\mathscr{G} = \{\vec{g}_1, ..., \vec{g}_l\}$ là các cơ sở lần lượt của các K-không gian vectơ E,F, G. Ta xét tích:

$$h = g \circ f : E \to G,$$

và đặt vấn đề tìm ma trận của $g \circ f$ đối với cặp cơ sở $(\mathscr{E}, \mathscr{G})$ khi biết ma trận A của f và B của g. Muốn vậy ta xét

$$h(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{l} c_{ij} \vec{g}_i$$

Ma trận $C = (c_{ij}) \in Mat_{(l,n)}(K)$, theo định nghĩa, là ma trận của h đối với cặp cơ sở $(\mathscr{E}, \mathscr{G})$. Mặt khác, xét

$$g(f(\vec{e}_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \vec{f}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} g(\vec{f}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \sum_{i=1}^{l} b_{ik} \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}\right)\vec{g}_i$$

Vì $h(\vec{e}_j) = g(f(\vec{e}_j))$, nên

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj} \tag{1.5.1}$$

Ma trận $C = (c_{ij})$ là ma trận của ánh xạ tích $h = g \circ f$, có các thành phần c_{ij} cho bởi công thức (1.5.1) gọi là ma trận *tích của B với A*, ký hiệu BA. Để có thể nhân B với A ta phải có số cột của B bằng số dòng của A.

Vì tích ánh xạ có tính chất kết hợp nên phép nhân ma trận cũng có tính kết hợp, cụ thể $A(BC) = (AB)C$ (tất nhiên nếu có thể nhân chúng được với nhau).

Theo (chương IV, bài 27), ta có ${}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$, nên ta cũng có :

$${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$$

Ta đã có quan hệ giữa phép nhân ánh xạ với phép cộng ánh xạ, cụ thể phép nhân phân phối đối với phép cộng

$$(g_1 + g_2)f = g_1f + g_2f,$$

$$g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2$$

Tính chất phân phối đó được chuyển sang ma trận :

$$(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$$

$$B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$$

1.6. Vành $End_k(E)$ và ma trận vuông

Tập hợp $End_k(E)$ các tự đồng cấu $f : E \to E$ với phép cộng và phép nhân hai ánh xạ là một vành có đơn vị, gọi là vành các tự đồng cấu của E. Nếu ta cố định một cơ sở $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ trong E, ta được một song ánh

$$\phi : End_K(E) \to Mat_n(K)$$
$$f \mapsto A$$

như trong 1.2; ϕ đã mang phép cộng và phép nhân trong $End_k(E)$ vào $Mat_n(K)$ như ta đã thấy, để ϕ trở thành một đẳng cấu. Vành $Mat_n(K)$ các ma trận vuông cấp n lấy thành phần trong K là một vành có đơn vị, đó là ma trận I (hay I_n nếu ta chú ý tới cấp của ma trận) mà các thành phần nằm trên đường chéo chính bằng 1, còn các thành phần khác bằng 0.

Ta có ánh xạ đáng ghi nhớ sau đây từ $Mat_n(K)$ đến K, ánh xạ này bảo toàn phép nhân, cụ thể đó là ánh xạ về định thức của một ma trận :

$$\mathrm{Mat}_n(K) \to K$$
$$A \mapsto |A|$$
$$AB \mapsto |AB| = |A|\,|B|$$

Ngoài cấu trúc vành, $\mathrm{Mat}_n(K)$ còn là một K-không gian vectơ với số chiều bằng n^2. Thêm nữa vì $\lambda\,(gf) = (\lambda\, g)f = g(\lambda\, f)$, với $\lambda \in K$, nên ta cũng có $\lambda\,(BA) = (\lambda\, B)A = B(\lambda\, A)$. Ta bảo $\mathrm{End}_k(E)$ và $\mathrm{Mat}_n(K)$ là hai *K- đại số* đẳng cấu với nhau bởi đẳng cấu ϕ .

1.7. Nhóm GL(E) và ma trận khả nghịch

Trong vành $\mathrm{End}_k(E)$ ta chú ý tới tập hợp GL(E) các tự đẳng cấu. Chúng lập thành một nhóm đối với phép nhân gọi là *nhóm GL(E)* (hay $GL_n(E)$ khi ta chú ý tới số chiều n của E*) các tự đẳng cấu của E*. Xét $f \in GL(E)$ ta có, từ

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_E$$

$$\phi(f)\phi(f^{-1}) = \phi(f \circ f^{-1}) = \phi(f^{-1} \circ f) = \phi(f^{-1})\,\phi(f) = \phi(1_E) = I$$

Vậy nếu $\phi(f) = A$, thì ta đặt $\phi\,(f^{-1}) = A^{-1}$. Ma trận A^{-1} gọi là nghịch đảo của ma trận A và lúc đó ta bảo A khả nghịch. Nếu $A = (a_{ij})$, thì ta có:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

trong đó các A_{ij} là các phần bù đại số của các a_{ij} trong định thức $|A|$. Ta ký hiệu $GL_n(K)$ nhóm nhân các ma trận khả nghịch của vành $\mathrm{Mat}_n(K)$.

Theo (chương IV, bài 27), ta có

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1};\ {}^tI = I.$$

1.8. Ảnh hưởng của việc đổi cơ sở tới ma trận của một ánh xạ tuyến tính. Ma trận đồng dạng

Giả sử $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, $\mathscr{E}' = \{\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n\}$ là hai cơ sở của K-không gian vectơ E, S là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{E}$ sang cơ sở $\mathscr{E}'$; $\mathscr{F} = \{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_m\}$, $\mathscr{F}' = \{\vec{f}'_1, ..., \vec{f}'_m\}$ là hai cơ sở của K-không gian vectơ F, T là ma trận chuyển từ cơ sở $\mathscr{F}$ sang cơ sở $\mathscr{F}'$; $f \in Hom_K(E, F)$, A là ma trận của f đối với $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$, A' là ma trận của f đối với $(\mathscr{E}, \mathscr{F}')$. Thế thì

(1.8.1) $$A' = T^{-1}AS$$

Trong trường hợp E = F, $\mathscr{E} = \mathscr{F}$, $\mathscr{E} = \mathscr{F}'$ thì các ma trận A, A', T = S đều là những ma trận vuông cấp n, và (1.8.1) trở thành:

(1.8.2) $$A' = T^{-1}AT$$

Hai ma trận vuông cấp n, Avà A', có quan hệ với nhau theo công thức (1.8.2), gọi là hai *ma trận đồng dạng*. Định thức của hai ma trận đồng bằng nhau. Thật vậy ta có :

$$|A'| = |T^{-1}A\,T| = |T^{-1}|\,|A|\,|T| = |T^{-1}|\,|T|\,|A| = |T^{-1}T|\,|A| =$$

$$= |I|\,|A| = 1.\,|A| = |A|.$$

Do đó ta định nghĩa định thức của ánh xạ tuyến tính f, ký hiệu det f, là định thức |A| của ma trận A.

1.9. Dạng ma trận của $f(\vec{x}) = \vec{y}$

Các giả thiết vẫn như trong 1.8. Giả sử $\vec{y} \in E$ có toạ độ đối với $\mathscr{E}$ và $\mathscr{E}'$ lần lượt là : $x_1, x_2, ..., x_n$; $x'_1, x'_2, ..., x'_n$

và $f(\vec{x}) = \vec{y} \in F$ có tọa độ đối với $\mathscr{F}$ và $\mathscr{F}'$ lần lượt là :

$$y_1, y_2, ..., y_m;\ y'_1, y'_2, ..., y'_m$$

Chúng ta hãy viết các toạ độ đó dưới dạng ma trận cột :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$$

Ta được các đẳng thức ma trận sau đây :

$$X = SX', \ Y = TY'$$

$$Y = AX, Y' = A'X';$$

hai đẳng thức cuối cùng đều là biểu thức ma trận của $\vec{y} = f(\vec{x})$.

1.10. Giá trị riêng, vectơ riêng

Giả sử $f : E \to E$ là một ánh xạ tuyến tính, $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ là một cơ sở của E, $A = (a_{ij})$ là ma trận của f đối với cơ sở $\mathscr{E}$. Ta bảo một phần tử $\lambda \in K$ là *giá trị riêng* của f nếu

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda 1_E) \neq \{\vec{0}\}$$

Không gian con $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda 1_E)$ của E, gọi là *không gian con riêng* của f tương ứng với giá trị riêng λ.

Vậy

$$\vec{x} \in E_\lambda(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$$

Các vectơ $\vec{x}, \vec{0} \neq \vec{x} \in E_\lambda(f)$, gọi là *vectơ riêng* của f tương ứng với giá trị λ.

Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ là những giá trị riêng đôi một phân biệt của f. Thế thì tổng các không gian con :

$$E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_p}(f)$$

là trực tiếp. Thật vậy, ta hãy chứng minh bằng quy nạp theo p. Giả sử $\vec{x} \in E_{\lambda_1}(f) \cap E_{\lambda_2}(f)$. Thế thì $f(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x} = \lambda_2\vec{x}$. Vậy $(\lambda_1 - \lambda_2)\,\vec{x} = \vec{0}$.

Nhưng $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, nên $\vec{x} = \vec{0}$; tổng $E_{\lambda_1}(f) + E_{\lambda_2}(f)$ là trực tiếp. Giả sử tổng $E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_{p-1}}(f)$ là trực tiếp. Xét

$$\vec{x} \in (E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_{p-1}}(f)) \cap E_{\lambda_p}(f)$$

Ta có :

$$E_{\lambda_p}(f) \ni \vec{x} = \vec{x}_1 + ... + \vec{x}_{p-1} \in E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_{p-1}}(f)$$

Vậy :

$$\lambda_p \vec{x}_1 + ... + \lambda_p \vec{x}_{p-1} = \lambda_p \vec{x} = f(\vec{x}) = f(\vec{x}_1) + ... + f(\vec{x}_{p-1}) =$$
$$= \lambda_1 \vec{x}_1 + ... + \lambda_{p-1} \vec{x}_{p-1}$$

hay :

$$(\lambda_p - \lambda_1)\vec{x}_1 + ... + (\lambda_p - \lambda_{p-1})\vec{x}_{p-1} = \vec{0}$$

Nhưng tổng $E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_{p-1}}(f)$ là trực tiếp, nên

$$(\lambda_p - \lambda_1)\vec{x}_1 = ... = (\lambda_p - \lambda_{p-1})\vec{x}_{p-1} = \vec{0}$$

Nhưng các $\lambda_p - \lambda_1, ..., \lambda_p - \lambda_{p-1}$ đều khác 0, vậy $\vec{x}_1 = ... = \vec{x}_{p-1} = \vec{0}$. Từ đó $\vec{x} = \vec{0}$ và tổng

$$E_{\lambda_1}(f) + ... + E_{\lambda_p}(f)$$

là trực tiếp.

Đặt $\qquad \varphi(\lambda) = \det(f - \lambda 1_E) = |A - \lambda I| =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

ta có $\varphi(\lambda)$ là một đa thức bậc n đối với λ, gọi là *đa thức đặc trưng* của f. Ta cũng gọi $\varphi(\lambda)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A. Chú ý, nếu ta lấy một ma trận A' đồng dạng với A, thì đa thức đặc trưng của A' cũng bằng đa thức đặc trưng của A. Nếu khai triển $\varphi(\lambda)$, ta được

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n, a_i \in K$$

Khi K = **C** thì $\varphi(\lambda)$ có n nghiệm, mỗi nghiệm kể với số lần bằng số bội của nó. Khi K = **R** hay **Q**, thì ta chỉ biết số nghiệm của nó ≤ n.

Trường hợp $\varphi(\lambda)$ có n nghiệm phân biệt trong K.

Trong trường hợp này

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(f)$$

với $\dim E_{\lambda_1}(f) = \cdots = \dim E_{\lambda_n}(f) = 1$. Nếu ta lấy :

$$\vec{0} \neq \vec{e}'_1 \in E_{\lambda_1}(f), \ldots, \vec{0} \neq \vec{e}'_n \in E_{\lambda_n}(f)$$

thì ta được một cơ sở mới :

$$\mathscr{E}' = \{\vec{e}'_1, \ldots\ldots, \vec{e}'_n\}$$

với tính chất $f(\vec{e}'_1) = \lambda_1 \vec{e}'_1, \ldots, f(\vec{e}'_n) = \lambda_n \vec{e}'_n$, vì vậy làm cho ma trận của f đối với cơ sở $\mathscr{E}'$ có dạng chéo sau đây:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ma trận A và A' đồng dạng với nhau. Người ta bảo ta đã chéo hoá f khi đưa A về một ma trận đồng dạng chéo.

Trường hợp $\varphi(\lambda)$ có m nghiệm trong K với số bội $n_1, \ldots, n_m$ sao cho $n_1 + \ldots + n_m = n$.

Trong trường hợp này, nếu thêm giả thiết

$$\dim E_{\lambda_1}(f) = n_1, \ldots\ldots, \dim E_{\lambda_m}(f) = n_m$$

thì sau khi chọn trong mỗi $E_{\lambda_i}(f)$ một sơ sở và hợp chúng lại, ta được một cơ sở $\mathscr{E}'$ của E. Đối với cơ sở $\mathscr{E}'$, ma trận A' của f vẫn ở dạng chéo, các phần tử nằm trên đường chéo chính là các nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ có mặt với số lần bằng số bội của chúng.

§2. BÀI TẬP

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2 - x_3)$$

a) Tìm ma trận của f đối với cơ sở

$(\varepsilon): \vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0), \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0), \vec{\varepsilon}_3 = (0,0,1)$ trong $\mathbf{R}^3$ và cơ sở (δ) : $\overrightarrow{\delta_1} = (1, 0)$, $\overrightarrow{\delta_2} = (0,1)$ trong $\mathbf{R}^2$.

b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở (ε) trong $\mathbf{R}^3$ và cơ sở (δ') : $\overrightarrow{\delta'_1} = (1, 2)$, $\overrightarrow{\delta'_2} = (1,1)$ trong $\mathbf{R}^2$.

c) Tìm ma trận của f đối với cơ sở

$(\varepsilon'): \vec{\varepsilon}_1 = (1,1,1), \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,2), \vec{\varepsilon}_3 = (0,0,1)$ trong $\mathbf{R}^3$ và cơ sở (δ') trong $\mathbf{R}^2$.

2. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 2x_3, x_1 + x_2, x_1)$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở :

$$(\varepsilon): \vec{\varepsilon}_1 = (1,1,0), \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,1), \vec{\varepsilon}_3 = (1,0,1)$$

3. Xác định ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở (ε) như trong bài tập 2.

Cho $\vec{\alpha} = (3, -2, 0)$. Tìm tọa độ của $f(\vec{\alpha})$ đối với cơ sở (ε).

4. Cho phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ có ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở (ε) : $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$. Tìm vectơ $f(\vec{\alpha})$ với :

a) $\vec{\alpha} = -3\vec{\varepsilon}_1 + 5\vec{\varepsilon}_2$;

b) $\vec{\alpha} = \vec{\varepsilon}_1 - 3\vec{\varepsilon}_2$

5. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $f : V \to V$ đối với cơ sở $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$. Hãy tìm vectơ $f(2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, trong đó

$$\vec{\alpha} = -\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 - \vec{\varepsilon}_3, \quad \vec{\beta} = \vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 + 2\vec{\varepsilon}_3.$$

6. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

là ma trận của phép biến đổi tuyến tính $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ đối với cơ sở (ε) :

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0,0), \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0,0),$$

$$\vec{\varepsilon}_3 = (0,0,1,0), \vec{\varepsilon}_4 = (0,0,0,1)$$

Hãy tìm Kerf và một cơ sở của nó.

7. Giả sử $f : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính và dim E = dim F = n.

a) Chứng minh : f đẳng cấu $\Leftrightarrow \exists$ ánh xạ tuyến tính $g : F \to E$ sao cho $fg = 1_F$.

b) Chứng minh : f đẳng cấu $\Leftrightarrow \exists\, h : F \to E$, $hf = 1_E$.

8. Giả sử $f : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính, $\dim E = n$, $\dim F = m$, và hg $f = r$. Chứng minh tồn tại một cơ sở $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ trong E và một cơ sở $\mathscr{F} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\}$ trong F sao cho ma trận A của f đối với $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ có dạng

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right) = (a_{ij}) \text{ với } a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j = 1, 2, \ldots, r \\ 0, \text{ nếu khác trên} \end{cases}$$

9. Giả sử E là **R** - không gian vectơ gồm các đa thức của ẩn X với hệ số thực có bậc $\leq n - 1$ và đa thức 0. Xét hai dạng tuyến tính:

$$f : E \to \mathbf{R}, \qquad g : E \to \mathbf{R}$$

$$P \mapsto P(1) \qquad P \mapsto \int_0^1 P(t)dt$$

Viết ma trận của f và g đối với cơ sở $\mathscr{E} = \{1, X, \ldots, X^{n-1}\}$ trong E và cơ sở $\mathscr{F} = \{1\}$ trong **R**.

10. Giả sử E là **R** - không gian vectơ gồm các đa thức của ẩn X với hệ số thực có bậc $\leq n$ và đa thức 0. Đặt

$$E_k = C_n^k X^k (1 - X)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n$$

a) Chứng minh các E_k độc lập tuyến tính. Tìm các tọa độ của 1 đối với cơ sở $\{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$.

b) Xét cơ sở chính tắc $\mathscr{E} = \{1, X, \ldots, X^n\}$ trong **E**, và ánh xạ tuyến tính f xác định bởi

$$f : X^k \mapsto E_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Tìm ma trận A của f đối với cơ sở $\mathscr{E}$; f có phải là một đẳng cấu không?

Lời giải

1. a) Trước hết ta tính :

$$f(\overline{\varepsilon}_1) = (2,0) = 2\overrightarrow{\delta_1}$$

$$f(\overline{\varepsilon}_2) = (0,1) = \overrightarrow{\delta_2}$$

$$f(\overline{\varepsilon}_3) = (0,-1) = -\overrightarrow{\delta_2}$$

Vậy

$$\text{mat}\,(f)_{(\varepsilon,\delta)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $f(\overrightarrow{\varepsilon_1}) = (2,0) = x_1\overrightarrow{\delta'_1} + x_2\overrightarrow{\delta'_2} = x_1(1,2) + x_2(1,1)$

$f(\overrightarrow{\varepsilon_2}) = (0,1) = y_1\overrightarrow{\delta'_1} + y_2\overrightarrow{\delta'_2} = y_1(1,2) + y_2(1,1)$

$f(\overrightarrow{\varepsilon_3}) = (0,-1) = z_1\overrightarrow{\delta'_1} + z_2\overrightarrow{\delta'_2} = z_1(1,2) + z_2(1,1)$

Ta phải giải ba hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 + z_2 = 0 \\ 2z_1 + z_2 = -1 \end{cases}$$

Ta nhận xét ba hệ phương trình đều có cùng ma trận các hệ số mà các cột tương ứng lần lượt với các vectơ $\overrightarrow{\delta'_1}$ và $\overrightarrow{\delta'_2}$, còn cột các số hạng tự do tương ứng lần lượt với các vectơ $f(\overrightarrow{\varepsilon_1}), f(\overrightarrow{\varepsilon_2}), f(\overrightarrow{\varepsilon_3})$. Ta viết luôn các ma trận của ba hệ phương trình trên cùng một ma trận, sau đó thực hiện những phép biến đổi để tính ra ngay các nghiệm của cả ba hệ phương trình, cụ thể

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Từ đó, ta được :

$$x_1 = -2,\ x_2 = 4;\ y_1 = 1,\ y_2 = -1;\ z_1 = -1,\ z_2 = 1.$$

Vậy :

$$\text{mat}(f)_{(\varepsilon,\delta')} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $f(\vec{\varepsilon}'_1) = (2,0), f(\vec{\varepsilon}'_2) = (0,-1), f(\vec{\varepsilon}'_3) = (0,-1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{mat}(f)_{(\varepsilon',\delta')} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $f(\vec{\varepsilon}_1) = (1,2,1), f(\vec{\varepsilon}_2) = (-1,1,0), f(\vec{\varepsilon}_3) = (-2,1,1)$. Tiếp theo, cũng làm như bài 1, ta xét ma trận và các phép biến đổi trên nó như sau:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy :

$$\mathrm{mat}(f)_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Giả sử $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Từ ma trận A ta suy ra ánh xạ tuyến tính $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ xác định bởi A là

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$$

Vậy :

$$f(\overrightarrow{\varepsilon_1}) = (3,1,3), f(\overrightarrow{\varepsilon_2}) = (2,0,3), f(\overrightarrow{\varepsilon_3}) = (1,-1,2)$$

Bây giờ ta phải xác định các toạ độ (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) và (z_1, z_2, z_3) của $f(\overrightarrow{\varepsilon_1}), f(\overrightarrow{\varepsilon_2}), f(\overrightarrow{\varepsilon_3})$ đối với cơ sở (ε), để có $\mathrm{mat}(f)_{\varepsilon}$. Cũng làm như bài 2, ta xét ma trận sau đây và các phép biến đổi trên nó :

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|r} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c|r} 2 & 2 & 2 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|r|r|r} 1 & 1 & 1 & 7/2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|r|r|r} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Từ đó giải ba hệ phương trình, ta được :

$$\mathrm{mat}(f)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 5/2 & 5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\alpha} = (3,-2,0), f(\vec{\alpha}) = (1,-2,-1) = -2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$$

4. a) $f(\vec{\alpha}) = -3f(\vec{\varepsilon}_1) + 5f(\vec{\varepsilon}_2) = -3(2\vec{\varepsilon}_1 + 3\vec{\varepsilon}_2) + 5(-\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_2) = -11\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$

b) $f(\vec{\alpha}) = 5\vec{\varepsilon}_1 - 3\vec{\varepsilon}_2$

5. $f(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = f(-3\vec{\varepsilon}_1 + 3\vec{\varepsilon}_2 - 4\vec{\varepsilon}_3) = -3f(\vec{\varepsilon}_1) + 3f(\vec{\varepsilon}_1) - 4f(\vec{\varepsilon}_3)$

$$= -3(\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3) + (2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_3) - 4(3\vec{\varepsilon}_1 + 2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3)$$
$$= -9\vec{\varepsilon}_1 - 5\vec{\varepsilon}_2 - 4\vec{\varepsilon}_3$$

6. Ta có với $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$,

$$f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_4, -x_1 + 2x_2 + x_4, 2x_1 + x_3 + x_4, 2x_3 + x_4)$$

Vậy $(x_1, x_2, x_3\ x_4) \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0} = (0,0,0,0)$, nghĩa là x_1, x_2, x_3 x_4 là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất :

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 = 0 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad\quad 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Gọi A là ma trận các hệ số của hệ phương trình, dễ dàng thấy $|A| \neq 0$; vậy chỉ có một nghiệm duy nhất (0,0,0,0), cho nên $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, cơ sở của Ker f là một tập hợp $\varnothing$; f là đơn cấu, vậy f là một đẳng cấu.

7. a) f là đẳng cấu, thì $f^{-1} : F \to E$ cho ta $f f^{-1} = 1_F$. Đảo lại giả sử có $g : F \to E$ sao cho $fg = 1_F$. Có f là toàn ánh, thật vậy giả sử $\vec{y} \in F$ ta có $f(g(\vec{y})) = \vec{y}$. Đặt $\vec{x} = g(\vec{y})$ ta được $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Do đó f là một toàn cấu : $E \to F$ với $\dim E = \dim F = n$, vậy từ công thức :

$$\dim E = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f$$

ta suy ra $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$, hay $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$ hay f đơn ánh. Vậy f là một đẳng cấu, và đẳng cấu ngược $f^{-1} : F \to E$ bằng g. Thật vậy, từ $fg = 1_F$, ta có $f^{-1} f g = f.1_F = f^{-1} = 1_E g = g$.

b) f là đẳng cấu, thì $f^{-1} : F \to E$ cho ta $f^{-1} f = 1_E$. Đảo lại giả sử có $h : F \to E$ sao cho $hf = 1_E$.

f là đơn cấu, thật vậy giả sử $f(\vec{x}) = \vec{0}$, thế thì

$$hf(\vec{x}) = h(\vec{0}) = \vec{0} = 1_E(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Vậy f là một đẳng cấu, và có đẳng cấu ngược $f^{-1} : F \longrightarrow E$ bằng h.

Ta chú ý điều sau đây : khi $\dim E = n \neq m = \dim F$, thì từ $fg = 1_F$ ta chỉ có f là toàn cấu, và từ $hf = 1_E$ ta chỉ có f là đơn cấu.

8. Vì $\mathrm{hg}\, f = r = \dim \mathrm{Im} f$, ta hãy lấy một cơ sở $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r\}$ trong Imf. Ta hãy bổ sung cho cơ sở trên m - r vectơ : $\overrightarrow{f_{r+1}}, \ldots, \overrightarrow{f_m}$ để có một cơ sở

$$\mathscr{F} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_r, \vec{f}_{r+1}, \ldots, \vec{f}_m\}$$

trong F. Lấy

$$\vec{e}_1 \in f^{-1}(\vec{f}_1), \ \ldots, \quad \vec{e}_r \in f^{-1}(\vec{f}_r),$$

các vectơ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ là độc lập tuyến tính (chương IV, bài 3). Gọi W là không gian con sinh bởi $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$; theo (chương IV, bài 8) : $E = W \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Lấy một cơ sở $\{\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$ trong Ker f, ta được

$$\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n\}$$

là một cơ sở trong E. Để có $\mathrm{mat}(f)_{(\mathscr{E}, \mathscr{F})}$, ta lần lượt xét :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{f}_1$$
$$f(\vec{e}_2) = \vec{f}_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f(\vec{e}_r) = \vec{f}_r$$
$$f(\vec{e}_{r+1}) = \vec{0}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$f(\vec{e}_n) = \vec{0}$$

Vậy:

$$\mathrm{mat}(f)_{(\mathscr{E},\mathscr{F})} = \begin{array}{cc} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{r cột}} \\ \begin{array}{c} \text{r} \\ \text{dòng} \end{array}\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. & \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

9. $\mathrm{mat}(f)_{(\mathscr{E},\mathscr{F})} = (1 \quad 1 \ \dots \ 1)$

$\mathrm{mat}(g)_{(\mathscr{E},\mathscr{F})} = \left(1 \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}\right)$

10. a) Xét $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k E_k = 0, \alpha_k \in \mathbf{R}$. Từ đó

$$\alpha_0 E_0 = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_i$$

Đa thức ở vế phải chia hết cho X, vậy $\alpha_0 E_0$ cũng chia hết cho X. Nhưng

$$\alpha_0 E_0 = \alpha_0(1 - X^n),$$

vậy ta phải có $\alpha_0 = 0$. Ta chứng minh quy nạp theo i, giả sử có $\alpha_0 = \dots = \alpha_{i-1} = 0$.

Từ $\sum_{k=i}^{n}\alpha_k E_k = 0$, ta được:

$$\alpha_i E_i = -\sum_{k=i+1}^{n}\alpha_k E_k.$$

Đa thức ở vế phải chia hết cho X^{i+1}, vậy $\alpha_i E_i$ cũng chia hết cho X^{i+1}. Nhưng

$$\alpha_i E_i = \alpha_i C_n^i X^i (1-X)^{n-i},$$

vậy ta phải có $\alpha_i = 0$. Vậy $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, nghĩa là $E_0, E_1, ..., E_n$ độc lập tuyến tính. E là một **R** - không gian vectơ có số chiều là n+1, cho nên ta có thể lấy $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ làm cơ sở.

Bây giờ ta hãy tìm các tọa độ của 1 đối với hệ cơ sở $\{E_i\}_{0\le i\le n}$. Ta có, theo công thức nhị thức Newton:

$$1 = \left[X + (1-X)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} E_k$$

Vậy các tọa độ của 1 đối với $\{E_0, E_1, ..., E_n\}$ lần lượt là 1, 1, ...,1.

b) Ta có

$$E_k = C_n^k X^k . \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^{n-k-j}(-1)^j X^j = \sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j C_n^k C_{n-k}^{n-k-j} X^{k+j}$$

hay, nếu đặt i = k+j

$$E_k = \sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k} C_n^k C_{n-k}^{n-i} X^i$$

Vậy ma trận của f đối với cơ sở $\mathcal{E}$ sẽ có dạng tam giác dưới như sau :

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & 0 \\ \cdots & \ddots & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

với

$$a_{ik} = (-1)^{i-k} C_n^k C_{n-k}^{n-i} \quad ,i \geq k$$
$$a_{ik} = 0 \quad ,i < k.$$

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC MA TRẬN

11. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Tính a) A +B - C;

b) 2A - 5B;

c) A + 2B - 6C.

12. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính $2A-3\,{}^tA$(${}^tA$ là ma trận chuyển vị của A).

13. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận X sao cho a) A - 2X = B; b) 3B - X = A.

14. Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Tính a) AB, BC;

b) (AB)C, A(BC). So sánh hai ma trận tìm được.

15. Tính AB biết:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$;

b) $A = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)$, $\quad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

16. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Tính f(A), với quy ước $A^0 = I$.

17. Chứng minh rằng $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, trong đó ^tA, ^tB lần lượt là ma trận chuyển vị của các ma trận A và B.

18. Trong $\mathbf{R}^4$, $\mathbf{R}^3$ cho các cơ sở tương ứng:

$$(\varepsilon): \quad \begin{aligned} &\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1, 0, 0, 0), \overrightarrow{\varepsilon_2} = (0, 1, 0, 0), \\ &\overrightarrow{\varepsilon_3} = (0, 0, 1, 0), \overrightarrow{\varepsilon_4} = (0, 0, 0, 1); \end{aligned}$$

$$(\delta): \quad \overrightarrow{\delta_1} = (1, 0, 0), \overrightarrow{\delta_2} = (0, 1, 0); \overrightarrow{\delta_3} = (0, 0, 1).$$

Các ánh xạ tuyến tính $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_2 - x_3, x_4),$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_2, y_3, 0).$$

Tìm ma trận của gf.

VÀNH CÁC MA TRẬN VUÔNG

19. Chứng minh với hai ma trận vuông cấp n khả nghịch A và B ta có:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

20. Cho các ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tính định thức $|AB|$.

21. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

22. Tìm ma trận X thỏa mãn đẳng thức:

$$AX + B = C,$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

23. Chứng minh rằng A + I và I - A là nghịch đảo của nhau nếu $A^2 = 0$.

24. Cho f: V → V là phép biến đổi tuyến tính. Đối với cơ sở $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}$, f có ma trận là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hãy tìm ma trận của f đối với cơ sở (ε'):

$$\overrightarrow{\varepsilon'_1} = 2\overrightarrow{\varepsilon_1} - \overrightarrow{\varepsilon_2}$$
$$\overrightarrow{\varepsilon'_2} = \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2} - 2\overrightarrow{\varepsilon_3}$$
$$\overrightarrow{\varepsilon'_3} = \overrightarrow{\varepsilon_2} + \overrightarrow{\varepsilon_3}$$

25. Trong không gian vectơ V cho cơ sở (ε): $\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2}, \overline{\varepsilon_3}$ và cơ sở (ε')

$$\overrightarrow{\varepsilon'_1} = 2\overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_3}$$
$$\overrightarrow{\varepsilon'_2} = \overrightarrow{\varepsilon_2} - \overrightarrow{\varepsilon_3}$$
$$\overrightarrow{\varepsilon'_3} = \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{2\varepsilon_3}$$

Phép biến đổi tuyến tính f : V →V có ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

đối với cơ sở (ε'). Hãy tìm ma trận của f đối với cơ sở (ε).

26. Giả sử $A \in Mat_n(K)$. Chứng minh:

a) A khả nghịch ⇔ ∃ B ∈ $Mat_n(K)$, AB = I;

b) A khả nghịch ⇔ ∃ C ∈ $Mat_n(K)$, CA = I.

27. Xét ánh xạ

$$tr : Mat_n(K) \to K$$

$$(a_{ij}) = A \mapsto tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

a) Chứng minh ánh xạ tr là một dạng tuyến tính. Người ta gọi tr(A) là *vết của ma trận A.*

b) Giả sử $A \in Mat_{(n,m)}(K)$ và $B \in Mat_{(m,n)}(K)$. Chứng minh:

$$tr(A.B) = tr(B.A).$$

28. Chứng minh không thể có $A, B \in Mat_n(K)$ sao cho $AB - BA = I$, I là ma trận đơn vị của $Mat_n(K)$.

29. Cho $A,B \in Mat_n(K)$. Tìm $X \in Mat_n(K)$ để $X - tr(X)A = B$.

30. Giả sử $(a_{ij}) = A \in Mat_n(C)$. Chứng minh rằng nếu ta có

$$(\forall i)\ \ |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

thì A khả nghịch (định lý Hadamard).

31. Xét vành $Mat_n(K)$. Đặt C là bộ phận của $Mat_n(K)$ gồm các ma trận sau đây:

$$C = \{A \in Mat_n(K) \mid AB = BA,\ \forall B \in Mat_n(K)\}$$

a) Chứng minh C là vành con của $Mat_n(K)$. Người ta bảo C gồm các phần tử giao hoán được với mọi phần tử của $Mat_n(K)$, C được gọi là tâm của $Mat_n(K)$.

b) Xét $Mat_2(K)$. Chứng minh tâm C của $Mat_2(K)$ gồm các ma trận có dạng λI_2, $\lambda \in K$ và I_2 là ma trận đơn vị của $Mat_2(K)$. (Hướng dẫn: xét các ma trận E_{ij}, cơ sở của K - không gian vectơ $Mat_2(K)$ (xem §1,1.3)).

c) Chứng minh tâm C của $Mat_n(K)$ gồm các ma trận có dạng λI_n, $\lambda \in K$ và I_n là ma trận đơn vị của $Mat_n(K)$.

Lời giải

11. a) $A + B - C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $2A - 5B = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -35 & 4 \\ 15 & -21 \end{pmatrix}$

12. $2A - 3^t A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & 10 \\ 14 & 10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -9 & 21 \\ 0 & 6 & 15 \\ 3 & 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -19 \\ -6 & -2 & -5 \\ 11 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

15. b) $AB = (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3)$, ma trận 1 dòng, 1 cột.

c) $AB = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$ n dòng và 1 cột

16. $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, $3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Vậy $f(A) = A^2 - 2A + 3I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

17. Xem (§1, 1.5)

18. $\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1,0,0,0) \overset{f}{\mapsto} (2,0,0) \overset{g}{\mapsto} (2,0,\ 0)$

$\overrightarrow{\varepsilon_2} = (0,1,0,0) \overset{f}{\mapsto} (0,1,0) \overset{g}{\mapsto} (1,0,\ 0)$

$\overrightarrow{\varepsilon_3} = (0,0,1,0) \overset{f}{\mapsto} (0,-1,0) \overset{g}{\mapsto} (-1,0,\ 0)$

$\overrightarrow{\varepsilon_4} = (0,0,0,1) \overset{f}{\mapsto} (0,0,1) \overset{g}{\mapsto} (0,1,\ 0)$

Ta có ngay

$$\mathrm{mat}(gf)_{(\varepsilon,\delta)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta cũng có thể tính $\mathrm{mat}(f)_{(\varepsilon,\delta)}$ và $\mathrm{mat}(g)_\delta$ rồi tính tích mat(g).mat(f). Bạn đọc hãy thử làm, nhưng rõ ràng là lâu hơn cách trên vì phải nhân hai ma trận với nhau.

21. d)

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -7/2 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Để tính D^{-1}, ta có thể tính theo công thức cho trong (§1, 1.7), ta có:

$$D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

với $A_{11} = 6$, $A_{12} = A_{13} = A_{14} = 0$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -12,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, A_{23} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -21,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,\ A_{34} = 0,$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{43} = 0, \ A_{44} = 2$$

Từ đó ta có D^{-1} như đã viết ở trên. Ta cũng có thể tính D^{-1} bằng cách viết D dưới dạng khối những ma trận con, cụ thể ta viết như sau:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

Hiển nhiên ta có $A, C \in GL_2(K)$ (xem §1, 1.7) trong đó $|A| = 1$, $|C| = 6$. Để có A^{-1} và C^{-1} trong trường hợp này thì rất nhanh:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận nghịch đảo nhận được bằng cách hoán vị các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận ma ta muốn tìm nghịch đảo, còn các phần tử nằm trên đường chéo phụ thì giữ nguyên, nhưng đổi dấu, và nhớ nhân mọi thành phần với nghịch đảo của định thức của ma trận. Như vậy nếu $A \in GL_2(K)$, thì ta viết ngay A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Bây giờ ta xét ma trận $D' \in Mat_4(K)$ cũng viết thành khối như sau :

$$D' = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & B' \\ \hline 0 & C^{-1} \end{array}\right)$$

Ta xét tích :

$$DD' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & B' \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & AB' + BC^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

trong đó phép nhân các khối thực hiện như phép nhân ma trận, nghĩa là coi các khối như các thành phần của ma trận (các bạn thử nghĩ xem có đúng như vậy không). Ta nói ta muốn $AB' + BC' = 0 \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Vậy ta chỉ cần lấy $B' = -A^{-1}BC^{-1}$ và ta được:

$$DD' = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Vậy D' chính là D^{-1} (xem bài 26). Để có đầy đủ các thành phần của D^{-1}, ta xét tích

$$B' = -A^{-1}BC^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & 4/3 \\ 1 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

22. $X = A^{-1}(C - B)$. Trước hết ta tính $|A| = -2 \neq 0$.

Vậy có A^{-1}. Để tính A^{-1}, ta viết A thành những khối ma trận :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} (1) & B = (2 \;\; 1) \\ \hline 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

Tính C^{-1} :

$$C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Xét ma trận A' :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} (1) & B' = (x_1 \;\; x_2) \\ \hline 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

Xét tích:

$$AA' = \begin{pmatrix} 1 & B' + BC^{-1} \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

Lấy $B' = -BC^{-1} = (3 \quad -5/2)$, ta được:

$$A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

và:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 10 & 23 \\ 0 & -10 & -10 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

23. Ta có $(I + A)(I - A) = I^2 - A^2 = I - A^2 = I$ (vì $A^2 = 0$). Vậy $I + A$ và $I - A$ là nghịch đảo của nhau.

24. Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở (ε)sang cơ sở (ε'), ta có:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$mat(f)_{\varepsilon'} = T^{-1} A T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & -10 & -11 \\ 6 & -2 & 3 \\ 28 & -20 & 2 \end{pmatrix}$$

25. Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ε'), ta có:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$B = mat(f)_{\varepsilon'} = T^{-1}.mat(f)_{\varepsilon}.T$$

Từ đó:

$$\mathrm{mat}(f)_\varepsilon = TBT^{-1}$$

Thực hiện phép nhân ta được:

$$\mathrm{mat}(f)_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 5 \\ 14 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

26. a) Giả sử A khả nghịch, vậy có A^{-1} để $A.A^{-1} = I$. Đảo lại giả sử có $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ để $AB = I$. Giả sử $f, g \in \mathrm{End}_K(K^n)$ tương ứng với A và B. Thế thì ta có:

$$f_0 g = 1_{K^n}$$

Theo bài 7, f là đẳng cấu, vậy có f^{-1}, do đó A^{-1}. Ta cũng có thể lập luận như sau: từ $AB = I$, ta suy ra $|A|\,|B| = 1$, vậy $|A| \neq 0$, do đó ma trận:

$$\frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận nghịch đảo của $A = (a_{ij})$, A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij} trong $|A|$.

b) Làm như a).

27. a) Giả sử $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ và $\lambda \in K$. Ta có:

$$\begin{aligned} tr = (A + B) &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= tr(A) + tr(B) \end{aligned}$$

$$tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda tr(A)$$

b) Ta có:

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = tr(BA)$$

28. Giả sử có AB - BA = I. Thế thì theo bài 27, ta có:

$$0 = tr(AB) - tr(BA) = tr(AB - BA) = tr(I) = n \geq 1. \text{ Vô lý.}$$

29. Ta tìm $X \in Mat_n(K)$ để:

(1) $$X - tr(X)\,A = B$$

Vậy ta phải có:

$$trX - tr(X)\,trA = trB$$

hay (2) $$trX\,(1 - trA) = trB$$

Trường hợp 1 - trA ≠ 0. Lúc đó: $trX = \dfrac{trB}{1 - trA}$,

và (1) có một nghiệm duy nhất: $X = B + \dfrac{trB}{1 - trA}A$.

Trường hợp 1 - trA = 0:

a) $trB \neq 0$: (1) vô nghiệm.

b) $trB = 0$: $trX = \lambda$ tùy ý thuộc K, và nghiệm của (1) là $X = B + \lambda A$.

30. Xét tự đồng cấu $f: C^n \to C^n$ tương ứng với ma trận A. Để chứng minh A khả nghịch ta chỉ cần chứng minh f đơn cấu (ch IV, bài 11). Giả sử $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Kerf$. Vậy: $f(\vec{x}) = \vec{0}$,hay viết dưới dạng ma trận

$$AX = 0$$

trong đó $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

hay

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Đặt:

$$M = \sup_{1 \le k \le n} |x_k|$$

Giả sử j là một trong các chỉ số sao cho $M = |x_j|$. Từ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = 0$$

Ta suy ra:

$$a_{jj} x_j = -\sum_{k \ne j} a_{jk} x_k$$

Từ đó:

$$M.|a_{jj}| = |a_{jj}||x_j| \le \sum_{k \ne j} |a_{jk}||x_k| \le M \sum_{k \ne j} |a_{jk}|$$

Nếu $M > 0$, ta suy ra:

$$|a_{jj}| \le \sum_{k \ne j} |a_{jk}|$$

mâu thuẫn với giả thiết:

$$(\forall i) \quad |a_{ii}| > \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$$

Vậy $M = \sup_{1 \le k \le n} |x_k| = 0$ nghĩa là $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ hay $\vec{x} = \vec{0}$, hay $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$, nghĩa là f đẳng cấu và ma trận A tương ứng với f là khả nghịch.

31. a) Để chứng minh C là vành con của $Mat_n(K)$ ta lần lượt chứng minh:

$C \ne \varnothing$,

$A - A' \in C$ nếu $A, A' \in C$,

$AA' \in C$ nếu $A, A' \in C$.

Hiển nhiên $C \neq \varnothing$ vì 0 và $I_n \in C$. Giả sử $A, A' \in C$. Thế thì với $B \in Mat_n(K)$, ta có:

$$(A - A')B = AB - A'B = BA - BA' = B(A - A'),$$
$$(AA')B = A(A'B) = A(BA') = (AB)A' = (BA)A' = B(AA').$$

Vậy: $A - A'$ và $AA' \in C$.

b) Xét các ma trận

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mỗi ma trận $B = (b_{ij}) \in Mat_2(K)$ biểu thị tuyến tính qua các E_{ij} như sau:

$$(1) \qquad B = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}E_{ij}$$

Ta có A giao hoán với mọi $B \in Mat_2(K)$ khi và chỉ khi A giao hoán với mọi E_{ij}, do (1) và do phép nhân phân phối đối với phép cộng.

Hiển nhiên các ma trận có dạng λI thuộc C. Đảo lại giả sử $A \in C$, $A = (a_{ij})$.

$$AE_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{11}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix}, \qquad E_{12}A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A \in C$, vậy ta phải có $AE_{11} = E_{11}A$, $AE_{12} = E_{12}A$. Từ đó, ta suy ra:

$$a_{12} = a_{21} = 0, \text{ và } a_{11} = a_{22} = \lambda \in K.$$

Vậy $A = \lambda I_2$.

c) Làm tương tự như b), ta được

$$\begin{array}{cc} \text{dòng 1} & \\ AE_{1j} = & \begin{pmatrix} & a_{11} & \\ & a_{21} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{n1} & \end{pmatrix} \\ & \text{cột } j \end{array}$$

$$E_{ij}A = \begin{array}{cc} \text{dòng } i & \begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \\ & \text{cột } j \end{array}$$

Từ $AE_{ij} = E_{ij}A$, ta suy ra:

$$a_{jj} = a_{11}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$a_{jk} = 0, j \neq k, j = 1, 2, \ldots n; k = 1, 2, \ldots, n$$

Vậy A có dạng $A = \lambda I_n$, $\lambda \in K$.

Qua việc xét tâm của $Mat_n(K)$ ta suy ra tâm của $End_k(K)$ gồm các tự đồng cấu h có dạng $h = \lambda 1_{K^n}$, $\lambda \in K$; h gọi là một *phép vị tự* của K - không gian vectơ K^n.

VECTƠ RIÊNG - GIÁ TRỊ RIÊNG

32. Giả sử A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f đối với một cơ sở đã cho của không gian vectơ V. Xét xem vectơ nào trong các vectơ cho dưới đây là vectơ riêng:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha} = (-1,3)$, $\vec{\beta} = (2,-4)$, $\vec{\gamma} = (1,2)$;

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha} = (1,1,3)$, $\vec{\beta} = (1,0,5)$, $\vec{\gamma} = (2,2,2)$.

33. Giả sử $\vec{\alpha}$ đồng thời là vectơ riêng của hai phép biến đổi tuyến tính f và g với các giá trị riêng tương ứng là k_1, k_2. Chứng minh rằng $\vec{\alpha}$ cũng là vectơ riêng của gf là g + f. Tìm các giá trị riêng tương ứng.

34. Tìm các vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính f có ma trận là A, B, C,... dưới đây:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

35. Trong các ma trận sau đây, ma trận nào chéo hóa được? Nếu được hãy đưa nó về dạng chéo:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

36. Cho $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}$ là một cơ sở của không gian vectơ V.

Phép biến đổi tuyến tính f đối với cơ sở này có ma trận là A. Hãy tìm một cơ sở của V sao cho đối với cơ sở này ma trận của f là một ma trận chéo:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

37. Tính lũy thừa A^n $(n \geq 1)$ của ma trận A trong bài 36 b).

38. Tam giác hóa ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

nghĩa là tìm một ma trận B đồng dạng với A có dạng sau đây:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b44 \end{pmatrix}.$$

Lời giải

32. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -20 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \forall\lambda \in K$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \forall\lambda \in K$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \forall\lambda \in K$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

33. $\left.\begin{aligned} f(\vec{\alpha}) = k_1\vec{\alpha} \\ g(\vec{\alpha}) = k_2\vec{\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow gf(\vec{\alpha}) = g(k_1\vec{\alpha}) = k_1 g(\vec{\alpha}) = k_1 k_2 \vec{\alpha}$

$$(f+g)(\vec{\alpha}) = f(\vec{\alpha}) + g(\vec{\alpha}) = k_1\vec{\alpha} + k_2\vec{\alpha} = (k_1 + k_1)\vec{\alpha}$$

34. c)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$\lambda = 0$. Các vectơ riêng tương ứng với $\lambda = 0$ có các tọa $_1$, x_2, x_3, x_4 thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Các véctơ riêng có dạng $\mu(1,0,-1,0) = \mu(\vec{e_1} - \vec{e_3})$, $\mu \in K$. $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$ là các cơ sở chính tắc của K^4.

$\lambda = 1$. Các vectơ riêng tương ứng với $\lambda = 1$ có dạng $\mu\vec{e_1}$, $\mu \in K$

$\lambda = 2$. Các vectơ riêng tương ứng với $\lambda = 2$ có dạng $\mu\vec{e_2}$, $\mu \in K$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^3$$

$\lambda = 1$. Các vectơ riêng tương ứng với $\lambda = 1$ có dạng $\mu(4, 5, 2, -1)$, $\mu \in K$.

$\lambda = 2$. Các vectơ riêng tương ứng với $\lambda = 2$ có dạng $\mu(1, 2, 0, 0)$ và $\gamma(0, 0, 1, 0)$, μ và $\gamma \in K$.

35. a)

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

Các vectơ riêng tương ứng với $\lambda = 2$ có dạng $\mu(1, -1)$, chỉ mình vectơ $(1, -1)$ không thể thành lập một cơ sở cho không gian K^2, vậy ma trận không chéo hóa được.

b)

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

Ta có hai giá trị riêng phân biệt, vậy lấy hai vectơ riêng tương ứng theo thứ tự với $\lambda = 1$ và $\lambda = 4$, ta được một cơ sở cho K^2 mà trong đó ma trận đã cho trở thành

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

f) $\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$

Nếu $K = \mathbf{R}$, thì việc nghiên cứu hàm $\varphi(\lambda)$ cho ta biết $\varphi(\lambda)$ chỉ có một nghiệm thực và hai nghiệm phức liên hợp. Vậy ma trận không chéo hóa được, vì chỉ có một nghiệm thực. Nếu $K = \mathbf{C}$, ta có ba nghiệm phân biệt, vậy ma trận chéo hóa được .

36. b) $\varphi(\lambda) = (1 + \lambda)^2 (1 - \lambda)$

$\lambda = -1$. Có hai vectơ riêng độc lập tuyến tính $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2}$ và $\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{\varepsilon_1} + 3\overrightarrow{\varepsilon_3}$, tương ứng với $\lambda = -1$.

$\lambda = 1$. Có một vectơ riêng $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_2} + \overrightarrow{\varepsilon_3}$ tương ứng với $\lambda = 1$. Ba vectơ riêng $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ lập thành một cơ sở làm cho f có dạng chéo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận T chuyển từ cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ sang cơ sở $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ là :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Từ đó ta có : $A = T^{-1}BT$.

37. Ta xét lại ma trận A trong bài 36 b). Ta có :

$$A^n = (T^{-1}BT)(T^{-1}BT)\dots(T^{-1}BT) = T^{-1}B^nT$$

Nhưng $B^2 = I_3$, từ đó $B^{2k} = I_3$, $B^{2k+1} = B$. Vậy :

$$A^n = I_3,\ n = 2k,$$
$$A^n = A,\ n = 2k+1.$$

38. Gọi $u : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ là tự đồng cấu có ma trận là A đối với cơ sở chính tắc $\mathscr{E} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ của $\mathbf{R}^4$. Tính đa thức đặc trưng $\varphi(\lambda)$ của A :

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda - 1)^4$$

Các vectơ riêng tương ứng với nghiệm bội cấp 4, $\lambda = 1$, có dạng $\mu(1, 0, -1, 0)$, $\mu \in \mathbf{R}$. Như vậy ta không thể có bốn vectơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với $\lambda = 1$ để có một cơ sở trong đó u có ma trận chéo. Bây giờ ta hãy cố gắng tam giác hoá ma trận A. Muốn vậy ta lấy một vectơ riêng $\overrightarrow{f_1} = (1, 0, -1, 0) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}$ .Ta xét hệ cơ sở $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F} = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}\}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f_1} &= \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} & \qquad & \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3} \\ \overrightarrow{f_2} &= \overrightarrow{e_2} & & \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_3} &= \overrightarrow{e_3} & \Rightarrow & \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_3} \\ \overrightarrow{f_4} &= \overrightarrow{e_4} & & \overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{f_4} \end{aligned}$$

Ta hãy tính ma trận $A_1 = \mathrm{mat}(u)_{\mathscr{F}}$.

$u(\overrightarrow{f_1}) = \overrightarrow{f_1}$ ($\overrightarrow{f_1}$ là vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$).

$$u(\overrightarrow{f_2}) = u(\overrightarrow{e_2}) = -5\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + 7\overrightarrow{e_3} - 4\overrightarrow{e_4} \text{ (cột 2 của ma trận A)}$$

$$= -5(\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3}) + 5\overrightarrow{f_2} + 7\overrightarrow{f_3} - 4\overrightarrow{f_4}$$

$$= -5\overrightarrow{f_1} + 5\overrightarrow{f_2} + 2\overrightarrow{f_3} - 4\overrightarrow{f_4},$$

$$u(\overrightarrow{f_3}) = 2\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3},$$

$$u(\overrightarrow{f_4}) = -6\overrightarrow{f_1} + 4\overrightarrow{f_2} + 5\overrightarrow{f_3} - 3\overrightarrow{f_4}.$$

Từ đó

$$\mathrm{mat}(u)_{\mathscr{F}} = A_1 = \left(\begin{array}{c:ccc} 1 & -5 & 2 & -6 \\ \hdashline 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Đặt $H = \mathbf{R}\overrightarrow{f_2} \oplus \mathbf{R}\overrightarrow{f_3} \oplus \mathbf{R}\overrightarrow{f_4}$, ta có $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}\overrightarrow{f_1} \oplus H$.

Giả sử $u_1 = u_{|H}$. Xét tích các ánh xạ tuyến tính sau đây:

$$H \xrightarrow{u_1} \mathbf{R}^4 \xrightarrow{p} H$$

trong đó p: $E = \mathbf{R}\overrightarrow{f_1} \oplus H \to H$ là phép chiếu lên H. Có $p \circ u_1 \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(H)$ và ma trận của $p \circ u_1$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}\}$ trong H chính là ma trận cấp 3 đóng khung trong A_1:

$$\mathrm{mat}(p \circ u_1)_{\{\overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}, \overrightarrow{f_4}\}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = B_1$$

Ta hãy tính đa thức đặc trưng $\varphi_{B_1}(\lambda)$ của ma trận B_1:

$$\varphi_{B_1}(\lambda) = (1-\lambda)^3$$

Các vetơ riêng tương ứng với $\lambda = 1$ có dạng

$$\mu(0,1,0) = \mu(0\overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3} + 0\overrightarrow{f_4}) = \mu\overrightarrow{f_3}, \mu \in \mathbf{R}$$

Bây giờ ta lại xét một cơ sở khác:

$$\mathscr{G} = \{\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2}, \overrightarrow{g_3}, \overrightarrow{g_4}\}$$

với

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{f_1} & & \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{g_1} \\ \overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{f_3} & \Rightarrow & \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{g_3} \\ \overrightarrow{g_3} = \overrightarrow{f_2} & & \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{g_2} \\ \overrightarrow{g_4} = \overrightarrow{f_4} & & \overrightarrow{f_4} = \overrightarrow{g_4} \end{array}$$

Ta hãy tính $\mathrm{mat}(u)_{\mathscr{G}}$

$$\begin{aligned} u(\overrightarrow{g_1}) &= u(\overrightarrow{f_1}) = \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{g_1} \\ u(\overrightarrow{g_2}) &= u(\overrightarrow{f_3}) = 2\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3} \qquad \text{(xem cột 3 của ma trận } A_1\text{)} \\ &= 2\overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} \\ u(\overrightarrow{g_3}) &= -5\overrightarrow{g_1} + 2\overrightarrow{g_2} + 5\overrightarrow{g_3} - 4\overrightarrow{g_4} \\ u(\overrightarrow{g_4}) &= -6\overrightarrow{g_1} + 5\overrightarrow{g_2} + 4\overrightarrow{g_3} - 3\overrightarrow{g_4} \end{aligned}$$

Vậy:

$$\mathrm{mat}(u)_{\mathscr{G}} = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Đặt: $J = \mathbf{R}\overrightarrow{g_3} \oplus \mathbf{R}\overrightarrow{g_4}$ và $u_2 = u_{|J}$. Xét tích:

$$J \xrightarrow{u_2} \mathbf{R}^4 \xrightarrow{p} J, \text{ p là phép chiếu.}$$

$p \circ u_2 \in End_{\mathbf{R}}(J)$ và ma trận của $p \circ u_2$ đối với cơ sở $\{\overrightarrow{g_3}, \overrightarrow{g_4}\}$ trong J chính là ma trận cấp 2 đóng khung trong A_2:

$$mat(p \circ u_2)_{\{\overrightarrow{g_3}, \overrightarrow{g_4}\}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

Ta hãy tính đa thức đặc trưng $\varphi_{B_2}(\lambda)$ của ma trận B_2:

$$\varphi_{B_2}(\lambda) = (1-\lambda)^2$$

Các vectơ riêng tương ứng với $\lambda = 1$ có dạng: $\mu(1,-1) = \mu(\overrightarrow{g_3} - \overrightarrow{g_4})$, $\mu \in \mathbf{R}$. Cuối cùng ta xét cơ sở:

$$\mathscr{H} = \{\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{h_3}, \overrightarrow{h_4}\}$$

với

$$\begin{aligned} \overrightarrow{h_1} &= \overrightarrow{g_1} \\ \overrightarrow{h_2} &= \overrightarrow{g_2} \\ \overrightarrow{h_3} &= \overrightarrow{g_3} - \overrightarrow{g_4} \\ \overrightarrow{h_4} &= \overrightarrow{g_4} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \overrightarrow{g_1} &= \overrightarrow{h_1} \\ \overrightarrow{g_2} &= \overrightarrow{h_2} \\ \overrightarrow{g_3} &= \overrightarrow{h_3} + \overrightarrow{h_4} \\ \overrightarrow{g_4} &= \overrightarrow{h_4} \end{aligned}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} u(\overrightarrow{h_1}) &= u(\overrightarrow{g_1}) = \overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{h_1} \\ u(\overrightarrow{h_2}) &= u(\overrightarrow{g_2}) = 2\overrightarrow{g_1} + \overrightarrow{g_2} = 2\overrightarrow{h_1} + \overrightarrow{h_2} \\ u(\overrightarrow{h_3}) &= \overrightarrow{h_1} - 3\overrightarrow{h_2} + \overrightarrow{h_3} \\ u(\overrightarrow{h_4}) &= -6\overrightarrow{h_1} + 5\overrightarrow{h_2} + 4\overrightarrow{h_3} + \overrightarrow{h_4} \end{aligned}$$

Vậy :

$$mat(u)_{\mathscr{H}} = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_3 là một ma trận tam giác, các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng của ma trận A đã cho, ở đây bốn giá trị riêng đều bằng nhau, đó là nghiệm bội $\lambda = 1$ cấp 4 :

Ta hãy tính các ma trận chuyển cơ sở. Ta lần lượt có :

$\mathscr{E} \xrightarrow{T} \mathscr{F}, \quad A_1 = T^{-1} A\, T,$ với

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathscr{F} \xrightarrow{T_1} \mathscr{G}, \quad A_2 = T_1^{-1} A_1\, T_1,$ với

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathscr{G} \xrightarrow{T_2} \mathscr{H}, \quad A_3 = T_2^{-1} A_2\, T_2,$ với

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy

$$A_3 = T_2^{-1}\, T_1^{-1}\, T^{-1}\, A\, T\, T_1\, T_2, \text{ với}$$

$$T\, T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chương VI

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

§1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong chương này ta chỉ xét các **R** - không gian vectơ.

1.1. Dạng tuyến tính trên một không gian vectơ E

Một *dạng tuyến tính* là một ánh xạ tuyến tính từ **R** - không gian vectơ E vào **R**.

$$f = \text{dạng tuyến tính trên E} \Leftrightarrow f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(E, \mathbf{R}) = E^*.$$

1.2. Dạng song tuyến tính trên một không gian vectơ E

$$\begin{aligned} f: E \times E &\to \mathbf{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

f là một *dạng song tuyến tính* trên E nếu f là tuyến tính đối với mỗi biến $\vec{x}, \vec{y}$.

Dạng song tuyến tính f là *đối xứng* nếu:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$$

1.3. Ma trận của dạng song tuyến tính

Giả sử $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$ là một cơ sở của không gian vectơ E và f: $E \times E \to \mathbf{R}$ là một dạng song tuyến tính trên E. Đặt $f(\overrightarrow{\varepsilon_i}, \overrightarrow{\varepsilon_j}) = a_{ij} \in \mathbf{R}$. Ma trận (a_{ij}):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận của dạng song tuyến tính f trên E đối với cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1},\ldots,\overrightarrow{\varepsilon_n}\}$. Nếu f đối xứng thì ma trận A đối xứng.

Ma trận $A = (a_{ij})$ hoàn toàn xác định dạng song tuyến tính f. Nếu:

$$\vec{x} = x_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \ldots + x_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$$

$$\vec{y} = y_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + \ldots + y_n\overrightarrow{\varepsilon_n}$$

thì:
$$f(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

hay viết dưới dạng ma trận:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = {}^tXAY$$

trong đó:
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\quad {}^tX = (x_1 x_2 \ldots x_n),$$

${}^tX$ là ma trận chuyển vị của ma trận cột X.

1.4. Ảnh hưởng của việc đổi cơ sở đối với ma trận của dạng song tuyến tính

Xét dạng song tuyến tính

$$f: E \times E \to \mathbf{R}$$

và hai cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1},\ldots,\overrightarrow{\varepsilon_n}\}$; $\{\overrightarrow{\eta_1},\ldots,\overrightarrow{\eta_n}\}$ của E, T là ma trận chuyển từ cơ sở thứ nhất sang cơ sở thứ hai, $A = (a_{ij})$ là ma trận của f đối với cơ sở thứ nhất, $B = (b_{ij})$ là ma trận của f đối với cơ sở thứ hai; lúc đó

$$B = {}^tTAT,\ {}^tT \text{ là ma trận chuyển vị của T.}$$

1.5. Dạng toàn phương

Cho dạng song tuyến tính đối xứng:

$$f: E \times E \to \mathbf{R}$$

Ánh xạ

$$\begin{aligned} \omega: E &\to \mathbf{R} \\ \vec{x} &\mapsto \omega(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}) \end{aligned}$$

gọi là *dạng toàn phương* trên E ứng với dạng song tuyến tính đối xứng f, còn f gọi là *dạng cực* của dạng toàn phương ω. Ta có:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left[\omega(\vec{x} + \vec{y}) - \omega(\vec{x}) - \omega(\vec{y})\right]$$

1.6. Ma trận của dạng toàn phương

Giả sử $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$ là một cơ sở của E, f là một dạng song tuyến tính đối xứng trên E, $A = (a_{ij})$ là ma trận của f đối với cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$. Đó là một ma trận đối xứng vì $a_{ij} = f(\overrightarrow{\varepsilon_i}, \overrightarrow{\varepsilon_j}) = f(\overrightarrow{\varepsilon_j}, \overrightarrow{\varepsilon_i}) = a_{ji}$.

Ma trận đối xứng $A = (a_{ij})$ của dạng song tuyến tính đối xứng f đối với cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$ gọi là *ma trận của dạng toàn phương* ω tương ứng với f đối với cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$.

Nếu $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{\varepsilon_i}$, thì

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

hay viết dưới dạng ma trận:

$$\omega(\vec{x}) = {}^{t}XAX$$

1.7. Dạng toàn phương xác định

Dạng toàn phương ω trên không gian vectơ E gọi là *xác định* nếu $\omega(\vec{x}) = 0$ kéo theo $\vec{x} = \vec{0}$.

Người ta chứng minh rằng nếu ω là một dạng toàn phương xác định thì $\omega(\vec{x})$ có cùng một dấu với mọi $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Người ta bảo ω là *xác định dương* (*âm*) nếu $\omega(\vec{x}) > 0 (\omega(\vec{x}) < 0)$ với mọi $\vec{x} \neq \vec{0}$ thuộc E.

1.8. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

Giả sử ω là một dạng toàn phương trên không gian vectơ E, và $\{\vec{\eta_1}, ..., \vec{\eta_n}\}$ là một cơ sở của E sao cho:

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2 \qquad \left(\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{\eta_i} \right)$$

thì biểu thức trên được gọi là *dạng chính tắc* của dạng toàn phương ω. Việc tìm một cơ sở trong E để ω có dạng chính tắc được gọi là đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Người ta chứng minh rằng bao giờ cũng đưa được một dạng toàn phương về dạng chính tắc.

1.9. Định lý quán tính

Một dạng toàn phương có thể có nhiều dạng chính tắc, song chúng có một điểm chung:

Trong hai dạng chính tắc bất kỳ của cùng một dạng toàn phương, số các hệ số dương bằng nhau và số các hệ số âm bằng nhau (*luật quán tính* của *dạng toàn phương*).

1.10. Không gian vectơ Euclide

Dạng song tuyến tính đối xứng f trên không gian vectơ E gọi là một *tích vô hướng* trên E nếu dạng toàn phương ω tương ứng với nó xác định dương. Ta ký hiệu $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}.\vec{y}$ và gọi là tích vô hướng của $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

Nếu $\vec{x} = \vec{y}$, ta viết $\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}^2$.

Không gian vectơ n chiều E gọi là *không gian vectơ Euclide* nếu trên E có một tích vô hướng.

1.11. Cơ sở trực chuẩn

Giả sử E là một không gian vectơ Euclide.

1.11.1. Hai vectơ $\vec{x}, \vec{y} \in E$ gọi là *trực giao* nếu $\vec{x}.\vec{y} = 0$, ký hiệu $\vec{x} \perp \vec{y}$.

1.11.2. $\vec{x} \in E$, ta gọi $\sqrt{\vec{x}^2}$ là *chuẩn* của $\vec{x}$, ký hiệu $\|\vec{x}\|$.

1.11.3. Cơ sở $\varepsilon = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n})$ của không gian vectơ Euclide E được gọi là cơ sở trực chuẩn nếu

$$\overrightarrow{\varepsilon_i}.\overrightarrow{\varepsilon_j} = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, ..., n.$$

1.11.4. Người ta chứng minh mọi không gian vectơ Euclide E n chiều $(n \geq 2)$ đều có cơ sở trực chuẩn.

Để xây dựng một cơ sở trực chuẩn từ một cơ sở đã biết, ta có thể sử dụng *quá trình trực chuẩn hóa của Gram - Schmidt*. Ta có thể lấy n = 3, và thực hiện việc trực chuẩn hóa theo Gram - Schmidt; trường hợp n tổng quát cũng làm như vậy. Ta hãy xuất phát từ một cơ sở $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ của E; ta xác định $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ như sau:

$$\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} + \lambda_{21}\overrightarrow{f_1};\ \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_3} + \lambda_{31}\overrightarrow{f_1} + \lambda_{32}\overrightarrow{f_2}$$

với điều kiện: $\overrightarrow{f_1}.\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{f_1}.\overrightarrow{f_3} = 0$. Các điều kiện đó sẽ xác định duy nhất λ_{21}, λ_{31}, λ_{32}.

Trước hết ta chú ý các vectơ $\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$ xác định như vậy có chuẩn khác 0 vì $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}$ độc lập tuyến tính.

$$\vec{f_1}.\vec{f_2} = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = -\frac{\vec{e_1}.\vec{e_2}}{\|\vec{e_1}\|^2}$$

$$\vec{f_1}.\vec{f_3} = 0 \Rightarrow \lambda_{31} = -\frac{\vec{f_1}.\vec{e_3}}{\|\vec{f_1}\|^2}$$

$$\vec{f_2}.\vec{f_3} = 0 \Rightarrow \lambda_{32} = -\frac{\vec{f_2}.\vec{e_3}}{\|\vec{f_2}\|^2}$$

Cuối cùng ta chuẩn hóa: $\vec{\varepsilon_i} = \frac{\vec{f_i}}{\|\vec{f_i}\|}$, i = 1, 2, 3, $\{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

1.12. Không gian con trực giao

E là một không gian Euclide, F là một không gian con của E.

$$H = \{\vec{x} \in E \mid \vec{x} \perp \vec{y}, \forall \vec{y} \in F\}$$

H là một không gian con và E = F ⊕ H. Người ta gọi H là không gian con *bù trực giao* với không gian con F.

1.13. Phép biến đổi trực giao. Ma trận trực giao

E là một không gian vectơ Euclide, f: E → E là một tự đồng cấu. f là một *phép biến đổi trực giao* nếu f bảo toàn tích vô hướng

$$f(\vec{x}).f(\vec{y}) = \vec{x}.\vec{y}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E.$$

f biến đổi trực giao ⇔ f biến cơ sở trực chuẩn thành một cơ sở trực chuẩn.

$A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ là ma trận trực chuẩn nếu ${}^tA.A = I_n$.

f biến đổi trực giao ⇔ ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn là một ma trận trực giao.

1.14. Phép biến đổi đối xứng. Ma trận đối xứng

E là một không gian vectơ Euclide, f: E → E là một tự đồng cấu. f là một phép biến đổi đối xứng nếu:

$$\vec{x}.f(\vec{y}) = f(\vec{x}).\vec{y}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$$

f biến đổi đối xứng $\Leftrightarrow$ ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn là một ma trận đối xứng.

1.14.1. Nếu A là một ma trận đối xứng cấp n với các thành phần là những số thực thì đa thức đặc trưng $\varphi(\lambda) = |A - \lambda I|$ của A có n nghiệm thực, mỗi nghiệm bội cấp m được coi là m nghiệm bằng nhau.

1.14.2. $f : E \to E$ là một phép biến đổi đối xứng của không gian vectơ Euclide E, λ_1 và λ_2 là hai giá trị riêng phân biệt, $E_{\lambda_1}(f)$ và $E_{\lambda_2}(f)$ là hai không gian con riêng tương ứng với λ_1 và λ_2 (ch.V, 1.10); thế thì $E_{\lambda_1}(f)$ và $E_{\lambda_2}(f)$ trực giao với nhau.

1.14.3. Nếu $f: E \to E$ là một phép biến đổi đối xứng của không gian vectơ Euclide E, thì E có một cơ sở trực chuẩn gồm những vectơ riêng của f: $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$.

Mỗi vectơ riêng tương ứng với một giá trị riêng của f. Nếu λ_1 là một nghiệm bội cấp n_1, thì sẽ có n_1 vectơ $\overrightarrow{\varepsilon_i}$ tương ứng với λ_1. Nói cách khác, nếu λ_1 có số bội n_1, λ_2 có số bội n_2 ,..., λ_m có số bội n_m, và $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$, thì:

$$\dim E_{\lambda_1}(f) = n_1, \dim E_{\lambda_2}(f) = n_2, ..., \dim E_{\lambda_m}(f) = n_m$$

và $$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

1.14.4. Đưa một dạng toàn phương trên một không gian Euclide $\mathbf{R}^n$ về dạng chính tắc.

Giả sử ω là dạng toàn phương trên $\mathbf{R}^n$ có ma trận A đối với cơ sở $e = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ chính tắc của $\mathbf{R}^n$. Xét phép biến đổi đối xứng $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ có ma trận là A đối với cơ sở e. Đặt $\varepsilon = \{\overrightarrow{\varepsilon_1}, ..., \overrightarrow{\varepsilon_n}\}$ là cơ sở trực chuẩn gồm những vectơ riêng của f. Khi đó ma trận T chuyển từ cơ sở e sang cơ sở ε là một ma trận trực giao ($T^{-1} = {}^tT$). Đối với cơ sở ε, ma trận của dạng toàn phương ω là ma trận chéo B:

$$B = {}^tTAT.$$

§2. BÀI TẬP

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

1. Viết ma trận của dạng song tuyến tính trên $\mathbf{R}^3$, ở đây $\vec{\alpha}(x_1, x_2, x_3), \vec{\beta}(y_1, y_2, y_3)$:

a) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2x_1y_1 - 3x_2y_3 + 4x_3y_1 - x_3y_3$;

b) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 4x_1y_2 - 5x_1y_3 + 8x_2y_1 - 6x_2y_3 + x_3y_3$.

2. Tìm ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbf{R}^3$:

a) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 - 3x_2y_2 + 6x_2y_3 - x_3y_3$;

b) $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2x_1y_2 - 6x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + 5x_3y_3$.

3. Cho ma trận của dạng song tuyến tính φ trên $\mathbf{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận của φ đối với cơ sở (ξ) gồm các vectơ:

$$\overrightarrow{\xi_1} = (0,2,1), \overrightarrow{\xi_2} = (1,1,0), \overrightarrow{\xi_3} = (-1,3,0).$$

4. Cho dạng song tuyến tính φ trên $\mathbf{R}^3$ có ma trận đối với cơ sở (ε) là

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ma trận chuyển từ cơ sở (ε) sang cơ sở (ξ) của $\mathbf{R}^3$ là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tìm ma trận của φ đối với cơ sở (ξ).

5. Tìm ma trận của dạng toàn phương trên $\mathbf{R}^3$ có biểu thức toạ độ sau:

a) $\omega(\overrightarrow{\alpha}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$;

b) $\omega(\overrightarrow{\alpha}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$;

c) $\omega(\overrightarrow{\alpha}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - x_2x_3$.

6. Cho các dạng toàn phương sau đây được viết dưới dạng ma trận. Hãy viết chúng dưới dạng thông thường:

a) $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

b) $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Viết các dạng toàn phương sau đây dưới dạng ma trận:

c) $\omega(\overrightarrow{\alpha}) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$, $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, x_2)$;

d) $\omega(\overrightarrow{\alpha}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$.

7. Tìm biểu thức tọa độ của mỗi dạng toàn phương dưới đây sau khi thực hiện phép biến đổi tọa độ tương ứng:

a) $\omega(\overrightarrow{\alpha}) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_1x_2$, $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$;

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

b) $\omega(\overrightarrow{\alpha}) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$, $\overrightarrow{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$;

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}$$

c) $\omega(\vec{\alpha}) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$, $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$;

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - \dfrac{y_3}{2} \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 - y_2 \end{cases}$$

d) $\omega(\vec{\alpha}) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$, $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3)$;

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

8. Đưa các dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

(Dưới đây $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$)

a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

b) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

e) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}\, x_2x_3$;

f) $2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

9. Với các ký hiệu trước định lí 2, §3, chứng minh rằng một dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi

$$(-1)^k D_k > 0, k = 1, 2, ..., n.$$

KHÔNG GIAN VECTƠ EUCLIDE

10. Trong không gian vectơ Euclide ta đặt:

$$\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|}$$

và gọi đó là cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$.

Hãy tính chuẩn và cosin của góc giữa hai vectơ sau trong $\mathbf{R}^3$:

a) $\vec{\alpha} = (1,2,3); \vec{\beta} = (0,2,1);$

b) $\vec{\alpha} = (1,0,0); \vec{\beta} = (0,1,-1).$

11. Trong không gian vectơ Euclide $\mathbf{R}^3$ cho cơ sở gồm:

$$\vec{\varepsilon_1} = (1,2,3); \vec{\varepsilon_2} = (0,2,0); \vec{\varepsilon_3} = (0,0,3)$$

Trực chuẩn hóa hệ vectơ đã cho.

12. Trong không gian vectơ Euclide $\mathbf{R}^4$, hãy trực chuẩn hóa hệ vectơ gồm các vectơ sau:

$$\vec{\varepsilon_1} = (1,0,1,2); \vec{\varepsilon_2} = (-1,0,-1,0); \vec{\varepsilon_3} = (0,0,2,1), \vec{\varepsilon_4} = (0,1,1,1).$$

13. Trong không gian vectơ Euclide E với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\}$.

Hãy tính $\vec{\alpha}.\vec{\beta}, \|\vec{\alpha}\|, \|\vec{\beta}\|, \cos(\vec{\alpha},\vec{\beta})$:

a) $\vec{\alpha} = 3\vec{\varepsilon_1} - 2\vec{\varepsilon_2}, \vec{\beta} = \vec{\varepsilon_2} + 4\vec{\varepsilon_3};$

b) $\vec{\alpha} = \vec{\varepsilon_1} + 3\vec{\varepsilon_2} - \vec{\varepsilon_3}, \vec{\beta} = -\vec{\varepsilon_1} + 2\vec{\varepsilon_2} + \vec{\varepsilon_3};$

c) $\vec{\alpha} = 4\vec{\varepsilon_2} + \vec{\varepsilon_3}, \vec{\beta} = -5\vec{\varepsilon_1} + \vec{\varepsilon_3};$

d) $\vec{\alpha} = 2\vec{\varepsilon_1} - \vec{\varepsilon_2} + \vec{\varepsilon_3}, \vec{\beta} = 2\vec{\varepsilon_2} + 3\vec{\varepsilon_3};$

e) $\vec{\alpha} = -3\vec{\varepsilon_1} + 2\vec{\varepsilon_2} + \vec{\varepsilon_3}, \vec{\beta} = \vec{\varepsilon_1} - \vec{\varepsilon_2} + 5\vec{\varepsilon_3}.$

14. Tìm ma trận trực giao đưa các dạng toàn phương trên $\mathbf{R}^3$ sau đây về dạng chính tắc, ($\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$):

a) $\omega(\vec{\alpha}) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$;

b) $\omega(\vec{\alpha}) = 4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$;

c) $\omega(\vec{\alpha}) = 5x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3$;

d) $\omega(\vec{\alpha}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 4x_1x_3$.

15. Giả sử A là một ma trận đối xứng thực cấp n sao cho $A^k = I_n$ (ma trận đơn vị) với $k \in \mathbf{N}^*$.

a) Chứng minh $A^2 = I_n$.

b) Giả sử E là một **R** - không gian vectơ n chiều, $\beta = \{\vec{\varepsilon_1}, ..., \vec{\varepsilon_n}\}$ là một cơ sở của E. Xét phép biến đổi song tuyến tính φ có ma trận là A đối với cơ sở β. A phải thế nào để φ là một tích vô hướng trên E?

16. Giả sử E là một không gian vectơ Euclide, $S = \{\vec{u_1}, ..., \vec{u_k}\}$ là một họ vectơ trong E, $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Đặt:

$$(A_S)_{ij} = \vec{u_i}.\vec{u_j},$$

ta được ma trận $A_S \in \mathrm{Mat}_k(\mathbf{R})$.

a) Chứng minh S phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $|A_S| = 0$.

b) Chứng minh $\mathrm{hg}S = \mathrm{hg}A_S$.

c) Chứng minh $|A_S| \geq 0$.

17. Giả sử E là một **R** - không gian vectơ n chiều, ω là một dạng toàn phương xác định dương, φ là dạng cực của ω, và E là một **R** - không gian vectơ Euclide với tích vô hướng φ. Cho $\vec{\alpha} \in E$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Người ta xác định các ánh xạ sau đây:

$$f: E \to E \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \omega(\vec{x})\vec{\alpha} - \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x},$$

$$\delta: E \to \mathbf{R} \quad \vec{x} \mapsto \delta(\vec{x}) = \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})^2 - \omega(\vec{x})\omega(\vec{\alpha}),$$

a) Chứng minh δ là một dạng toàn phương; tính $\omega(f(\vec{x}))$ và $\varphi(\vec{\alpha}, f(\vec{x}))$ qua $\omega(\vec{x})$ và $\delta(\vec{x})$.

b) Chứng minh $\delta(\vec{x}) \leq 0$. δ có phải là một dạng toàn phương xác định âm không ?

c) Chứng minh với mọi $\vec{x} \in E$, $f(\vec{x})$ và $\vec{x}$ trực giao.

d) Giả sử dim E = 2 và $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$ là một cơ sở của E. Hãy cho một cơ sở trực chuẩn của E.

18. Giả sử E là một không gian vectơ Euclide và f: E $\to$ E là một phép biến đổi trực giao.

a) Chứng minh

$$f \text{ biến đổi trực giao} \Leftrightarrow \| f(\vec{x}) \| = \| \vec{x} \| .$$

b) Giả sử dim E = n, $A \in Mat_n(\mathbf{R})$ là ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn của E. Chứng minh $|A| \in \{1, -1\}$.

c) Giả sử $E = \mathbf{R}^2$, $e = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ là hệ cơ sở chính tắc. Xét dạng song tuyến tính đối xứng φ có ma trận

$$mat(\varphi)_e = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

và u: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ là một tự đồng cấu bảo toàn φ, nghĩa là:

$$\varphi\,(u(\vec{x}), u(\vec{y})) = \varphi\,(\vec{x}, \vec{y}).$$

Chứng minh $mat(u)_e \in \{1, -1\}$. Tìm dạng của $mat(u)_e$.

19. Xét **R** - không gian vectơ $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ và bốn vectơ sau đây:

$f_1: x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto \sin x$,

$f_3: x \mapsto \cos 2x$, $f_4 : x \mapsto \sin 2x$.

a) Chứng minh $\mathscr{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ độc lập tuyến tính.

b) Xét **R** - không gian vectơ E có cơ sở là $\mathscr{F}$. Ta xét ánh xạ:

$$\varphi : E^2 \to \mathbf{R}$$

$$(f, g) \mapsto \varphi(f, g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \circ g(x)dx$$

Chứng minh φ là một tích vô hướng trên E và hãy cho một cơ sở trực chuẩn trên E.

20. Xét ma trận $A \in Mat_n(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

a) Ma trận A có khả nghịch không?

b) Xét ma trận $A - iI_n \in Mat_n(\mathbf{C})$.

Chứng minh $A - iI_n$ khả nghịch trong $Mat_n(\mathbf{C})$.

c) Chéo hóa ma trận A.

Lời giải

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

3. $mat(\varphi)_\xi = {}^tTAT = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 9 & 5 & 3 \\ 11 & -9 & -1 \end{pmatrix}$

trong đó: $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở ξ.

5. a) $\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. a) $3x_1^2 - 2x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$.

c) $\omega(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} (x_1 \quad x_2), \vec{\alpha} = (x_1 \quad x_2)$.

7. a) $\omega(\vec{\alpha}) = 8y_2^2 - 3y_2^2$.

b) $\omega(\vec{\alpha}) = y_1^2 - 7y_2^2 + y_3^2$.

8. a) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$; $x_1 = 2y_1 - y_2$, $x_2 = y_2 - y_1$, $x_3 = y_3$.

f) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$; $x_1 = y_3 - y_2$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_1 + 3y_2 - y_3$.

9. Ta nhắc lại định lý 2, §3:

Giả sử:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận của dạng toàn phương trên không gian vectơ V. Khi đó ω là xác định dương nếu và chỉ nếu mọi định thức con chính

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ k = 1, 2, ..., n$$

của A đều dương.

Bây giờ ta quay về bài tập. Ta có:

ω xác định âm $\Leftrightarrow$ $-\omega$ xác định dương.

Nếu $A = (a_{ij})$ là ma trận của ω, thì $-A = (-a_{ij})$ là ma trận của $-\omega$. Theo địng lý trên:

$$-\omega \text{ xác định dương} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1k} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & \cdots & -a_{kk} \end{vmatrix}, = (-1)^k D_k > 0$$

$k = 1, 2, ..., n$.

10. a) $\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{14}, \|\vec{\beta}\| = \sqrt{5}, \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \sqrt{7}/\sqrt{10}$.

b) $\|\vec{\alpha}\| = 1, \|\vec{\beta}\| = \sqrt{2}, \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Rightarrow \vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ trực giao.

11. Đặt:

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\varepsilon_1} - \overrightarrow{\varepsilon_2} - \overrightarrow{\varepsilon_3},$$

$$\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\varepsilon_2},$$

$$\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\varepsilon_3}$$

Ta được:

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0),$$

$$\overrightarrow{e_2} = (0,1,0),$$

$$\overrightarrow{e_3} = (0,0,1).$$

Đó chính là hệ cơ sở trực chuẩn chính tắc của $\mathbf{R}^3$. Quá trình trực chuẩn hoá này nhanh, do hệ vectơ $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ đơn giản giúp ta nhìn thấy ngay một hệ cơ sở trực chuẩn. Nếu ta làm máy móc như trong lý thuyết (xem §1, 1.11.4) thì sẽ phức tạp hơn nhiều.

12. Đặt $\overrightarrow{\delta_1} = \overrightarrow{\varepsilon_1}$ và xét $\overrightarrow{\varepsilon_2} + \lambda_{21}\overrightarrow{\delta_1}$ với điều kiện vectơ này trực giao với $\overrightarrow{\delta_1}$: $\overrightarrow{\delta_1}.(\overrightarrow{\varepsilon_2} + \lambda_{21}\overrightarrow{\delta_1}) = 0$. Từ đó, ta được:

$$\lambda_{21} = -\frac{\overrightarrow{\varepsilon_1}.\overrightarrow{\varepsilon_2}}{\overrightarrow{\varepsilon_1}^2} = \frac{1}{3}$$

Vậy: $$\overrightarrow{\varepsilon_2} + \lambda_{21}\overrightarrow{\delta_1} = \left(-\frac{2}{3}, 0, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Đáng lẽ lấy $\overrightarrow{\delta_2} = \overrightarrow{\varepsilon_2} + \lambda_{21}\overrightarrow{\delta_1}$ như trong (§1, 1.11.4), ta lấy $\overrightarrow{\delta_2} = -\frac{3}{2}(\overrightarrow{\varepsilon_2} + \lambda_{21}\overrightarrow{\delta_1}) = (1, 0, 1, -1)$ để tránh những phân số.

Ta có: $\overrightarrow{\delta_1}$ và $\overrightarrow{\delta_2}$ trực giao. Bây giờ ta xét vectơ:

$$\overrightarrow{\varepsilon_3} + \lambda_{31}\overrightarrow{\delta_1} + \lambda_{32}\overrightarrow{\delta_2}$$

và ta muốn vectơ này trực giao với $\overrightarrow{\delta_1}$ và $\overrightarrow{\delta_2}$.

- trực giao với $\overrightarrow{\delta_1}$:

$$\overrightarrow{\delta_1}.(\overrightarrow{\varepsilon_3} + \lambda_{31}\overrightarrow{\delta_1} + \lambda_{32}\overrightarrow{\delta_2}) = 0 = \overrightarrow{\delta_1}.\overrightarrow{\varepsilon_3} + \lambda_{31}\overrightarrow{\delta_1}^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{31} = -\frac{\overrightarrow{\delta_1}.\overrightarrow{\varepsilon_3}}{\overrightarrow{\delta_1}^2} = -\frac{2}{3}$$

- trực giao với $\overrightarrow{\delta_2}$:

$$\overrightarrow{\delta_2}.(\overrightarrow{\varepsilon_3} + \lambda_{31}\overrightarrow{\delta_1} + \lambda_{32}\overrightarrow{\delta_2}) = 0 \Rightarrow \lambda_{32} = -\frac{\overrightarrow{\delta_2}.\overrightarrow{\varepsilon_3}}{\overrightarrow{\delta_2}^2} = -\frac{1}{3}$$

Vậy: $$\overrightarrow{\varepsilon_3} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\delta_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\delta_2} = (-1,0,1,0).$$

Vectơ trên có các thành phần là nguyên, nên ta lấy thẳng:

$$\overrightarrow{\delta_3} = (-1,0,1,0).$$

Cuối cùng ta xét vectơ:

$$\overrightarrow{\varepsilon_4} + \lambda_{41}\overrightarrow{\delta_1} + \lambda_{42}\overrightarrow{\delta_2} + \lambda_{43}\overrightarrow{\delta_3}$$

Lần lượt đòi hỏi vectơ đó trực giao với $\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}, \overrightarrow{\delta_3}$, ta có:

$$\lambda_{41} = -\frac{1}{2}; \lambda_{42} = 0; \lambda_{43} = -\frac{1}{2}$$

và ta đi đến vectơ: $\overrightarrow{\delta_4} = (0,1,0,0)$ trực giao với $\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}, \overrightarrow{\delta_3}$. Cuối cùng hệ vectơ:

$$\frac{\overrightarrow{\delta_1}}{\|\overrightarrow{\delta_1}\|} = (1/\sqrt{6}, 0, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}),$$

$$\frac{\overrightarrow{\delta_2}}{\|\overrightarrow{\delta_2}\|} = (1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}),$$

$$\frac{\overrightarrow{\delta_3}}{\|\overrightarrow{\delta_3}\|} = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0),$$

$$\overrightarrow{\delta_4} = (0,1,0,0)$$

là trực chuẩn.

Lời bình: Không gian vectơ $\mathbf{R}^4$ đã có cơ sở trực chuẩn chính tắc $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$, thì cần gì phải chứng tỏ $\mathbf{R}^4$ có một cơ sở trực chuẩn. Bài toán nên sửa như sau để có ý nghĩa: trong $\mathbf{R}^4$ xét không gian con sinh bởi $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ (chẳng hạn), hãy tìm một cơ sở trực chuẩn cho không gian con đó; lúc đó các vectơ

$$\frac{\overrightarrow{\delta_1}}{\|\overrightarrow{\delta_1}\|},\ \frac{\overrightarrow{\delta_2}}{\|\overrightarrow{\delta_2}\|},\ \frac{\overrightarrow{\delta_3}}{\|\overrightarrow{\delta_3}\|}$$

ở trên chính là một cơ sở trực chuẩn cho không gian con đang xét. Đối với bài 11, ta cũng có nhận xét tương tự.

13. a) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = (3\overrightarrow{\varepsilon_1} - 2\overrightarrow{\varepsilon_2}).(\overrightarrow{\varepsilon_2} + 4\overrightarrow{\varepsilon_3}) = -2$,

$\|\vec{\alpha}\| = \sqrt{13}, \|\vec{\beta}\| = \sqrt{17}$,

$$\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{-2}{\sqrt{13}\sqrt{17}}.$$

14. a) Ma trận A của dạng toàn phương ω đối với hệ cơ sở trực chuẩn chính tắc $e = \{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ trong $\mathbf{R}^3$ là:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Xét đa thứcđặctrưng $\varphi(\lambda)$ của A:

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -3 \\ -6 & 9-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(9-\lambda)(14-\lambda)$$

$\varphi(\lambda)$ có 3 giá trị riêng phân biệt: 0, 9, 14. Ta lấy ba vectơ riêng $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}$ tương ứng theo thứ tự với 0, 9, 14 và có chuẩn bằng 1:

$$\overrightarrow{\varepsilon_1} = (3/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}),$$
$$\overrightarrow{\varepsilon_2} = (0, 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}),$$
$$\overrightarrow{\varepsilon_3} = (-5/\sqrt{70}, 6/\sqrt{70}, 3/\sqrt{70}).$$

$\varepsilon = \{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ làm thành một cơ sở trực chuẩn, sao cho nếu $\vec{\alpha} = y_1\overrightarrow{\varepsilon_1} + y_2\overrightarrow{\varepsilon_2} + y_3\overrightarrow{\varepsilon_3}$, thì:

$$\omega(\overline{\alpha}) = 0y_1^2 + 9y_2^2 + 14y_3^2.$$

Ma trận trực giao M chuyển từ cơ sở e sang cơ sở ε là:

$$M = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} & 0 & -5/\sqrt{70} \\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{5} & 6/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{14} & -2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} \end{pmatrix}$$

d) Ma trận của dạng toàn phương đối với cơ sở e :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Đa thức $\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda - 8$ của A có ba giá trị riêng phân biệt:

$$\lambda_1 = 4,$$

$$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2},$$

$$\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

cho ta ba vectơ riêng đã chuẩn hóa:

$$\overline{\varepsilon_1} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0),$$

$$\overrightarrow{\varepsilon_2} = \left(1/\|\overrightarrow{\omega_1}\|, -1/\|\overrightarrow{\omega_1}\|, \frac{8}{(1-\sqrt{33})\|\overrightarrow{\omega_1}\|}\right),$$

$$\overrightarrow{\varepsilon_3} = \left(1/\|\overrightarrow{\omega_2}\|, -1/\|\overrightarrow{\omega_2}\|, \frac{8}{(1+\sqrt{33})\|\overrightarrow{\omega_2}\|}\right)$$

trong đó :

$$\overline{\omega_1} = \left(1, -1, \frac{8}{1-\sqrt{33}}\right),$$

$$\overrightarrow{\omega_2} = \left(1, -1, \frac{8}{1+\sqrt{33}}\right)$$

Ma trận trực giao cần tìm là ma trận có các cột theo thứ tự là các toạ độ của $\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}$.

15. a) A là một ma trận đối xứng thực nên A có n giá trị riêng thực λ_1, λ_2, ..., λ_n. Ta có quan hệ đồng dạng:

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}T.$$

Vì $A^k = I_n$ nên:

$$I_n = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}T$$

hay

$$T\, I_n\, T^{-1} = I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Vậy $\lambda_i^k = 1$, i = 1, 2, ..., n. Từ đó $\lambda_i \in \{1, -1\} \Rightarrow \lambda_i^2 = 1$. Vậy

$$A^2 = T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}T = I_n$$

b) Để φ là một tích vô hướng trên E, thì dạng toàn phương ω của φ phải xác định dương, nghĩa là $\lambda_i > 0$, i = 1, 2, ..., n; trong trường hợp này $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 1$. Vậy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

16. a) Trong không gian vectơ Euclide $\mathbf{R}^k$, ta xét cơ sở trực chuẩn chính tắc $e = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_k}\}$ và các vectơ:

(1) $$\overrightarrow{c_i} = \sum_{j=1}^{k} (\overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_j})\overrightarrow{e_j}$$

Lấy $(\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$, và xét các vectơ:

(2) $$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_j \overrightarrow{u_i} \in E$$

(3) $$\bar{c} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{c_i} \in \mathbf{R}^k$$

Theo (1), ta có:

$$\vec{c} = \sum_{1\le i\le k} \lambda_i \sum_{1\le j\le k} (\overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_j})\overrightarrow{e_j} = \sum_{1\le j\le k} \sum_{1\le i\le k} \lambda_i (\overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_j})\overrightarrow{e_j}$$
$$= \sum_{1\le j\le k} (\vec{v}.\overrightarrow{u_j})\overrightarrow{e_j}$$

Từ đó ta suy ra nếu $\bar{v} = \vec{0}$ thì $\bar{c} = \vec{0}$. Đảo lại giả sử $\bar{c} = \vec{0}$, điều đó có nghĩa

$$\bar{v}.\bar{u}_j = 0 \text{, j = 1, 2, ..., k.}$$

Vậy :

$$\vec{v}.\vec{u} = \vec{v}.\sum_{1\le j\le k} \lambda_j \bar{u}_j = 0$$

hay $\bar{v} = \vec{0}$ (do tính chất của tích vô hướng).

Kết luận:

$$\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{0}.$$

Mặt khác:

S phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow \exists\ \lambda_i \neq 0$ để $\vec{v} = \vec{0}$ (xem (2)),

$|A_S| = 0 \Leftrightarrow \exists\ \lambda_i \neq 0$ để $\vec{c} = \vec{0}$ (xem (3)).

Vậy:

S phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow |A_S| = 0$.

b) Giả sử hg S = r ≤ k, và $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r}\}$ độc lập tối đại. Từ a), định thức của ma trận con sau đây của A_S:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_1} \ldots & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_1} \ldots & \overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_r} \end{vmatrix}$$

là khác 0. Các ma trận con trong A_S bao ma trận trên đều có định thức bằng 0 vì $\{\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_{r+p}}\}$, p = 1, ..., k - r, phụ thuộc tuyến tính. Vậy $\mathrm{hg}A_S = r$.

c) A_S là một ma trận đối xứng thực, ta có thể coi nó là ma trận của một dạng toàn phương ω trên $\mathbf{R}^k$ đối với cơ sở chính tắc e. Giả sử $\bar{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbf{R}^k$. Ta có:

$$\omega(\bar{x}) = (\alpha_1 \ldots \alpha_k) A_S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j (\overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_j}) =$$

$$= \left(\sum_{1 \le i \le k} \alpha_i \overrightarrow{u_i} \right) . \left(\sum_{1 \le j \le k} \alpha_j \overrightarrow{u_j} \right) = \vec{y}.\vec{y} = \|\vec{y}\|^2 \geq 0,$$

trong đó $\vec{y} = \sum_{1\le i\le k} \alpha_i \vec{u_i}$ thuộc **E** và $\vec{y}.\vec{y}$ là tích vô hướng của không gian Euclide E. Từ $\omega(\vec{x}) \ge 0$, ta suy ra các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ của A_S là dương hay bằng 0, do đó $\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_k \ge 0$. Nhưng $|A_S| = \lambda_1\lambda_2 ... \lambda_k$, vậy $|A_S| \ge 0$.

17. a) $\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})$ là một dạng tuyến tính, vậy $\varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})^2$ là một dạng toàn phương và δ là một tổ hợp của những dạng toàn phương, vậy δ là một dạng toàn phương.

Bây giờ ta tính $\omega(f(\vec{x}))$ và $\varphi(\vec{\alpha}, f(\vec{x}))$. Ta được:

$$\omega(f(\vec{x})) = \varphi(f(\vec{x}), f(\vec{x})) = \varphi(\omega(\vec{x})\vec{\alpha} - \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x}, \omega(\vec{x})\vec{\alpha} - \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x})$$

$$= \varphi(\omega(\vec{x})\vec{\alpha}, \omega(\vec{x})\vec{\alpha}) - 2\varphi(\omega(\vec{x})\vec{\alpha}, \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x}) + \varphi(\varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x}, \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x})$$

$$= \omega(\omega(\vec{x})\vec{\alpha}) - 2\varphi(\omega(\vec{x})\vec{\alpha}, \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x}) + \omega(\varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})\vec{x})$$

$$= \omega(\vec{x})^2 \omega(\vec{\alpha}) - \omega(\vec{x})\varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})^2$$

$$= \omega(\vec{x})(\omega(\vec{x})\omega(\vec{\alpha}) - \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})^2) = -\omega(\vec{x})\delta(\vec{x});$$

tương tự:

$$\varphi(\vec{\alpha}, f(\vec{x})) = \omega(\vec{x}).\omega(\vec{\alpha}) - \varphi(\vec{\alpha}, \vec{x})^2 = -\delta(\vec{x}).$$

b) Từ $\omega(f(\vec{x})) = -\omega(\vec{x})\delta(\vec{x})$ và ω xác định dương ta suy ra $\delta(\vec{x}) \le 0$. Ta có $f(\vec{\alpha}) = \vec{0}$ $(\vec{\alpha} \ne \vec{0})$ và $\omega(\vec{\alpha}) > 0$, vậy $\delta(\vec{\alpha}) = 0$ nghĩa là δ triệt tiêu không chỉ với $\vec{x} = \vec{0}$, δ không phải là một dạng toàn phương xác định âm.

c) $\varphi(\vec{x}, f(\vec{x})) = \omega(\vec{x})\omega(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}, \vec{x})^2 = 0$. Vậy $\vec{x}$ và $f(\vec{x})$ trực giao đối với tích vô hướng φ, với mọi $\vec{x} \in E$.

d) Trước hết vì $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$ độc lập tuyến tính nên $f(\vec{\beta}) \neq \vec{0}$. Mặt khác, theo c) $\vec{\beta}$ và $f(\vec{\beta})$ trực giao. Vậy hệ cơ sở trực chuẩn mà ta có thể lấy ngay trong E là:

$$\left\{\frac{\vec{\beta}}{\|\vec{\beta}\|}, \frac{f(\vec{\beta})}{\|f(\vec{\beta})\|}\right\}$$

18. a) f biến đổi trực giao $\Rightarrow f(\vec{x}).\ f(\vec{y}) = \vec{x}.\vec{y} \Rightarrow f(\vec{x})^2 = \vec{x}^2 \Rightarrow \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$.

Đảo lại giả sử

$$\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \Rightarrow f(\vec{x})^2 = \vec{x}^2$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}).\ f(\vec{y}) = \frac{1}{2}\left[f(\vec{x}+\vec{y}).f(\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x}).f(\vec{x}) - f(\vec{y}).f(\vec{y})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\vec{x}+\vec{y}).(\vec{x}+\vec{y}) - \vec{x}.\vec{x} - \vec{y}.\vec{y}\right]$$

$$= \vec{x}.\vec{y}$$

b) Giả sử A là ma trận của f đối với một cơ sở trực chuẩn của E. Theo (§1, 1.13)

$${}^tAA = I_n$$

Vậy

$$|{}^tA|\,|A| = |A|^2 = 1.$$

nghĩa là $|A| \in \{1, -1\}$.

c) Đặt $A = mat\,(u)_e$. Gọi X và Y là dạng ma trận cột của các vectơ $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Ta có:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = {}^tXBY$$

$$u(\vec{x}) = AX,\ u(\vec{y}) = AY.$$

Vì u bảo toàn φ, nên:

$$ {}^tXBY = \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(u(\vec{x}), u(\vec{y})) = {}^t(AX)BAY = {}^tX({}^tABA)Y $$

với mọi $\vec{x}$, $\vec{y}$. Ta suy ra:

$$B = {}^tABA$$

hay

$$|B| = |{}^tA|\,|B|\,|A| = |A|^2|B|$$

Nhưng $|B| = -1 \neq 0$, nên $|A|^2 = 1$, vậy $|A| \in \{1, -1\}$. Giả sử

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Ta suy ra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & xt + yz \\ xt + yz & 2yt \end{pmatrix}$$

Vậy:

$$xz = yt = 0,$$
$$xt + yz = 1.$$

1) $x \neq 0 \Rightarrow z = 0,\ t = 1/x,\ y = 0$.

2) $x = 0 \Rightarrow yz = 1,\ z = 1/y,\ t = 0$.

Vậy A có dạng:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix},$$

hay

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 1/y & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ hai trường hợp a) và b) ta có thể nói rằng một phép biến đổi tuyến tính bảo toàn một dạng song tuyến tính có ma trận không suy biến thì ma trận của nó phải có định thức bằng ± 1.

19. a) Theo (ch. II, §2, bài 40) $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} = U \oplus V$ trong đó U là không gian con các hàm số chẵn và V là không gian con các hàm số lẻ. Ta có cosx, cos2x ∈ U và sinx, sin2x ∈ V. Để chứng minh bốn vectơ đó độc lập tuyến tính, ta chỉ cần chứng minh sinx và sin2x độc lập tuyến tính, và cũng vậy đối với cosx và cos2x. Nhưng trong (ch.II, §2, bài 31) ta đã chứng minh sinx và sin2x độc lập tuyến tính. Việc chứng minh cosx và cos2x cũng làm tương tự.

b) Ta dễ dàng tính các tích phân $\varphi(f_i, f_j)$ để thấy

(1) $$\varphi(f_i, f_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Vậy φ là một dạng song tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ là:

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gọi ω là dạng toàn phương của φ và $f = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 + \mu_4 f_4 \in E$. Ta có:

$$\omega(f) = (\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4)\ I_4 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \lambda^2{}_1 + \lambda^2{}_2 + \lambda^2{}_3 + \lambda^2{}_4 \geq 0$$

$\omega(f)$ chỉ bằng 0 khi $f = 0$. Vậy ω xác định dương và φ có thể lấy làm tích vô hướng trên E.

Với các công thứ (1), hiển nhiên $\mathcal{F}$ là một cơ sở trực chuẩn của E.

20. a) Ta hãy tính $|A|$ bằng khai triển theo cột thứ nhất:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} a_1 \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$|A| = 0$ khi $n > 2$, $|A| = -a^2_1$ khi $n = 2$, $|A| = a_n$ khi $n = 1$. Mặt khác A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

b) A là một ma trận đối xứng thực, nên các giá trị riêng của nó là thực. Nếu $|A - iI| = 0$ thì i là một giá trị riêng của A; nhưng i là một số phức, vậy i không thể là giá trị riêng của A, nói một cách khác $|A - iI| \neq 0$; do đó ma trận $A - iI$ khả nghịch trong $Mat_n(\mathbf{C})$.

c) Trước hết ta nhận xét nếu $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = (0, 0, ..., 0)$ thì A là một ma trận chéo, ta không còn phải làm gì; vậy ta giả sử $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \neq (0, 0, ...,0)$. Coi A là ma trận của phép biến đổi đối xứng f của **R** - không gian vectơ Euclide $\mathbf{R}^n$ đối với cơ sở chính tắc $e = \{\overrightarrow{e_1},...,\overrightarrow{e_n}\}$. Ta hãy xét trường hợp $n > 2$. Theo a), $|A| = |A - 0I| = 0$, vậy Ker f = $E_{\lambda=0}(f)$ = không gian con riêng của f tương ứng với giá trị riêng $\lambda = 0$. Ta có $\vec{x} = (x_1, x_2, ...,x_n) \in$ Ker f khi và chỉ khi $f(\vec{x}) = AX = 0$, hay $x_1, x_2, ..., x_n$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} a_1x_n = 0 \\ a_2x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1}x_n = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0 \end{cases}$$

Vì $(a_1, a_2, ...,a_{n-1}) \neq (0, 0, ...,0)$ nên có một $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n - 1$. Vậy phương trình $a_i x_n = 0$ cho ta $x_n = 0$.

Từ đó

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ...,x_n) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \vec{x}.\vec{u} = 0 = \vec{x}.\overrightarrow{e_n}$$

trong đó $\vec{u} = (a_1, a_2, ...,a_{n-1}, 0)$. Vậy Kerf và không gian con $H = \mathbf{R}\vec{u} \oplus \mathbf{R}\overrightarrow{e_n}$ là bù trực giao:

$$\mathbf{R}^n = \text{Kerf} \oplus H.$$

Vì dim H = 2, nên dim Kerf = dim $E_{\lambda=0}(f) = n - 2$. Như vậy $\lambda = 0$ là nghiệm bội cấp n - 2 của đa thức đặc trưng $\varphi(\lambda)$ của ma trận A:

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-2} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

trong đó λ_1, λ_2 là hai nghiệm khác 0 của $\varphi(\lambda)$.

Bây giờ ta xét $f_{|H}$:

$$f(\vec{u}) = f(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + a_{n-1}\overrightarrow{e_{n-1}})$$

$$= a_1 f(\overrightarrow{e_1}) + a_2 f(\overrightarrow{e_2}) + \ldots + a_{n-1} f(\overrightarrow{e_{n-1}})$$

$$= (a^2_1 + a^2_2 + \ldots + a^2_{n-1})\overrightarrow{e_n} \qquad \text{(theo ma trận a)}$$

$$= \|u\|^2 \overrightarrow{e_n}$$

$$f(\overrightarrow{e_n}) = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + a_{n-1}\overrightarrow{e_{n-1}} + a_n\overrightarrow{e_n} = \vec{u} + a_n\overrightarrow{e_n}$$

Vậy $f_{|H}$ là một phép biến đổi đối xứng của H mà ma trận của nó đối với cơ sở $\{\vec{u}, \overrightarrow{e_n}\}$ là :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \|\vec{u}\|^2 & a_n \end{pmatrix}$$

Xét đa thức đặc trưng :

$$|B - \lambda I_2| = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \|\vec{u}\|^2 & a_n - \lambda \end{pmatrix}$$

ta được hai nghiệm thực :

$$\lambda_1 = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + 4\|\vec{u}\|^2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{a_n - \sqrt{a_n^2 + 4\|\vec{u}\|^2}}{2}$$

và cũng chính là hai giá trị riêng khác 0 của $\varphi(\lambda)$, đa thức đặc trưng của ma trận A. Tương ứng với hai giá trị riêng đó là hai vectơ riêng $\vec{u} + \lambda_1\overrightarrow{e_n}$ và $\vec{u} + \lambda_2\overrightarrow{e_n}$. Ma trận A đồng dạng với ma trận chéo :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda_1 & \\ & & & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Trong trường hợp n = 2, ta được ma trận chéo:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

với λ_1 và λ_2 như trên.

Ta cũng có thể có kết quả trên bằng cách nhìn ma trận A để thấy rằng: $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}\vec{u} \oplus \mathbf{R}\overrightarrow{e_n} = H$, từ đó dim Imf = 2, vậy

$$\dim E(f) = \dim \operatorname{Ker} f = n - 2$$

và $\lambda = 0$ là nghiệm bội cấp n - 2 của đa thức $\varphi(\lambda)$. Mặt khác, ta có $\vec{x}.\vec{y} = 0$, $\forall \vec{x} \in$ Kerf, $\forall \vec{y} \in$ Imf. Thật vậy, $\vec{y} \in \text{Imf} \Rightarrow \vec{y} = f(\vec{z}), \vec{z} \in \mathbf{R}^n$; cho nên $\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.f(\vec{z}) = f(\vec{x}).\vec{z} = \vec{0}.\vec{z} = 0$ (do f đối xứng). Ta suy ra:

$$\mathbf{R}^n = \text{Kerf} \oplus \text{Imf}$$

với Imf là bù trực giao của Kerf. Từ đó Imf = H = $E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)$ với $E_{\lambda_i}(f)$ là không gian con riêng tương ứng với giá trị riêng λ_i (i = 1, 2) khác 0 của $\varphi(\lambda)$. Để tính λ_1 và λ_2 ta lại xét $f_{|H}$ như trên.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập lần đầu và tái bản :

NGUYỄN TRỌNG BÁ

Trình bày bìa :

MINH TRÍ

Sửa bản in :

NGUYỄN TRỌNG BÁ

Chế bản :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã số : 7K370h9 – DAI

In 1.000 cuốn (QĐ:04), khổ 14,5 x 20,5cm. Tại Nhà in Hà Nam
Số 29 - Đường Lê Hoàn - TP. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 496. Số ĐKKH xuất bản: 04/2009/CXB/316-2117/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2009.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN - HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC GIÁO TRÌNH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC VỀ VẬT LÝ

CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. Giáo trình cơ học	*Bạch Thành Công*
2. Vật lý kỹ thuật	*Đặng Hùng*
3. Vật lý siêu dẫn và ứng dụng	*Nguyễn Huy Sinh*
4. Vô tuyến điện tử	*Ngạc Văn An*
5. Tuyển tập các bài tập Vật lý đại cương (tập 1, 2)	*Nguyễn Văn Hậu, Ngô Quốc Quýnh*

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục

.Tại TP. Hà Nội : 25 Hàn Thuyên; 187B Giảng Võ;
232 Tây Sơn; 23 Tràng Tiền;
.Tại TP. Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh; 62 Nguyễn Chí Thanh
.Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1;
Cửa hàng 451B-453 Hai Bà Trưng, Quận 3;
240 Trần Bình Trọng, Quận 5
.Tại TP. Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4
Website : www.nxbgd.com.vn

8934980936887

Giá : 18.000 đ